Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ЛОГИЧКИТЕ ЗАДАЧИ НА МАТЕМАТИЧКИТЕ НАТПРЕВАРИ

Логичките задачи често пати се задаваат на математичките натпревари. Но, за разлика од повеќето задачи од другите области, за кои често пати на пониските нивоа на натпревари постои алгоритам за нивно решавање, тоа не важи за логичките задачи. Сепат, постојат определеи методи кои овозможуваат полесно да се дојде до решението на определени класи логички задачи. Последното се однесува на принципот на Дирихле, методот на инваријанти, методот на доведување до противречност и некои други методи ко ќе ги користиме во решавањето на повеќе задачи кои следуваат.

1. Дадени се 2023 картички. На секоја картичка се запишани по неколку (барем два) различни природни броја. За две картички ќе велиме дека се *соседни*, ако најголемиот број на едната картичка е еднаков на најмалиот број на другата картичка. Докажи, дека ако нема соседни картички, тогаш сите броеви можат да се поделат на две групи така шро секоја картичка содржи барем по еден број од секоја група.
   Решение. Нека A е групата од најмалите броеви запишани на секоја картичка, а B е групата од сите други броеви. Да разгледаме произволна картичка и нека a и b се соодветно најмалиот и најголемиот број запишан на неа. Според изборот на a важи $a \in A$. Освен тоа, бидејќи нема соседни картички не е можно b кој е најголем број на една картичка да е најмал број на друга картичка, па затоа $b \notin A$, од каде следува дека $b \in B$.

2. Дадени се 9 парчиња кашкавал, меѓу кои нема две со еднакви маси. Дали може да се расече едно од парчињата така, што добиените 10 парчиња ќе можат да се поделат на две групи со еднакви маси, при што во секоја група има по 5 парчиња кашкавал?
   Решение. Да ги означиме масите на деветте парчиња со
   $$m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5 < m_6 < m_7 < m_8 < m_9 .$$
   Имаме
   $$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8$$

и

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 > m_2 + m_4 + m_6 + m_8 .$$

Затоа најголемото парче треба да го расечеме на две парчиња со маси x и y така, што

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + x = m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + y . \qquad (1)$$

Останува да провериме дали ова расекување е можно, односно дали x и y се позитивни броеви. Притоа имаме $x + y = m_9$, од каде добиваме $x = m_9 - y$ и ако замениме во (1), наоѓаме

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 - y = m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + y$$

$$y = \frac{1}{2}(m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 - (m_2 + m_4 + m_6 + m_8)) > 0$$

и

$$x = \frac{1}{2}m_9 + \frac{1}{2}(m_2 + m_4 + m_6 + m_8 - (m_1 + m_3 + m_5 + m_7)) > 0 .$$

3. Капетанот Кука и неговиот пеијател Смит имаат 2023 сандаци со богатство (сите се затворени). Секој сандак содржи определено количество злато и определено количество сребро при што вкупните количества се различни за секој сандак. Поделбата на златото и среброто Кука и Смит решиле да ја направат на следниов начин: Прво, капетанот Кука на Смит му кажува колку сандаци задржува за себе, а бидејќи е капетан може да задржи повеќе сандаци од Смит. Потоа тој ги отвара сите сандаци и решава кои сандаци ќе ги земе (внатре во секој сандак Кука има тајно запишано колку злато и колку сребро има). Кука сака да земе најмалку половина од златото и најмалку половина од среброто, но треба да внимава да побара најмал можен број сандаци за да Смит биде задоволен. Колку сандаци треба да земе Кука?

Решение. Сите сандаци имаат различни вкупни количества, но можат да содржат еднакви количества злато. Ќе докажеме дека 1012 сандаци се доволни за да Кука ја постигне целта. Сандаците ќе ги подредиме според количеството злато z_i, $i = 1, 2, ..., 2023$ во секој сандак:

$$z_1 \geq z_2 \geq ... \geq z_{2023}$$

и ќе ги поделиме во 1012 групи:

$$\{z_1\}, \{z_2, z_3\}, \{z_4, z_5\}, ..., \{z_{2022}, z_{2023}\} .$$

Од секоја група Кука избира сандак со повеќе сребро и така обезбедува да земе најмалку половина од среброто. Исто така неизбраниот сандак од секоја група има помлаку злато од избраниот сандак од

претходната група, што значи дека Кука ќе земе и најмалку половина од златото.

