ЈБМО 2017

1. Определи ги сите множества кои содржат точно шест последователни природни броеви и чии елементи го задоволуваат условот: производот на некои два броја од множеството собран со производот на некои други два броја од множеството е еднаков на производот на преостанатите два броја од множеството.

Решение. Точно два од шест броја се деливи со 3 и тие мора да се во ист производ. Во спротивно, два од трите производи кои ги правиме ќе бидат деливи со 3, а третиот нема да биде делив со 3, што не е можно.

Со n и $n+3$ да ги означиме броевите од множеството кои се деливи со 3. Два од четирите преостанати броја даваат остаток 1 при делење со 3, додека другите два даваат остаток 2. Како и да ги групираме броевите во производи, двата производи ќе бидат конгруентни или со 1 или со 2 по модул 3. Според тоа, производот $n(n+3)$ мора да биде во збирот со уште еден производ.

Три од шест последователни броја се парни, а три се непарни. Еден од броевите n и $n+3$ е парен, а другиот е непарен, па затоа точно два од преостанатите четири броја се непарни. Бидејќи производот $n(n+3)$ е парен број, двата преостанати непарни броја мора да се во различни производи.

Можни се следниве три случаи.

1) Броевите се $n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$. Бидејќи збирот на производите мора да е поголем од $n(n+3)$ единствена можност е
$$(n-2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2),$$
од каде добиваме $n=3$. Броевите се $1,2,3,4,5,6$ и притоа важи $1\cdot 2+3\cdot 6=4\cdot 5$.

2) Броевите се $n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Бидејќи за
$$(n+4)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2)$$
немаме решение, мора да е $n+4$ на десната страна во производ со број со различна парност. Значи, со $n-1$ или $n+1$. Во случајот
$$(n+2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$$
имаме решение $n=3$. Броевите се $2,3,4,5,6,7$ и $2\cdot 5+3\cdot 6=4\cdot 7$. Во случајот
$$(n+2)(n+1)+n(n+3)=(n-1)(n+4)$$
немаме решение.

3) Броевите се $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$. Имаме три случаи. Прво:
$$(n+1)(n+2)+n(n+3)=(n+4)(n+5)$$
и во овој случај решение е $n=6$. Броевите се $6,7,8,9,10,11$ и $7\cdot 8+6\cdot 9=10\cdot 11$. Потоа
$$(n+2)(n+5)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$$
и во овој слчај немаме решение и на крајот
$$(n+1)(n+4)+n(n+3)=(n+2)(n+5)$$
и во овој слчај немаме решение.

2. Нека x, y, z се по парови различни природни броеви. Докажи дека
$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)\geq 9xyz.$$
Кога важи знак за равенство?

Решение. Бидејќи x, y, z се различни природни броеви, даденото неравенство е симетрично, па без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y+1\geq z+2$. Ќе разгледаме два можни случаи.

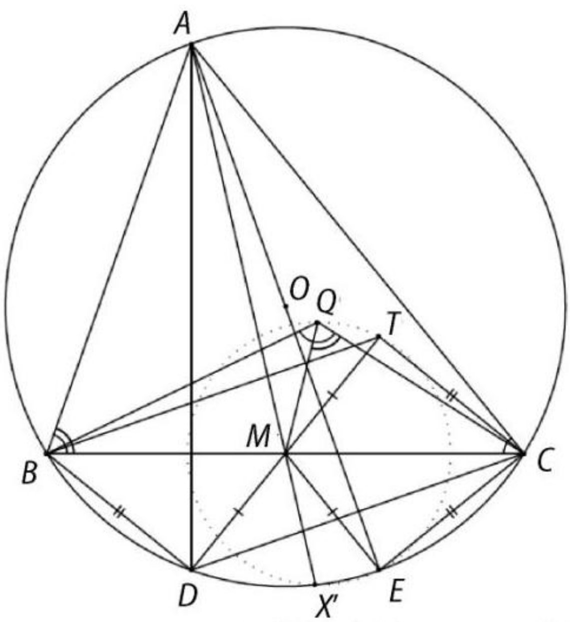
1) $y\geq z+2$. Од $x\geq y+1\geq z+3$ следува
$$(x-y)^2\geq 1, (y-z)^2\geq 4, (x-z)^2\geq 9,$$
што е еквивалентно со
$$x^2+y^2\geq 2xy+1,\ \ y^2+z^2\geq 2yz+4,\ \ x^2+z^2\geq 2xz+9,$$
односно со
$$zx^2+zy^2\geq 2xyz+z,\ \ zy^2+zz^2\geq 2zyz+4z,\ \ yx^2+yz^2\geq 2xyz+9y.$$
Со собирање на последните три неравенства добиваме
$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geq 6xyz+4x+9y+z,$$
од каде следува
$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)\geq 9xyz+2x+7y-z.$$
Бидејќи $x\geq z+3$, следува дека $2x+7y-z\geq 0$, па следува и тврдењето на задачата.

