Ристо Малчески,
Скопје

ХОМОТЕТИЈА (ВТОР ДЕЛ)

Во статијата [3] е разгледана хомотетијата, при што се докажани повеќе нејзини својства. Во оваа статија, која на извесен начин е продолжение на статијата [3] ќе разгледаме неколку задачи, кои се задавани на национални математички олимпијади во одделни држави или на престижни математички турнири, а при чие решавање се користи хомотетијата.

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$), впишан во кружница k. Точката G е тежиште на $\triangle ABC$, а CH_C е висината повлечена од темето C. Полуправата CH_C по втор пат ја сече k во точката C'. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle C'H_CB$ ја допира правата BC.

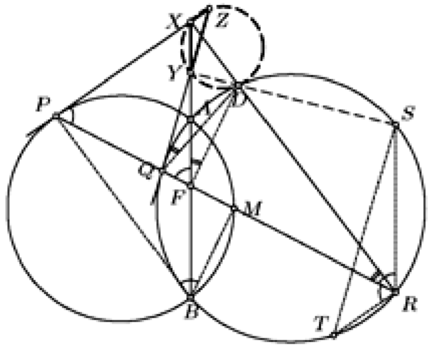
   Решение. Нека правата GH_C по втор пат ја сече k во точката D и да ја означиме M_C средината на AB. Познато е дека хомотетија со центар G и коефициент $-\frac{1}{2}$ ја пресликува k во Ојлеровата кружница на $\triangle ABC$, на која лежат H_C и M_C. Според тоа, при оваа хомотетија отсечката CD се пресликува во M_CH_C. Оттука $AB \| CD$ и $ABCD$ е рамнокрак трапез.
   Добиваме $\measuredangle ABC = \measuredangle DAB$, а од кружницата k добиваме $\measuredangle DC'B = \measuredangle DAB$. Според тоа, $\measuredangle H_CBC = \measuredangle H_CC'B$, од што следува тврдењето на задачата.

2. Триаголникот T е поделен на конечен број триаголници слични со него. Така, секој триаголник во поделбата е добиен од триаголникот T со хомотетија со некој коефициент (позитивен или негативен). Докажи дека збирот на овие коефициенти е еднаков на 1.

   Решение. Нека ABC е дадениот триаголник и BC е неговата „долна“ страна, за која сметаме дека е хоризонтална. За секој триаголник T_i во поделбата, соодветниот коефициент на хомотетија е $\frac{\varepsilon_i a_i}{\overline{BC}}$, каде a_i е хоризонталната страна на триаголникот T_i, а ε_i е знакот на хомотетијата. Збирот на сите коефициенти на хомотетија е еднаков на $\frac{1}{\overline{BC}}\sum_i \varepsilon_i a_i$. Во овој збир должините кои се паралелни на страната BC, освен оние на BC се сметаат два пати и тоа еднаш со знак + за триаголникот над неа и еднаш со знак – за триаголникот под неа. Така во разгледуваниот збир сите должини освен оние на BC се кратат, па затоа збирот е еднаков на BC, а збирот на коефциентите е еднаков на 1.

3. Кружниците ω и Ω се сечат во точките A и B. Нека M е средината на лакот AB на кружницата ω кој лежи внатре во кружницата Ω. Тетива MP на кружницата ω ја сече Ω во точката Q (внатре во ω). Нека l_P е тангентата на ω во точката P, а l_Q е тангентата на Ω во точката Q. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот определен со правите l_P, l_Q и AB ја допира кружницата Ω.

