

ММО 2000

1. Тетива CD на кружница со центар O е нормална на дијаметар AB . Тетива AE го сече радиусот CO во точка M и тетивата DE ја сече тетивата BC во точка N . Докажи дека $\frac{CM}{CO} = \frac{CN}{CB}$.

Решение. Од $CD \perp AB$ и AB е дијаметар следува $\overline{AC} = \overline{AD}$. Затоа

$$\angle AEC = \angle AED. \quad (1)$$

Понатаму,

$$\angle AEC = \angle ABC, \quad (2)$$

$$\angle ABC = \angle OCB \quad (3)$$

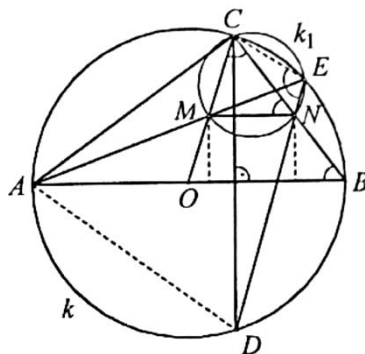
Сега, од (1), (2) и (3) следува

$$\angle MCN = \angle MEN,$$

па затоа точките M, C, E, N лежат на иста кружница k_1 . Според тоа,

$$\angle MNC = \angle MEC \text{ и } \angle MEC = \angle OBC,$$

па затоа $\angle MNC = \angle OBC$. Од последното равенство и од тоа што $\angle MCN$ е заеднички за триаголниците MNC и OBC следува $\triangle MNC \sim \triangle OBC$, па затоа важи $\frac{CM}{CO} = \frac{CN}{CB}$.



2. Определи на најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2) \dots (a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})},$$

каде $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви.

Решение. Ќе бараме најмала можна вредност на изразот

$$\frac{(1+a_1)(a_1+a_2) \dots (a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (*)$$

Имаме

$$\frac{(1+a_1)(a_1+a_2) \dots (a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n} = (1+a_1)\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right) \dots \left(1+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\left(1+\frac{2^{n+1}}{a_n}\right).$$

Воведуваме смени $x_1 = a_1, x_2 = \frac{a_2}{a_1}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{a_n}$. Значи, бараме најмала вредност на изразот

$$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}), \quad (**)$$

каде $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} = 2^{n+1}$. Притоа,

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_{n+1}) &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} + \sum_{\substack{k=1 \\ i < k}}^{n+1} x_i x_k + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n+1} \\ &\geq 1 + \binom{n+1}{1} \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} + \binom{n+1}{2} \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} + x_1 x_2 \dots x_{n+1} \\ &= (1 + \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}})^{n+1} = (1 + \sqrt[n+1]{2^{n+1}})^{n+1} = 3^{n+1}. \end{aligned}$$

Според тоа, најмалата можна вредност на изразот (**) е 3^{n+1} и таа се достигнува за $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1} = 2$. Тоа значи дека најголемата можна вредност на изразот (*) е $\frac{1}{3^{n+1}}$ и истата се достигнува за

$$a_1 = 2, a_2 = 2^2, a_3 = 2^3, \dots, a_n = 2^n.$$

3. Нека a, b, c е должините на страните на триаголникот ABC , t_a, t_b, t_c се соодветно должините на тежишните линии повлечени кон страните и d е должината на дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Докажи дека

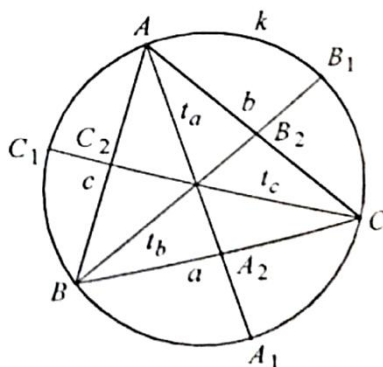
$$\frac{a^2+b^2}{t_c} + \frac{b^2+c^2}{t_a} + \frac{c^2+a^2}{t_b} \leq 6d. \quad (*)$$

Решение. Нека AA_2, BB_2, CC_2 се тежишните линии во триаголникот ABC , а A_1, B_1, C_1 се соодветно нивните пресечни точки со опишаната кружница околу триаголникот (цртеж десно). Јасно,

$$\overline{AA_1} \leq d, \overline{BB_1} \leq d, \overline{CC_1} \leq d,$$

т.е.

$$\begin{aligned} t_a + \overline{A_1A_2} &\leq d, \\ t_b + \overline{B_1B_2} &\leq d, \\ t_c + \overline{C_1C_2} &\leq d. \end{aligned} \quad (1)$$



Понатаму, од степенот на точката A_2 во однос на точките во однос на кружницата k следува $\overline{BA_2} \cdot \overline{A_2C} = \overline{AA_2} \cdot \overline{A_2A_1}$, т.е. $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = t_a \cdot \overline{A_2A_1}$, па затоа $\overline{A_2A_1} = \frac{a^2}{4t_a}$. Аналогно се добива $\overline{B_2B_1} = \frac{b^2}{4t_b}$ и $\overline{C_2C_1} = \frac{c^2}{4t_c}$. Со замена во (1) и собирање на неравенствата добиваме

$$\frac{4t_a^2+a^2}{4t_a} + \frac{4t_b^2+b^2}{4t_b} + \frac{4t_c^2+c^2}{4t_c} \leq 3d. \quad (2)$$

Но, $4t_a^2+a^2=2b^2+2c^2$, $4t_b^2+b^2=2c^2+2a^2$, $4t_c^2+c^2=2a^2+2b^2$, па ако замениме во (2) го добиваме неравенството (*).

