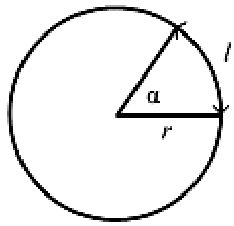
Jens Carstensen, Danska
Alija Muminagić, Danska

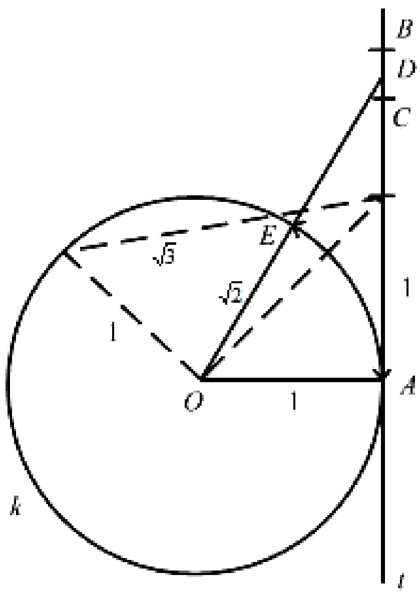
ПРИБЛИЖНА КОНСТРУКЦИЈА НА АГОЛ ОД 1 rad



Да се потсетиме: радијан (ознака rad) е мерна единица за агол. Големината на централниот агол α во радијани е еднаква на количникот на должината на кружниот лак l над тој агол и радиусот на кружницата r, т.е. $\alpha = \frac{l}{r}$, цртеж десно. Оттука, радијанската мерка на аголот чија мерка во степени е еднаква на 180° е еднаква на количникот на должината на полукружницата и радиусот, т.е. $\frac{L}{2r} = \pi\,\mathrm{rad}$, каде со L е означена должината на кружницата. Според тоа, $180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$, па затоа $1\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29597^\circ = 57^\circ 17' 33,8''$ и $1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} \approx 0,01745\,\mathrm{rad}$.

Докажано е дека конструкцијата на агол од $1\mathrm{rad}$ не е изводлива. Меѓутоа, најдени се многу интересни приближни конструкции, од кои во оваа статија ќе разгледаме четири.

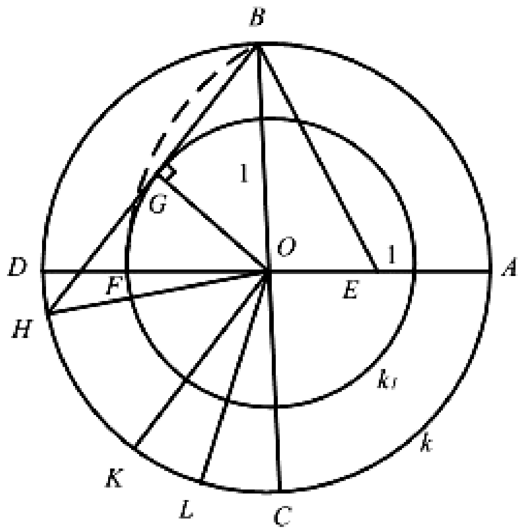
Прва конструкција. Конструираме кружница $k(O,1)$ и во точката A конструираме тангента t. На тангентата, од иста страна на точката A, (цртеж десно) наоѓаме точки B и C такви што $\overline{AC} = \frac{3}{2}$ и $\overline{AB} = \sqrt{3}$ (конструкцијата на отсечка со должина $\sqrt{3}$ е дадена на цртежот десно). Потоа на тангентата t наоѓаме точка D таква што $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{4}$. Ја повлекуваме правата OD и ја наоѓаме пресечната точка E со кружницата k. Ќе докажеме дека должината на лакот AE приближно е еднаква на $1\mathrm{rad}$. Имаме



$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \frac{\overline{BC}}{4} = \overline{AC} + \frac{1}{4}(\overline{AB} - \overline{AC})$$
$$= \frac{3}{4}\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,558012702$$

додека $\mathrm{tg}1 = 1,557407725$. Обидете се да ја определите грешката.