Решение. При распоред $B-A-X$ нека: $X=AB\cap l_P$, $Y=AB\cap l_Q$ и $Z=l_P\cap l_Q$. Понатаму, нека правата MP ги сече AB и Ω соодветно во точките F и R, и нека S и T се точки на Ω такви што $RS\parallel XY$ и $RT\parallel XZ$. Од



$$\measuredangle PRT=\measuredangle MPX=\measuredangle MBP$$
$$=\measuredangle AFP=\measuredangle SRP,$$

следува дека точката Q е средина на лакот TQS, па затоа $l_Q\parallel TS$. Според тоа триаголниците XYZ и RST се хомотетични со хомотетија χ. Ќе докажеме дека точката $D=RX\cap\Omega$ ($D\neq R$) е центар на хомотетијата χ, од каде ќе следува дека кружниците XYZ и Ω се допираат во точката D. Доволно еда се докаже дека D припаѓа на правата SY. Од $\measuredangle PFX=\measuredangle XPF$ следува

$$\overline{XF}^2=\overline{XP}^2=\overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XD}\cdot\overline{XR},$$

па затоа $\frac{\overline{XF}}{\overline{XD}}=\frac{\overline{XR}}{\overline{XF}}$, т.е. $\triangle XDF\sim\triangle XFR$. Оттука следува

$$\measuredangle DFX=\measuredangle XRF=\measuredangle DRQ=\measuredangle DQY,$$

што значи дека точките D,Y,Q,F се концикични. Сега имаме

$$\measuredangle YDQ=\measuredangle YFQ=\measuredangle SRQ=180^\circ-\measuredangle QDS,$$

па затоа $D\in SY$.

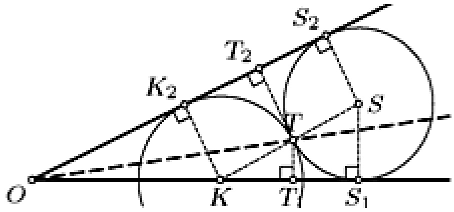
4. Во рамнината е даден остар агол со теме O и краци Op_1 и Op_2. Нека k_1 е кружница со центар на кракот Op_1 и која го допира кракот Op_2. Кружницата k_2 ги допира краците на аголот и надворешно ја допира кружницата k_1. Определи го геометриското место на допирните точки на k_1 и k_2 кога центарот на кружницата k_1 поминува низ полуправата Op_1.

Решение. Нека T е допирната точка нна кружниците $k_1(K,r_1)$ и $k_2(S,r_2)$ и нека со X_i ја означиме проекцијата на било која точка X на кракот Op_i $(i=1,2)$.

Тогаш важи

$\overline{TT_1} = \frac{r_1}{r_1+r_2}\overline{SS_1} = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ и

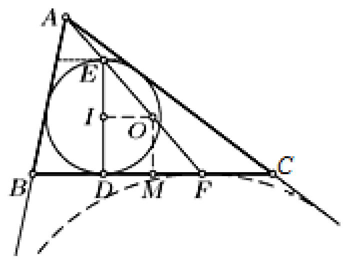
$\overline{TT_2} = \frac{r_1}{r_1+r_2}\overline{SS_2} + \frac{r_2}{r_1+r_2}\overline{KK_2} = \frac{2r_1 r_2}{r_1+r_2}$,



па затоа $\overline{TT_2} = 2\overline{TT_1}$. Значи, сите овие точки T припаѓаат на некоја отворена полуправа Op. Јасно, со хомотетија со центар O точката T може да се преслика во било која точка на Op, па затоа Op е бараното геометриско место точки.

5. Даден е триаголник ABC. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од центарот на впишаната кружница I на страната BC. Нека DI по вторпат ја сече впишаната кружница во точката E. Правата AE ја сече страната BC во точката F. Нека отсечката IO е паралелна на страната BC, каде O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ако R и r се соодветно радиусите на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$, докажи дека $\overline{EF} = 2(R-r)$.

Решение. Тангентата t на впишаната кружница во точката E е паралелна со правата BC. Затоа хомотетија со центар во A која ја пресликува точката E во F ја пресликува t во правата BC, а исто така ја пресликува впишаната кружница во припишаната кружница k_a наспроти темето A. Значи, F е допирната точка на кружницата k_a



и правата BC, а знаеме дека $\overline{BD} = \overline{FC} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{CA}}{2}$, т.е. M е средина на на отсечката DF. Од $IO \parallel DF$ и $MO \parallel DE$ следува дека IO е средна линија во триаголникот DEF. Сега од Ојлеровата формула следува

$$\overline{DF} = 2\overline{IO} = 2\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

и конечно

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2} = \sqrt{(2r)^2 + 4(R^2 - 2Rr)} = 2(R-r).$$

6. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{AB} < \overline{AC}$). Нека ω е впишаната кружница во $\triangle ABC$, а неговата припишана кружница наспроти темето A ја допира страната BC во точката A'. Точката X од отсечката AA' е таква што отсечката $A'X$ не ја сече ω. Тангентите повлечени од X кон ω ја сечат отсечката BC во точките Y и Z. Докажи дека збирот $\overline{XY} + \overline{XZ}$ не зависи од изборот на точката X.