4. Во кутија има 15 црвени и 16 бели топки. Дозволени се следниве операции:
   - истовремено да се стават 2 црвени и 1 бела топка,
   - истовремено да се стават 1 црвена и 2 бели топки,
   - истовремено да се земат 2 црвени и 1 бела топка,
   - истовремено да се земе 1 црвена и да се стават 2 бели топки.

   Дали може во еден момент во кутијата да има 50 црвени и 37 бели топки?

   Решение. Нека се извршени соодветно a,b,c,d операции од четирите вида. Имаме

$$2a+b-2c-d=50-15=35,$$
$$a+2b-c+2d=37-16=21.$$

   Ако второто равенство го помножиме со 2 и од него го одземеме првото равенство, добиваме $3b+5d=7$, што не е можно.

5. Црнобрадиот пират разделил 2023 златници во N торбички, а торбичките ги ставил во M ковчежиња. Во секое ковчеже вкупно имало помалку од N златници. Дали е точно дека има торбичка со помалку од M златници во неа?

   Решение. Бројот на златниците во торбичката $1,2,...,N$ да го означиме со $a_1,a_2,...,a_N$, соодветно, а вкупниот број на златниците во ковчежето $1,2,...,M$ да го означиме со $b_1,b_2,...,b_M$, соодветно. Имаме

$$a_1+a_2+...+a_N=2023=b_1+b_2+...+b_M,$$

   при што по услов $b_i<N$ за $i=1,2,...,M$. Значи,

$$2023=b_1+b_2+...+b_M<N\cdot M. \qquad (1)$$

   Сега, ако во секоја торбичка има најмалку по M златници, т.е. ако $a_k\geq M$ за $k=1,2,...,n$, добиваме

$$2023=a_1+a_2+...+a_N\geq N\cdot M. \qquad (2)$$

   Од (1) и (2) следува $N\cdot M>N\cdot M$, што не е можно. Конечно, од добиената противречност следува дека има торбичка со помалку од од M златници во неа.

6. На таблата се запишани осум нули. Во секој чекор избираме четири од

броевите зпишани на таблата a,b,c,d и ги заменуваме со броевите $a+3,b+3,c+2,d+1$.

а) Кој е најмалиот број чекори потребен за да на таблата се добијат осум последователни цели броеви, запишани во некој редослед.

б) Дали може по неколку чекори на таблата да има осум броја чиј збир е 2023?

в) Дали може по неколку чекори производот на осумте броја да е еднаков на 2145?

Решение. а) По секој чекор сите броеви кои се запишани на таблата се ненегативни цели броеви. Бидејќи во секој чекор збирот на броевите се зголемува за $3+3+2+1=9$, а

$$0+1+2+3+4+5+6+7=32 \text{ и } 3\cdot 9<32$$

Заклучуваме дека три чекори не се доволни. Со четири чекори имаме:

$$(0,0,0,0,0,0,0,0)\to(1,2,3,3,0,0,0,0)\to(1,2,3,3,1,2,3,3)$$
$$\to(1,2,3,4,3,2,6,6)\to(1,2,3,4,6,5,7,8).$$

б) Збирот на почетно запишаните броеви е 0, а потоа со секој чекор истиот се зголемува за 9. Според тоа, деливоста со 9 на збирот е инваријанта. Но, $9\nmid 2023$, па затоа на таблата никогаш не може да се појават осум броја чиј збир е еднаков на 2023.

в) Имаме $2145=3\cdot 5\cdot 11\cdot 13$, па затоа на таблата мора да има најмалку 4 единици. Ако има точно 4 единици, тогаш броевите се 1, 1, 1, 1, 3, 5, 11, 13 чиј збир е 36 и затоа се потребни точно 4 чекори. Меѓутоа, $4\cdot 3=12<13$, па затоа бројот 13 не може да се добие со помош на 4 чекори. Случаите со 5 единици не се можни, бидејќи го тој случај збирот на осумте броја треба да е еден од броевите: 44, 56, 60, 76, 84, 156, кои не се деливи со 9. Не е можно на таблата да се појават 6 или повеќе единици, бидејќи по првиот чекор најмалку три броја се поголеми или еднакви на 2. Според тоа, не е можно производот на осумте броја да е 2145.