2) $y=z+1$. Бидејќи $x\geq y+1=z+2$, добиваме $x\geq z+2$. Со замена на $y=z+1$ во бараното неравенство, добиваме дека треба да докажеме дека
$$(x+2z+1)(x(z+1)+(z+1)z+zx-2)\geq 9x(z+1)z.$$
Последното неравенство е еквивалентно со неравенството
$$(x-z-2)(x-z+1)(2z+1)\geq 0,$$
кое бидејќи $x\geq z+2$ е секогаш точно.

Знак за равенство важи само во случајот 2) за $x=z+2$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $(x,y,z)=(k+2,k+1,k),\ k\in\mathbb{N}$ и сите пермутации на овие тројки.

3. Нека ABC е остроаголен тгриаголник и нека $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Точката O е центар на опишаната кружница Γ околу $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната BC, а D е точка на кружницата Γ таква што $AD\perp BC$. Нека точката T е таква што $BDTC$ е паралелограм и нека Q е точка од иста страна на правата BC како точката A и таква што
$$\measuredangle BQM=\measuredangle BCA \text{ и } \measuredangle CQM=\measuredangle CBA.$$
Нека правата AO по втор пат ја сече кружницата Γ во точката E и нека опишаната кружница околу $\triangle ETQ$ по втор пат ја сече кружницата Γ во точката X. Докажи дека точките A,M и X се колинеарни.

Решение. Нека X' е симетрилната точка на точката Q во однос на правата BC. Бидејќи
$$\measuredangle CBA=\measuredangle CQM=\measuredangle CX'M \text{ и } \measuredangle BCA=\measuredangle BQM=\measuredangle BX'M,$$
добиваме
$$\measuredangle BX'C=\measuredangle BX'M+\measuredangle CX'M=\measuredangle CBA+\measuredangle BCA=180^\circ-\measuredangle BAC$$
од заклучуваме дека $X'\in\Gamma$. Бидејќи $\measuredangle AX'B=\measuredangle ACB=\measuredangle MX'B$ добиваме дека точките A,M,X' се колинеарни.



Понатаму, четириаголникот $DBCE$ е рамнокрак трапез бидејќи

$$\measuredangle DCB = \measuredangle DAB = 90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle OAC = \measuredangle EAC.$$

Бидејќи $BDTC$ е паралелограм важи $\overline{MT} = \overline{MD}$ и точките M, D, T се колинеарни, $\overline{BD} = \overline{CT}$ и бидејќи $BDEC$ е рамнокрак трапез важи $\overline{BD} = \overline{CE}$ и $\overline{ME} = \overline{MD}$. Исто така, бидејќи

$$\measuredangle BTC = \measuredangle BDC = \measuredangle BED,\ \overline{ME} = \overline{MT} \text{ и } \overline{CE} = \overline{BD} = \overline{CT},$$

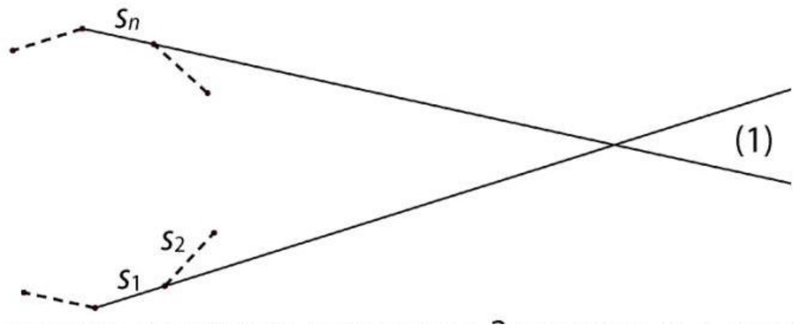
точките E и T се симетрични во однос на правата BC. Бидејќи и точките Q и X' се симетрични во однос на правата BC, четириаголникот $QX'ET$ е рамнокрак трапез, па затоа точките Q, X', E, T се конециклични. Бидејќи $X' \in \Gamma$, тоа значи дека $X \equiv X'$, па затоа точките A, M, X се колинеарни.

4. Нека P е правилен многуаголник во рамнината со $2n$ страни (да го означиме со $A_1A_2...A_{2n}$) каде n е природен број. Ќе велиме дека точката S која лежи на страна на многуаголникот P се гледа од точката E, која е надвор од многуаголникот P, ако отсечката SE не содржи други точки од многуаголникот освен точката S. Страните на многуаголникот P треба да се обојат во три различни бои така што секоја страна е обоена точно со една боја и секоја боја е употребена најмалку еднаш (темињата на многуаголникот ги занемаруваме, нив не ги боиме). Исто така од секоја точка во рамнината која е надвор од многуаголникот P треба да се гледаат точки на страните на тој многуаголник кои се обоени во најмногу две различни бои. На колку различни начини може да се изврши вакво боење (две боења се различни ако најмалку една иста страна на многуаголникот е обоена со друга боја во тие боења)?