Решение. Ќе сметаме дека точката Y е поблиску до B отколку Z, како и дека страната BC е хоризонтална, а A е над неа.
Со ω_A да ја означиме припишаната кружница кон страната BC во $\triangle ABC$, а со ω' припишаната кружница кон страната XZ во $\triangle XYZ$. Нека ω ја допира страната BC во точката A''. Со T да ја означиме пресечната точката на AA' со ω, која е поблиску до A. Хомотетијата со центар во A која ја пресликува ω во ω_A, ја пресликува T во A' и затоа тангентата на ω во точката T е паралелна со BC.
Кружниците ω и ω' се впишани во агли формирани од правите XY и XZ, па затоа постои хомотетија со центар X (и негативен коефициент) која ω ја пресликува во ω'. Нека при таа хомотетија точката T се пресликува во точка T'. Тогаш T' лежи на правата AA', на тангента на ω' во T' која е паралелна на BC, и ω' е над таа тангента. Таква тангента на ω' е правата BC и затоа T' лежи на правата BC, т.е. ω' ја допира BC во точката A'.
Со p да го означиме полупериметарот на $\triangle XYZ$. Бидејќи кружниците ω и ω' се припишани за овој триаголник, имаме $\overline{ZA'}=\overline{YA''}=p-\overline{YZ}$. Според тоа,

$$\overline{XY}+\overline{XZ}=2p-\overline{YZ}=2(p-\overline{YZ})+\overline{YZ}=\overline{ZA'}+\overline{YZ}+\overline{YA''}=\overline{A'A''},$$

што не зависи од изборот на X.

7. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle ABC>\measuredangle ACB$. Нека Γ е кружница со центар O, која минува низ точката B и ја допира правата AC во точката C. Правите AB и CO по втор пат ја сечат Γ соодветно во точките D и P. Нека E е пресечната точка на AC и правата низ P која е паралелна со AO. Правата EB по втор пат ја сече Γ во точката L. Нека F е пресечната точка на правата AC и симетралата на отсечката BD, а K е пресечната точка на LF и CD. Докажи дека $EK \parallel CL$.

Решение. Со K' да ја означиме пресечната точка на правата CD и правата низ E, паралелна со CL. Од $\measuredangle EBD=\measuredangle DCL=\measuredangle EK'D$, следува дека точките B,D,E и K' лежат на една кружница γ со центар O_1. Од

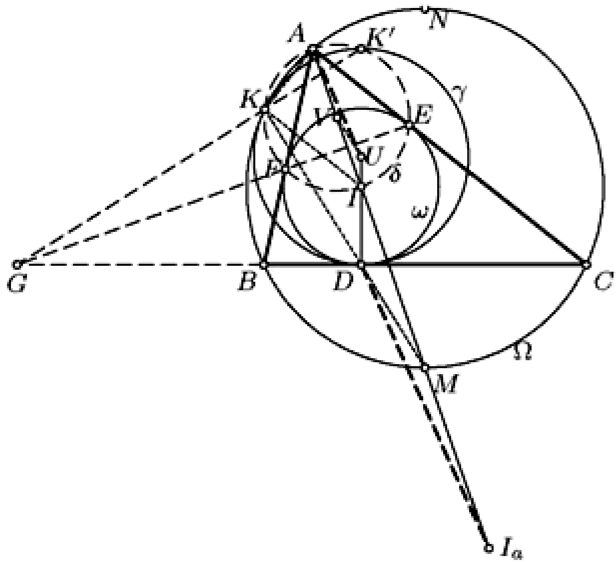
$$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AB}$$

следува дека правата AE ја допира γ во точката E.
Да разгледаме хомотетја χ која γ ја пресликува во Γ. Центарот на χ е точката F, при што важи $\chi(E)=C, \chi(O_1)=O$ и $\chi(K')=L$. Според тоа, точките F,K' и L се колинеарни, па затоа $K'\equiv K$, со што задачата е решена.