7. Од подредената четворка природни броеви (a,b,c,d) во еден чекор може да се добие секоја од четворките

$$(c,d,a,b);\ (b,a,d,c);\ (a+nc,b+nd,c,d);\ (a+nb,b,c+nd,d),$$

каде n е произволен природен број, кој може да се менува во различните чекори. Дали може со неколку чекори од четворката $(1,2,3,4)$ да се добие четворката $(3,4,5,7)$.

Решение. За апсолутната вредност на разликата на производот на

првиот и четвртиот, односно вториот и третиот член на секоја од петте подредени четворки има

$$\begin{aligned}|ad-bc| &= |cb-da| = |bc-ad| \\ &= |(a+nc)d-(b+nd)c| \\ &= |(a+nb)d-b(c+nd)|,\end{aligned}$$

што значи дека таа е инваријанта. Но, $|1\cdot 4-2\cdot 3| = 2 \neq 1 = |3\cdot 7-4\cdot 5|$, па затоа со повеќекратна примена на дозволените операции не може од четворката $(1,2,3,4)$ да се добие четворката $(3,4,5,7)$.

8. Дадени се 10 топки од кои една е радиоактивна. Располагаме со уред, со кој може да се определи дали меѓу дадени топки има радиоактивна. Определи го најмалиот број мерења потребни да се определи радиоактивната топка.

Решение. Да ги означиме топките со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 и да ги поделиме во две групи, прва: 1, 2, 3, 4 и 5; втора: , 6, 7, 8, 9 и 10. Со првото мерење определуваме во која група е радиоактивната топка и без ограничување на општоста да земеме дека таа е во првата група. Топките 1, 2, 3, 4 и 5, ги делиме во две групи прва: 1, 2 и 3; втора 4 и 5. Со второто мерење определуваме во која група е раиоактивната топка. Во најлош случај радиоактивната топка може да е во првата група. Сега ни се потребни уште две мерења за да определиме која од топките 1, 2 или 3 е радиоактивна. Значи, потребни се најмалку четири мерења.

9. Во низа се наредени дваесет наизглед еднакви златници. Два соседни златника се со маси 9 и 11 (во овој редослед одлево-надесно), а сите останати златници се со маса 10 грама. Определи го златникот со маса 11 грама со три мерења на вага без тегови.

Решение. Златниците да ги нумерираме со броевите 1, 2, 3, ...,20 и при првото мерење ги мериме златниците со броевите 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 (група А) и златниците со броевите 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 (група Б). Бидејќи златниците со маси 9 и 11 се соседни, тие не може да се во една иста група. Затоа, ако вагата е во рамнотежа, тогаш златниците со маси 9 и 11 грама се златниците 19 и 20. Со едно мерење на златниците 19 и 20 го определуваме потешкиот златник и тој е бараниот златник од 11 грама.

Ако групата А е потешка (соодветно полесна) од групата Б, тогаш златникот со маса 9 грама е во групата Б (соодветно во групата А).

Според тоа, знаеме дека златникот од 9 грама е во група од девет златници и е полесен од другите златници во оваа група. Сега со две мерења на стандардниот начин со поделба во три групи од по три златници го определуваме златникот од 9 грама. Со тоа е определен и златникот од 11 грама, кој е следен во низата.

10. Имаме 10 монети меѓу кои има точно две фалшиви. Од избрани три монети детектор посочува една монета, при што не посочува исправна монета ако меѓу трите монети има барем една фалшива. Како со помош на три мерења со детекторот може да се определат двете фалшиви монети?

Решение. Прво со детекторот ги мериме монетите 1, 2, 3, потоа монетите 4, 5, 6, па монетите 7, 8, 9. Без ограничување на општоста нека детекторот ги посочил монетите 1, 4 и 7. Меѓу монетите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 сигурно една монета е фалшива, па затоа меѓу посочените монети 1, 4 и 7 има една фалшива и сега со четвртото мерење реализирано со овие три монети определуваме една фалшива монета. Повторно, без ограничување на општоста нека тоа е монетата 1.