Втора конструкција. Нека дијаметрите AD и BC на кружницата $k(O,1)$ се заемно нормални, точката E е средина на радиусот OA и точката F припаѓа на радиусот OD и важи $\overline{EF} = \overline{EB}$ (цртеж десно). На кружницата $k_1(O,\overline{OF})$, од точката B повлекуваме тангента која ја допира кружницата k_1 во точката G и ја сече кружницата k во точката H. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle OEB$ добиваме



$$\overline{BE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OB}^2 = (\tfrac{1}{2})^2 + 1^2 = \tfrac{5}{4}, \text{ т.е. } \overline{BE} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

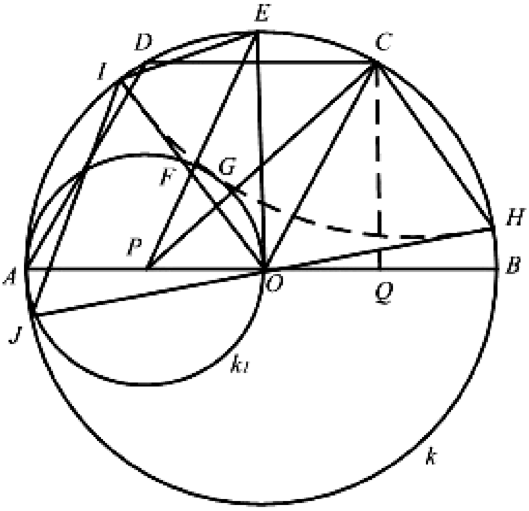
Понатаму,

$$\overline{GO} = \overline{FO} = \overline{EF} - \overline{EO} = \overline{BE} - \overline{EO} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Од $\triangle OBG$ наоѓаме

$$\sin\measuredangle OBG = \frac{\overline{GO}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ т.е. } \measuredangle OBG = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,666239\,\mathrm{rad},$$

односно $\measuredangle OBG \approx \frac{2}{3}\mathrm{rad}$. Понатаму, од теоремата за централен и перифериски агол следува $\measuredangle HOC = 2\measuredangle HBC = 2\measuredangle OBG \approx \frac{4}{3}\mathrm{rad}$. Во точката O повлекуваме права паралелна со правата BH и нека K е пресечната точка на оваа права со кружницата k. Значи, $\measuredangle HOK = \measuredangle KOC = \measuredangle OBG \approx \frac{2}{3}\mathrm{rad}$. Симетралата на аголот $\measuredangle KOC$ ја сече кружницата k во точка L и притоа важи $\measuredangle HOL = \measuredangle HOK + \measuredangle KOL \approx \frac{2}{3}\mathrm{rad} + \frac{1}{3}\mathrm{rad} = 1\mathrm{rad}$. Конечно, во овој случај конструираниот агол има големина $\frac{3}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,999359\,\mathrm{rad}$ и јасно тоа е добро приближување за конструкција на агол од $1\mathrm{rad}$.



Трета конструкција. Конструираме кружница $k(O,\overline{OA})$ и нека точките B,C и D припаѓаат на k и се такви што $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=\overline{OB}$. Сега нека точката P е средина на отсечката OA и да конструираме кружница $k_1(P,\overline{PA})$ (цртеж десно). Во точката O конструираме нормала на AB и нека таа го сече лакот CD во точката E и нека точките F и G се соодветно пресечните точки на отсечките PE и PC се кружницата k_1. На кружницата k определуваме точки I и H такви што $\overline{EI}=\overline{EF}$ и $\overline{CH}=\overline{CG}$. Пресечната точка на правата HO и кружницата k ја означуваме со J и нека точката Q е проекцијата на точката C на дијаметарот AB. Ќе докажеме дека $\measuredangle IJH \approx 1\text{rad}$.