8. Триаголникот ABC е впишан во кружницата Ω. Впишаната кружница во триаголникот ABC ја допира страната BC во точката D. Кружницата γ го

допира лакот BAC на Ω и ја допира отсечката BC во точката D. Ако U е центарот на γ, а I_a е центарот на прпишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето A, докажи дека $AU \parallel DI_a$.

Решение. Нека K е допирната точка на кружницата γ и опишаната кружница Ω околу триаголникот ABC. Хомотетија со центар K која ја пресликува γ во Ω ја пресликува точката D во точка M на Ω. Бидејќи тангентите во D на γ и во M на Ω се паралелни, точката M е средина на лакот BC кој не ја содржи A.



Од $\measuredangle MBD = \measuredangle MKB$ следува дека триаголниците MBD и MKB се слични, па затоа

$$\overline{MD} \cdot \overline{MK} = \overline{MB}^2 = \overline{MI}^2,$$

од каде слледува дека и триаголниците MID и MKI се слични. Сега, ако N е средина на лакот BAC, имаме

$$\measuredangle AKI = \measuredangle AKM - \measuredangle IKM = \measuredangle AKM - \measuredangle DIM$$

$$= \measuredangle AKM - \measuredangle AMN = \measuredangle MKN = 90^\circ.$$

Според тоа, точката K и точките E и F во кои ω ги допира соодветно AC и AB лежат на кружница δ со дијаметар AI. Со V да го означиме центарот на кружницата δ.

Нека K' е втората пресечна точка на γ и δ. Правите BC, EF и KK' се сечат во радикалниот центар G на кружниците ω, γ и δ. Бидејќи

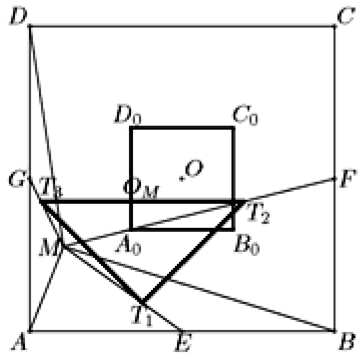
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{KC}},$$

точките D, K, G припаѓаат на Аполониевата кружница во однос на точките

B и C, па затоа $\measuredangle DKG = 90^\circ$. Според тоа, $\measuredangle DKK' = 90^\circ$, т.е. K' е дијаметрално спротивната точка на D на кружницата γ. Сега од $UV \perp KK'$ следува $UV \parallel MD$. Според тоа, $\triangle IUV \sim \triangle IDM$. Конечно, бидејќи M и V се средини на отсечките II_a и IA, следува дека $\triangle IUA \sim \triangle IDI_a$, а оттука следува $AU \parallel DI_a$.

9. За произволна точка M во внатрешноста на квадратот $ABCD$, нека T_1, T_2 и T_3 се тежиштата на триаголниците ABM, BCM и DAM, соодветно. Нека O_M е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $T_1T_2T_3$. Определи го геометриското место на точката O_M, кога точката M се движи во внатрешноста на квадратот $ABCD$.

Решение. Нека E, F, G се средините на отсечките AB, BC, DA, соодветно. Бидејќи $\frac{\overline{MT_1}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MT_2}}{\overline{MF}} = \frac{2}{3}$ и $\measuredangle T_1MT_2 = \measuredangle EMF$ следува дека $\triangle T_1MT_2 \sim \triangle EMF$, па затоа $T_1T_2 \parallel EF$. Аналогно се докажува дека $T_1T_3 \parallel EG$, па како $EF \parallel AC$, $EG \parallel BD$ и $AC \perp BD$, следува дека $T_1T_2 \perp T_1T_3$. Значи, $\triangle T_1T_2T_3$ е правоаголен ($\measuredangle T_3T_1T_2 = 90^\circ$), па центар на неговата опишана кружница е средината на отсечката T_2T_3.