Понатаму, втората фалшива монета може да биде меѓу монетите 2 или 3, меѓу монетите 4 или 7, и монетата 10. Истата ќе ја определиме ако прво со детекторот ги мериме монетите 2, 3 и 4, а потоа посочената монета ја мериме заедно со монетите 7 и 10. Јасно, последнта посочена монета е втората неисправна монета.

11. Куп камења (со евентуално различни маси) може да се поделат на 2015 купчиња со еднакви маси, како и на 2016 купчиња со еднакви маси. Кој е најмалиот можен број камења во големото купче? (Дозволени се купчиња со по еден камен.)

Решение. Една можност е големиот куп да има 2015 камења со маса по $1\,g$ и 2015 камења со маса по $2015\,g$. Така во случај на 2015 купчиња за секое купче земаме по еден камен од сдвата вида, а во случај на 2016 купчиња сите камења од по $1\,g$ ги ставаме на едно купче, а преостанатите купчиња се со по еден голем камен. Во овој случај имаме 4030 камења.

Ако земеме помалку од 4030 камења, тогаш при распределбата на 2015 купчиња едното од нив ќе биде само од еден камен. Ако масата на секое купче при распределбата на 2015 купчиња е a, тогаш масата на тој камен ќе биде еднаква на a, а масата на сите камења ќе биде

$2015a$. Сега, при распределбата на 2016 купчиња масата на секое купче ќе биде b, а масата на сите камења ќе биде $2016b$. Значи, $2015a = 2016b$, односно $b = \frac{2015}{2016}a < a$, а при втората распределбата купчето во кое е каменот со маса a треба да има маса $b \geq a$, што е противречност.

12. Во пет петнаесетлитарски кофи има соодвено 1, 2, 3, 4 и 5 литри вода. Дозволена операција е да се утростручи количеството вода во било која кофа така што во неа ќе се претури потребното количество вода од точно еден друг сад. Кое е најголемото количество вода кое со повеќекратна примена на дозволената операција може да се претури во една од кофите?

Решение. Може да добиеме 12 литри вода во една од кофите на следниот начин:

$$(1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5) \to (1;\ 6;\ 3;\ 4;\ 1) \to (1;\ 0;\ 9;\ 4;\ 1) \to (1;\ 0;\ 1;\ 12;\ 1).$$

Понатаму, да забележиме дека по првиот чекор од дозволеното прелевање на вода во некоја од кофите, количеството вода во таа кофа е број делив со 3. Затоа, ако максимумот на е 12, тогаш тој мора да е еднаков на 15. Но, за да во една кофа се добијат 15 литри вода потребно е од друг кофа да се претурат 10 литри вода во кофа во која веќе има 5 литри вода. Последното не е можно, бидејќи не можеме да добиеме кофа со 10 литри вода, затоа што бројот 10 не е делив со 3, а на почетокот немаме кофа со 10 литри вода.

13. На еден математички конгрес меѓу научниците има пријатели (пријателството е симетрична релација). Се покажало дека секои двајца научници, кои имаат еднаков број пријатели, немаат заеднички пријател. Докажи дека постои научник кој има само еден пријател?

Решение. *Прв начин*. Избираме научник кој има најголем број пријатели и нека нивниот број е n. Да претпоставиме дека меѓу пријателите на A не постои научник кој има точно еден пријател. Тогаш секој од овие n научници може да има $2,3,...,n$ пријатели. Значи, имаме n научници, а $n-1$ можности за бројот на пријатели, па од принципот на Дирихле следува дека постојат двајца научници кои имаат еднаков број пријатели. Но, научникот A е заеднички пријател на овие двајца научници, што противречи на условот на задачата. Од добиената противречност следува дека меѓу пријателите на A постои

научник кој има само еден пријател, т.е. кој е пријател само со A, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека A е научник со најголем број пријатели $B_1, B_2, ..., B_k$ и B_i, $1 \le i \le k$ познава $n_i \ge 1$ научници. Ако $k = 1$, тогаш задачата е решена. Нека $k \ge 2$. Секои двајца научници од $B_1, B_2, ..., B_k$ имаат заеднички пријател A, па од условот следува дека броевите $n_1, n_2, ..., n_k$ се по парови различни. Од друга страна A е научник со најголем број пријатели и тој број е еднаков на k, па затоа $n_1, n_2, ..., n_k$ се од множеството $\{1, 2, ..., k\}$, т.е. тоа се броевите $1, 2, ..., k$ во некој редослед. Оттука следува дека $n_i = 1$ за некој i, со што задачата е решена.