Решение. За $n=2$ одговор е 36, за $n=3$ одговор е 30, а за $n \geq 4$ одговор е $6n$.

Лема 1. Во рамнината е даден правилен многуаголник со $2n$ страни и да означиме n негови последователни страни редоследно со $s_1, s_2, ..., s_n$. Во рамнината постои точка Q, надвор од дадениот многуаголник, таква што од неа може да се види бојата на секоја од страните $s_1, s_2, ..., s_n$.

Доказ. Страните s_1 и s_n на многуаголникот не се паралелни, па затоа правите определени со ови страници се сечат. Бараната точка Q може да биде било која точка во областа (1) на долниот цртеж. ■



Лема 2. Во рамнината е даден правилен многуаголник со $2n$ страни и да означиме $n+1$ негови последователни страни редоследно со $s_1, s_2, ...,$ s_{n+1}. Во рамнината не постои точка Q, надвор од дадениот многуаголник, таква што од неа може да се види бојата на секоја од страните $s_1, s_2, ..., s_{n+1}$.

Доказ. Бидејќи страните s_1 и s_{n+1} се паралелни, во рамнината надвор од многуаголникот не постои точка од која и двете може да се видат. Од ова следува тврдењето на лемата. ■

Ќе ги разгледаме случаите $n=2$, $n=3$ и $n \geq 4$.

За $n=2$, P е квадрат. Две страни ќе бидат со иста боја. Треба да ги избереме овие две страни (тоа може да се направи на $\frac{4 \cdot 3}{2}=6$ начини) и потоа согласно изборот да направи боење. Вкупниот број можности е $6 \cdot 3 \cdot 2=36$.

За $n=3$, P е шестаголник. Страните да ги означиме последователно со $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Мора да има две последователно страни кои се обоени со различни бои. Нека, на пример, страната a_1 е обоена со црвена, а страната a_2 е обоена со сина боја. Мора да постои и страна обоена, на пример, со зелена боја, а тоа може да бидат само страните a_4 или a_5. Имаме три можности:

1) a_4 е зелена, а a_5 не е. Тогаш со елеминација заклучуваме дека a_3, a_5 и a_6 мора да се сини.
2) a_4 и a_5 се зелени. Тогаш a_6 е црвена, а a_3 е сина.
3) a_5 е зелена, а a_4 не е. Тогаш со елеминација заклучуваме дека a_3, a_5 и a_6 мора да се црвени.

Според тоа, имаме два вида боења.

i) Две спротивни страни се обоени содве различни бои, а сите преостанати сотрета боја. Ова може да се направи на $3\cdot(3\cdot 2\cdot 1)=18$ начини (прво бираме пар спротивни страни, а потоа доделуваме бои).

ii) Три пара последователни страни се обоени секоја со по една, различна, боја. Ова може да се направи на 12 начини.

Значи, за $n=3$, одговорот е $18+12=30$.

Сега ќе го определиме бројот на начините за $n\geq 4$. Според лемата 1, секои 4 последователни страни може да се видат од некоја точка надвор од многуаголникот P. Страните на многуаголникот да ги означиме со $a_1,a_2,...,a_{2n}$. Повторно мора да постојат две соседни странисо различни бои. Нека претпоставиме дека a_1 е обоена сино, а a_2 е обоена црвено. Според лемата 1, со зелена боја може да биде обоена само страната a_{n+1} или a_{n+2}. Имаме две можности:

1) a_{n+1} е зелена. Според лемата 1, a_n мора да биде црвена (во спротивно страните $a_2,a_3,...,a_{n+1}$ ќе бидат обоени со три бои.

   Ако страната a_{n+2} е црвена, такви се и страните $a_{n+3},...,a_{2n}$, па затоа бараното боење е a_1 е сина, a_{n+1} е зелена и сите преостанати се црвени.

   Ако страната a_{n+2} е зелена:

   - a_{n+3} не може да е зелена, бидејќи страните $a_{n+3},...,a_{2n},a_1,a_2$ ќе бидат обоени во три бои,
   - a_{n+3} не може да е сина, бидејќи страните $a_n,...,a_{n+3}$ ќе бидат обоени во три бои,
   - a_{n+3} не може да е црвена, бидејќи страните $a_{n+2},...,a_{2n}$ ќе бидат обоени во три бои.

   Според тоа, страната a_{n+2} не може да биде зелена.

2) Случајот кога a_{n+2} е зелена се разгледава на ист начин како случајот 1)

Од претходно изнесеното следува дека единствен начин на боење за $n\geq 4$ е таков што две спротивни страни се обоени со две различни бои, а исте преостанати страни се обоени со третата боја. Изборот на страните може да се направи на n начини, а боите на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа во овој случај вкупниот број на боења е $6n$.