Нека O е центарот на квадратот $ABCD$. Од претходно изнесеното и претставувањето на тежиштето на триаголникот преку положбата на темињата следува

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO_M} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OT_2} + \overrightarrow{OT_3}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}) + \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OM})) \qquad (1) \\ &= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \tfrac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$

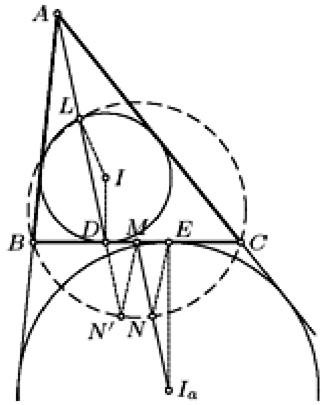
Нека $A_0B_0C_0D_0$ е слика на квадратот $ABCD$ со хомотетија со центар во O и коефициент $\frac{1}{3}$. Бидејќи точката M се наоѓа внатре во квадратот $ABCD$, со оваа хомотетија нејзината слика ќе биде точка внатре во квадратот $A_0B_0C_0D_0$ (од (1) следува дека точката M се пресликува во точката O_M).

Од друга страна, ако O' е внатрешна точка на квадратот $A_0B_0C_0D_0$, нека точката M е таква што $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OO'}$. Точката M е внатрешна за квадратот

$ABCD$ и постои точка O_M за која важи (1). Значи, $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_M}$, па затоа точките O' и O_M се совпаѓаат. Според тоа, секоја внатрешна точка O' на квадратот $A_0B_0C_0D_0$ е точка O_M за некоја точка M од внатрешноста на квадратот $ABCD$.

Значи, бараното геометриско место точки е внатрешноста на квадратот кој се добива како слика на квадратот $ABCD$, со хомотетија со центар O и коефициент $\frac{1}{3}$.

10. Впишаната кружница ω во триаголникот ABC ја допира страната BC во точката D. Правата AD по втор пат ја сече ω во точката L. Нека I_a е центарот на припишаната кружница ω_a наспроти темето A, M е средина на страната BC, а N е средина на отсечката MI_a. Докажи дека точките N, C, N, L се конциклични.



Решение. Нека I е центар на кружницата ω. Со E да ја означиме допирната точка на кружницата ω_a со страната BC, а со F дијаметрално спротивната точка на неа на таа кружница.

Хомотетија со центар A која ја пресликува ω во ω_a ја пресликува правата BC во тангента на ω_a паралелна на BC, што мора да е тангента во точката F. Значи, точките A, D и F се колинеарни. Бидејќи $\overline{MD} = \overline{ME}$, за точката N' симетрична на N во однос на симетралата на отсечката BC важи $\overrightarrow{BN'} = \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF}$, па затоа и N' лежи на правата AD.

Понатаму, од $\overline{ID} = \overline{IL}$, $\overline{NI_a} = \overline{NE}$ и $\measuredangle EI_aN = \measuredangle EFD = \measuredangle IDL$ следува дека триаголниците ILD и NI_aE се слични, што заедно со сличноста на триаголнците ICD и CI_aE дава

$$\overline{DL} \cdot \overline{DN'} = \overline{DL} \cdot \overline{NE} = \overline{ID} \cdot \overline{I_aE} = \overline{CD} \cdot \overline{CE} = \overline{CD} \cdot \overline{BD}.$$

Оттука следува дека точките B, C, N', L припаѓаат на една кружница, а на таа кружница е и точката N бидејќи $BCNN'$ е рамнокрак трапез.

11. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Нека P е пресечната точка на полуправите BA и CD, Q на полуправите BC и AD, а H е проекцијата на D врз PQ. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен ако и само ако

впишаните кружници во $\triangle ADP$ и $\triangle CDQ$ се гледаат под еднакви агли од H.

Решение. Нека $\omega_1(I_1, r_1)$ и $\omega_2(I_2, r_2)$ се соодветно впишаните кружници во триаголниците ADP и CDQ. Бидејќи овие кружници се хомотетични со центар на хомотетија D, важи $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{DI_1}}{\overline{DI_2}}$. Можни се два случаја.