14. На олимпијадата Математички талент бројот на учениците бил повеќе од k пати поголем од бројот на зададените задачи. По прегледувањето се покажало, дека секој од учениците решил барем една задача. Докажи дека постои ученик, таков што секоја задача која ја решил е решена барем од k други ученици.

Решение. Нека на олимпијадата се зададени n задачи. Тоа значи дека бројот на учениците е најмалку $nk + 1$. Понатаму, секој ученик решил барем една задача, што значи дека имаме најмалку $nk + 1$ решенија на задача. Затоа од принципот на Дирихле следува дека постои задача која е решена од најмалку од $k + 1$ ученици. Нека бројот на тие задачи е еднаков на m и без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се задачите $1, 2, ..., m$. Случајот $m = n$ е очигледен. Нека $m < n$. Ќе докажеме дека постои ученик кој не решил ниту една од задачите $m + 1, m + 2, ..., n$. Да претпоставиме дека, секој ученик решил барем една од овие задачи. Тогаш барем една од овие задачи е решена од барем $k + 1$ ученик, бидејќи во спротивно бројот на учениците ќе биде најмногу $k(n - m)$, т.е помалку од $nk + 1$, што е противречност.

Конечно, ученикот кој не решил ниту една од задачите $m + 1, m + 2, ..., n$ решил само од задачите $1, 2, ..., m$, а секоја од нив е решена од најмалку $k + 1$ ученици, односно од k други ученици.

15. Осум ученици решавале 8 задачи. Ако секоја задача е решена од 5 ученици, докажи дека постојат два ученика така што секоја задача е решена барем од едниот од нив. Ако секоја задача е решена од 4

ученици, тогаш може да нема такви два ученика.

Решение. Ако има ученик кој решил 6 задачи, тогаш бидејќи секоја од преостанатите две задачи е решена од 5 учениции и $8 < 5 + 5$, од принципот на Дирихле следува дека постои ученик кој ги решил и двете задачи. Ако секој ученик решил најмногу 5 задачи, тогаш бидејќи решенијата се точно 40 (секоја од 8-те задачи е решена од 5 ученици), заклучуваме дека секој ученик решил точно 5 задачи. Нека првиот ученик ги решил задачите 1, 2, 3, 4, 5. Ако секој од преостанатите 7 ученици решил најмногу две од преостанатите три задачи (задачите 6, 7, 8), тогаш секој од нив репул барем три од првите пет задачи. Но, тогаш бројот на решенијата на првите пет задачи е $5 + 7 \cdot 3 = 26$, што противречи дека секоја од овие задачи е решена од 5 ученици, т.е. вкупниот број решенија на овие задачи е $5 \cdot 5 = 25$. Од добиената противречност следува дека мешу преостанатите 7 ученици постои ученик тој ги решил задачите 6, 7 и 8. Овој ученик и првиот ученик заедно ги решиле сите задачи.

Ако секоја задача е решена од 4 ученици во долната табела е даден пример (колоните соодветствуваат на задачите, а редовите на учениците) кој покажува дека може да нема два ученика кои ги решиле сите задачи.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+	+	–	–	–	+	+	–
2	+	+	–	–	–	+	+	–
3	+	+	–	–	+	–	–	+
4	+	+	–	–	+	–	–	+
5	–	–	+	+	–	–	+	+
6	–	–	+	+	–	–	+	+
7	–	–	+	+	+	+	–	–
8	–	–	+	+	+	+	–	–

16. Дадени се 26 тегови со маси 1, 2, 3, ..., 26 грама и вага. Велиме дека неколку од теговите формираат добро множество, ако како и да се постават дел од нив (или сите) на вагата, тие не се во рамнотежа. (На пример, теговите 1, 2, 4, 8, 16 формираат добро множество, додека множеството од теговите 2, 7, 8, 15, 25 не е добро, бидејќи $7 + 8 = 15$.) Најди добро множество со 6 тегови и докажи дека не постои добро множество со 7 тегови.