Нека $\overline{OA}=\overline{OB}=1$. Тогаш $\overline{OP}=\frac{1}{2}$, па од Питагоровата теорема за триаголникот $\triangle OPE$ следува $\overline{PE}^2=\overline{OP}^2+\overline{OE}^2=\frac{5}{4}$, што значи $\overline{PE}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Затоа $\overline{EI}=\overline{EF}=\overline{EP}-\overline{FP}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Триаголникот $\triangle OBC$ е рамностран со должина на страна 1, а CQ е негова висина, па затоа $\overline{CQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle PQC$ добиваме

$$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2=(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2+1^2=\tfrac{7}{4}\text{, т.е. } \overline{CP}=\tfrac{\sqrt{7}}{2}.$$

Сега $\overline{CH}=\overline{CG}=\overline{CP}-\overline{PG}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$. Понатаму, триаголникот OIE е рамнокрак и важи $\overline{EI}=2\sin\frac{\measuredangle IOE}{2}$, па затоа $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=2\sin\frac{\measuredangle IOE}{2}$, од каде добиваме $\frac{\measuredangle IOE}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\pi}{10}$. Имаме $\measuredangle EOC=\frac{\pi}{6}$ и триаголникот OCH е рамнокрак, па е $\overline{CH}=2\sin\frac{\measuredangle COH}{2}$ и затоа $\frac{\sqrt{7}-1}{2}=2\sin\frac{\measuredangle COH}{2}$, од каде добиваме $\frac{\measuredangle COH}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4}$. Сега имаме

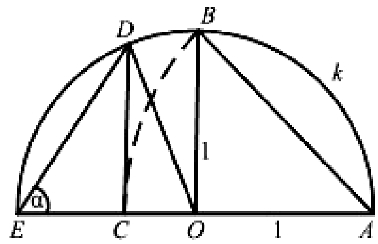
$$\measuredangle IOH = \measuredangle IOE + \measuredangle EOC + \measuredangle COH$$

и како $\measuredangle IJH = \frac{\measuredangle IOH}{2}$ добиваме

$$\measuredangle IJH = \frac{\measuredangle IOH}{2} = \frac{\measuredangle IOE}{2} + \frac{\measuredangle EOC}{2} + \frac{\measuredangle COH}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{12} + \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$
$$= \frac{11\pi}{60} + \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} \approx 0{,}9999897\,\text{rad}.$$

Забележуваме дека ова е доста прибчижна конструкција на агол од 1rad, но истата е доста комплицирана.

Четврта конструкција. Нека E е дијаметар на на полукружницата $k(O,\overline{OA}), \overline{OA}=1$, $OB \perp OA$ и точката C лежи на радиусот EO и е таква што $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{2}$ (цртеж десно). Во точката C конструираме права нормална на EA и нека таа ја сече полукружницата во точката D. Јасно, $\overline{OD}=1$ и $\overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO} = \sqrt{2}-1$. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle OCD$ добиваме



$$\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OC}^2 = 1^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 2(\sqrt{2}-1)\,.$$

Понатаму, $\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = 2-\sqrt{2}$, а од $\triangle DEC$, повторно со примена на Питагоровата теорема наоѓаме

$$\overline{DE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 = 2(\sqrt{2}-1) + (2-\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\,.$$

Конечно, од $\triangle DEC$ добиваме $\sin^2\varphi = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{ED}^2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Според тоа, $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}9989\,\text{rad}$.

Забележуваме дека последната конструкција е доста едноставна, но и дека има и многу мала грека.

Литература

1. Jim Dickson, Nick Lord, Approximate constructions of 1 radian, The Mathematical gazette, Vol. 98, Number 542, July, 2014
2. J. Carstensen, A. Muminagić: Konstruktion of 1 radian, Matematik Maqasinet, 25, s. 649
3. J. Carstensen, A. Muminagić: Konstruktion of 1 radian, 2, Matematik Maqasinet, 78, s. 2868

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