Случај 1. Нека $r_1 \neq r_2$. Нека S е центарот на хомотетија со позитивен коефициент, кој ја пресликува ω_1 во ω_2, т.е. е пресечната точка на нивните заеднички надворешни тангенти. Јасно, двете кружници се гледаат под еднакви агли од H ако и само ако $\frac{\overline{HI_1}}{\overline{HI_2}} = \frac{r_1}{r_2}$. Познато е дека множеството точки X за кои $\frac{\overline{XI_1}}{\overline{XI_2}} = \frac{\overline{DI_1}}{\overline{DI_2}} = \frac{\overline{SI_1}}{\overline{SI_2}}$ е кружница со дијаметар SD (Аполониевата кружница).

Според тоа, последниот услов означува дека $\measuredangle DHS = 90^\circ$, т.е. дека S лежи на правата PQ. Останува да докажеме дека последното е еквивалентно со тврдењето дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен.

Нека четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружницата ω. Од теоремата за трите центри на хомотетија следува дека точките S, P и Q лежат на една права (како центри на хомотетии со позитивни коефициенти кои соодветно ги пресликуваат ω_1 во ω_2, ω во ω_1 и ω_2 во ω).

Обратно, да претпоставиме дека S лежи на правата PQ. Нека ω е припишаната кружница на $\triangle CDQ$ која ја допира страната CD. Со T да го означиме центарот на хомотетија со позитивен коефициент, која ја пресликува ω во ω_1 (пресечната точка на нивните надворешни тангенти). Повторно од теоремата за трите центри на хомотетија следува дека точките T, Q и S лежат на една права,т.е. T лежи на правата PQ. Од друга страна, T лежи на правата PC, па значи $T \equiv P$. Тогаш правата PB е тангента на ω, т.е. четириаголникот $ABCD$ е опишан околу ω.

Случај 2. Нека $r_1 = r_2$. Кружниците ω_1 и ω_2 се симетрични во однос на симетралата l на $\measuredangle ADC$. Двете кружници се гледаат под еднакви агли од точката H ако и само ако $\overline{HI_1} = \overline{HI_2}$, т.е. ако и само ако $DH \perp I_1I_2$, што значи $PQ \parallel I_1I_2$.

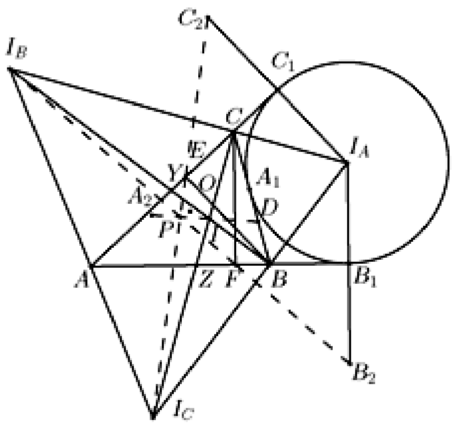
Ако четириаголникот $ABCD$ е опишан околу ω, тогаш ω е симетрична во однос на l. Тогаш правите BA и BC, односно DC и DA се симетрични во однос на l (заеднички надворешни тангенти на ω во ω_1 и соодветно на ω_2 во ω). Значи, точките P и Q се исто така симетрични во однос на l, односно $PQ \parallel I_1I_2$.

Обратно, нека $PQ \parallel I_1I_2$, т.е. правите DA и DC се симетрични во однос на правата DH (како тангенти на ω_1 и ω_2). Тоа значи дека точките P и Q се симетрични во однос на DH. Според тоа, правите BA и BC се симетрични во однос на DH, т.е. четириаголникот $ABVD$ е симетричен во однос на DH и е опишан околу кружница.

12. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, во кој I_B и I_C се соодветно центрите на припишаните кружници наспроти темињата B и C, а O е центарот на опишаната кружница. Точките E и Y припаѓаат на страната AC и се такви што $\measuredangle ABY = \measuredangle CBY$ и $BE \perp AC$. Точките F и Z припаѓаат на страната AB и се такви што $\measuredangle ACZ = \measuredangle BCZ$ и $CF \perp AB$. Правите I_BF и $I\ E$ се сечат во точката P. Докажи дека правите PO и YZ се заемно нормални.