Решение. Непосредно се проверува дека теговите 4, 5, 10, 23, 25, 26

формираат добро множество. Нека претпоставиме дека постои добро множество со 7 тегови. Збирот на четирите најголеми броеви е $23+24+25+26=98$, но заради $23+26=24+25$ сите овие броеви не може да се елементи на добро множество. Затоа, ако постои добро множество со 7 елементи, тогаш збирот на броевите во неговите подмножества со 1, 2, 3 или 4 елементи ќе биде број од 1 до 97. Имаме 7 подмножества со 1 елемент, 21 подмножество со 2 елементи, 35 подмножества со 3 елементи и 35 подмножества со 4 елементи,т.е. вкупно $7+21+35+35=98>97$ различни збирови, што е противречност.

17. За Денот на математиката секој ученик кој членувал во Математичката секција донел по две тортички и ги ставил на масата. Кога дошла учителката, која донела сок и чинии, таа ги ставила тортичките по две во чинија. Докажи дека учителката може да ги даде чиниите така, што барем една од тортичките во секоја чинија е на ученикот кој ја донел.
Решение. Ако имаме само еден ученик, тој ќе ги добие тортичките кои ги донел и задачата е решена. Нека најмалиот број за кој учителката не може да ја реши задачата (да даде на секој ученик чинија со тортичка која ја донел) е N. Земаме произволна чинија и прашуваме кој ги донел тортичките кои се во неа. Ако ученикот A донел барем една од двете тортички му ја даваме чинијата. Потоа го бараме ученикот B, кој ја донел втората тортичка во првата чинија (тој ученик не е A, бидејќи тогаш за преостанатите $N-1$ ученици не постои бараната распределба, што противречи на минималноста на N), ја наоѓаме другата чинија, во која се наоѓа втората тортичка на B и му ја даваме таа чинија на ученикот B. Потоа го бараме ученикот C која ја донел втората тортичка во втората чинија итн. додека е можно. Ако оваа постапка продолжи до N ние сме ги дале сите тортички, а ако прекине порано, сме нашле множество со помалку од N ученици, на кои учителката не може да ги даде тортичките на саканиот начин, што противречи на минималноста на N.

18. Докажи дека во $n-$аголник M може да се повлечат најмногу $n-3$ дијагонали секоја од кои исцело лежи во M и никои две дијагонали не се сечат.
Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n\geq 3$. За $n=3$ тврдењето еочигледно. Нека тврдењето е точно за секој $n\leq k$, каде k

е природен број. Да разгледаме произволен $(n+1)$ – аголник M и нека XY е негова дијагонала, која исцело лежи во M. Оваа дијагонала го дели M на два многуаголника. Да ги означиме броевите на темињата на тие многуаголници со p и q. Бидејќи X и Y се бројат два пати имаме $p+q=n+3$. Бидејќи $p<n+1$ и $q<n+1$, добиваме дека $p\le n$ и $q\le n$, па од индуктивната претпоставка следува дека во двата многуаголника можат да се повлечат најмногу $p-3$ и $q-3$ дијагонали секоја од кои лежи во соодветниот делбен многуаголник и никои две не се сечат. Според тоа, во M може да се повлечат најмногу $p-3+q-3+1=p+q-5=n+3-5=(n+1)-3$ дијагонали, т.е. тврдењето важи за $k=n+1$, со што индуктивниот доказ е завршен.

19. На шаховски турнир учествуваат n шахисти од земјата A и n шахисти од земјата B. Се покажало дека, како и да се формираат n парови, секој од кои има по еден шахист од земјата A и еден шахист од земјата B, тогаш барем во еден пар шахистите се познаваат. Докажи, дека може да се изберат a шахисти од земјата A и b шахисти од земјата B така што $a+b>n$ и секој од тие a шахисти се познава со секој од тие b шахисти.

Решение. Да ги означиме шахистите од земјите A и B со $1,2,...,n$ и да формираме $n\times n$ табела M од броевите 0 и 1, така што во пресекот на $i-$тиот ред и $j-$тата колона ставаме број 0 или 1 во зависност дали играчот i од A не се познава со играчот j од B, или обратно. Од условот на задачата следува дека како и да избереме n квадратчиња во M, такви што никои две не лежат во ист ред или во иста колона, тогаш барем во едно од овие квадратчиња е запишан бројот 1. Тоа значи дека сите нули може да бидат покриени со најмногу $n-1$ линија. Нака се тоа k редови и $n-k-1$ колона. Но, тоа значи дека пресекот на преостанатите $n-k$ редови и $k+1$ колона се состои само од единици, со што тврдењето е докажано.