Решение. Со I_A да го означиме центарот на припишаната кружница наспроти темето A во $\triangle ABC$. Нека таа ги допира правите BC, AB и AC соодветно во точките A_1, B_1 и C_1, а точките A_2, B_2 и C_2 се сликите на I_A при симетрии во однос на A_1, B_1 и C_1, соодветно. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Точката $D \in BC$ е подножјето на висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Со S да го означиме центарот на опишаната кружница околу $\triangle II_BI_C$ (види цртеж).

Точките D, I и A_2 се колинеарни. Тројките точки E, I_C, C_2 и F, I_B, B_2 исто така се колинеарни. Да забележиме дека $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ и $B_1C_1 \parallel I_BI_C$, па затоа $B_2C_2 \parallel I_BI_C$. Аналогно важи и за другите страни, што значи дека $\triangle II_BI_C$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се хомотетични и нека P е центарот на нивната хомотетија. Тогаш D, I, P и A_2 припаѓаат на една права, како и $P \in I_AS$.

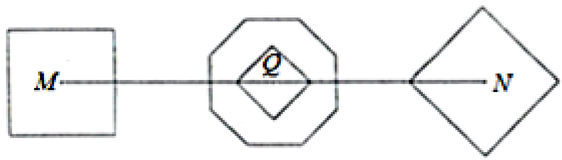


Од друга страна I_AS е Ојлеровата права во $\triangle II_BI_C$. Таа права минува низ центарот на кружницата на деветте точки во $\triangle II_BI_C$. Меѓутоа, овој центар се совпаѓа со O, па затоа P, O и I_A се колинеарни.

Останува да докажеме дека $OS \perp YZ$. За таа цел ќе докажеме дека YZ е радикална оска на опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle II_BI_C$. Меѓутоа Y е радикаен центар за кружницата со дијаметар II_B и двете разгледувани кружници. Аналогно Z е радикален центар за кружницата со дијаметар II_C и двете разгледувани кружници. Од ова следува дека $OS \perp YZ$.

13. Два квадрати K_1 и K_2 со центри M и N и страни еднакви на 1 се поставени во една рамнина така што $\overline{MN} = 4$, две од страните на квадратот K_1 се паралелни на правата MN , а едната дијагонала на квадратот K_2 лежи на правата MN . Определи го геометриското место на средините на сите отсечки XY каде X лежи во внатрешноста на квадратот K_1, а Y е во внатрешноста на квадратот K_2.

Решение. Бараното геометриско место е внатрешноста на правилен осумаголник со центар во средината на отсечката MN и должина на страна $\frac{1}{2}$.



Последното можеме да го докажеме на следниот начин. Фиксираме точка Y во внатрешноста на квадратот K_2, тогаш бидејќи точката X ја опишува внатрешноста на квадратот K_1, средините на отсечката XY ќе опишуваат квадрат $K_1^{'}$ кој е хомотетичен на K_1 при хомотетија со центар Y и коефициент $\frac{1}{2}$. Јасно, овој квадрат има должина на страна $\frac{1}{2}$ и негов центар е средината на отсечката MY . Кога пак точката Y ја опишува внатрешноста на K_2, тогаш средините на отсечката MY опишуваат квадрат $K_2^{'}$ хомотетичен на K_2 со центар на хомотетија M и коефциент $\frac{1}{2}$. Страната на овој квадрат е еднаква на $\frac{1}{2}$, а неговиот центар е средината на отсечката MN . Конечно, кога центрите на квадратите $K_1^{'}$ го опишуваат квадратот $K_2^{'}$, тогаш овие квадрати ја опишуваат внатрешноста на правилен осумаголник со центар во средината на отсечката MN и должина на страна $\frac{1}{2}$.

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Самарџиски, А.: *Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј*, ПМФ, Скопје, 1988
3. Малчески, Р., Аневска, К.: *Хомотетија*, Сигма/Математички талент, Скопје