Забелешка. Тврдењето може да се докаже и со пмош на математичка индукција. Обиди се тоа самостојно да го направиш.

20. Во координатната рамнина се дадени n еднакви квадрати, чии страни се паралелни со координатните оски. Ако за секои два од дадените квадрати постои точка, која е внатрешна за двата квадрати, докажи,

дека сите n квадрати имаат заедничка точка.

Решение. Нека претпоставиме дека сите квадрати се сместени во првиот квадрант и имаат должина на страна 1. Го наоѓаме квадратот P со долната страна најблиска до оската Ox и низ таа страна повлекуваме права p. Го наоѓаме квадратот Q со десната страна најдалеку од оската Oy и низ таа страна повлекуваме права q. Го наоѓаме квадратот R со левата страна најблиску до оската Oy и низ таа страна повлекуваме права r. Го наоѓаме квадратот S со горната страна најдалеку од оската Ox и низ таа страна повлекуваме права s. Ако повеќе квадрати имаат некое од горните четири својства, тогаш избираме еден од квадратите кои го имаат соодветното својство. Четирите прави p,q,r,s определуваат правоаголник T со центар во точката O, во кој се сместени сите дадени квадрати. Секоја од страните на правоаголникот T е со должина помала од 2, бидејќи во спротивно квадратите P и S или квадратите Q и R нема да имаат заедничка внатрешна точка. Останува да докажеме дека секој од дадените квадрати го содржи центарот O на правоаголникот T. Нека квадратот K не го содржи центарот O. Бидејќи должината на страната на K е 1, а секоја од страните на T е помала од 2, заклучуваме дека K не се содржи исцелово T, што е противречност.

На крајот од ова наше дружење вои предлагаме самостојно да ги решите следниве задачи.

21. Во едно одделение има 32 ученика, секој од кои членува во една или неколку од 33 секции кои постојат во училиптето. Познато е дека во секоја секција членуваат барем три ученици од одделението и дека нема две секции во кои членуваа едни и исти ученици од ова одделение. Докажи дека постојат две секции во кои членува точно еден ученик од оваа одделение.

22. Киро секој ден решава најмалку по една задача, но за да не се преморува тој за десет дена решава најмногу 15 задачи. Докажи дека постојат неколку последователни денови во кои Киро решил точно 200 задачи.

23. На масата има 81картичка, на кои се напишани броевите од 1 до 81, на

секоја картичка по еден број, и кои се завртени со броевите надолу. Горјан знае на која картичка кој број е запишан. Во еден чекор Андреј покажува 9 картички и Горјан му одговара како се тие наредени и по големина на запишаните броеви. Дали може со 11 такви чекори Андреј да определи на која картичка е бројот 1, на која е бројот 2, на која е бројот 3 и на која е бројот 4?

24. На таблата се запишани позитивните броеви a,b,c. Можеме да го замениме бројот a со $\frac{1}{ab+ac}$, бројот b со $\frac{1}{ba+bc}$, бројот c со бројот $\frac{1}{ca+cb}$. Дали може по неколку такви замени тројката броеви 1, 2, 3 да се замени со тројката броеви 2, 3, 4.

Литература

1. Stojanović, V.: Matematiskop 2 – Put do šampiona matematike za sedmi i osmi razred, Matematiskop, 2017
2. Малчески, Р., Тошиќ, Р., Б.Варга, Ј., Малчески, С.: Математички талент 27 – 94 групи варијации на 94 теми, Математички талент, Скопје, 2022
3. Малчески, Р.:Метод на инваријанти 1, 2, Нумерус, (Математички талент), Скопје, 2021
4. Малчески, С., Малчески, Р.: Принцип на Дирихле 1, 2, Математички талент, Скопје, 2021
5. Малчески, С.: Јуниорски балкански математички олимпијади 1997-2021, Математички талент, Скопје, 2021
6. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, 1994, Скопје