4. Нека a, b се природни броеви такви што $\text{NZD}(a, b) = 1$. Докажи дека бројот на природни броеви n за кои равенката $ax + by = n$ нема решение $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е еднаков на $\frac{(a+1)(b+1)}{2} - 1$.

Решение. Од $\text{NZD}(a, b) = 1$ следува дека равенката $ax + by = 1$ има решение $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$ равенката

$$ax + by = n \quad (1)$$

има решение $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Лема 1. За секој $n > ab$ равенката (1) има решение $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, за $n = ab$ равенката (1) нема решение $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Доказ. Нека $n > ab$ и $ax' + by' = n$, $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ако $ax + by = n$, $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, тогаш $a(x - x') + b(y - y') = 0$, па од $\text{NZD}(a, b) = 1$ следува $b \mid x - x'$. Нека $x - x' = bt$, за некој $t \in \mathbb{Z}$. Тогаш од $abt + b(y - y') = 0$ следува $y - y' = -at$. Според тоа, општото решение на (1) во множеството цели броеви е $(x' + at, y' - bt)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Избираме $t^* \in \mathbb{Z}$ таков што $0 < y' - at^* \leq a$. Ваков t^* постои и тогаш $x' + bt^* > 0$. Навистина,

$$a(x' + bt^*) = n - b(y' - at^*) \geq n - ab > 0.$$

Јасно, $(x' + bt^*, y' - at^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и е решение на (1).

Нека $ax + by = ab$ за некои $x, y \in \mathbb{N}$. Тогаш $b \mid x$, па затоа $ax > ab$. Значи, $by = ab - ax < 0$ и како $b > 0$, добиваме $y < 0$, противречност. ■

Лема 2. Нека $ax + by < ab$, $x, y \in \mathbb{N}$ и нека $x', y' \in \mathbb{N}$ се такви што $ax + by = ax' + by'$. Тогаш $x = x'$ и $y = y'$.

Доказ. Од равенството $ax + by = ax' + by'$ следува $a(x - x') = b(y - y')$, што значи $b \mid x - x'$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq x'$. Ако $x > x'$, тогаш $x \geq x' + b$, па затоа

$$ax + by \geq ax' + ab + by > ab,$$

што е противречност. ■

Од претходните разгледувања следува дека ако за некој природен број $n < ab$ равенката (1) има решение во множеството $\mathbb{N}$, тогаш тоа решение е единствено. Затоа за да го најдеме бројот на природните броеви $n < ab$ за кои (1) има решение во множеството $\mathbb{N}$, доволно е да го најдеме бројот на парови природни броеви (x, y) такви што $ax + by < ab$.
Нека

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, ax + by < ab\}.$$

Ќе го определиме бројот на елементите на A . Нека $(x, y) \in A$. Вредностите што може да ги прими y се $1, 2, \dots, a-1$. За фиксиран број $y \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ ќе ги определиме сите вредности x од $\mathbb{N}$ за кои $ax + by < ab$. Бидејќи $by < ax + by < ab$, добиваме $0 < ax < (a-y)b$, од каде следува $x \in \{1, 2, \dots, [\frac{(a-y)b}{a}]\}$. Понатаму, ако $y \in \{1, 2, \dots, a-1\}$, тогаш $a-y \in \{1, 2, \dots, a-1\}$. Според тоа, бројот на елементите на A е еднаков на $\sum_{i=1}^{a-1} [\frac{ib}{a}]$. Слично, ако разгледуваме кои вредности може да ги прими

x ќе добиеме дека бројот на елементите на A е еднаков на $\sum_{i=1}^{b-1} [\frac{ia}{b}]$.

Значи $\sum_{i=1}^{a-1} [\frac{ib}{a}] = \sum_{i=1}^{b-1} [\frac{ia}{b}]$. (Последното равенство важи за секои $a, b \in \mathbb{N}$.)

Останува да го пресметаме збирот $\sum_{i=1}^{a-1} [\frac{ib}{a}]$. Јасно, за $a=b=1$ тврдењето

на задачата е точно, па затоа бараниот збир ќе го пресметаме за $0 < b < a$. Ќе ја определиме најголемата вредност која може да ја прими $[\frac{ib}{a}]$ за $i=1, 2, \dots, a-1$. Бидејќи

$$ab > (a-1)b = ab - b > ab - a = a(b-1),$$

добиваме дека $[\frac{(a-1)b}{a}] = b-1$. Според тоа, за $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ имаме $[\frac{ib}{a}] \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Нека $k \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ е дадено. Ќе разгледаме за колку индекси $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ е исполнето равенство $[\frac{ib}{a}] = k$. Од $\text{NZD}(a, b) = 1$ следува дека $\frac{ib}{a}$ не е природен број, па затоа ги определуваме оние вредности $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ за кои што

$$ka < ib < (k+1)a. \quad (2)$$

Нека $i_{\min}^{(k)}$ е најмалиот $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ таков што $ka < ib$. Значи,

$$ka < i_{\min}^{(k)}b, \quad ka > (i_{\min}^{(k)} - 1)b \quad \text{и} \quad i_{\min}^{(k)} > \frac{ka}{b}, \quad i_{\min}^{(k)} < \frac{ka}{b} + 1,$$

односно

$$i_{\min}^{(k)} = [\frac{ka}{b}] + 1. \quad (3)$$

Нека $i_{\max}^{(k)}$ е најголемиот $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ таков што $ib < (k+1)a$. Од (3) следува дека за $k \in \{1, 2, \dots, b-2\}$ важи $i_{\max}^{(k)} = \lfloor \frac{(k+1)a}{b} \rfloor$, што значи дека $i_{\max}^{(k)} = i_{\min}^{(k+1)} - 1$. За $k = b-1$ добиваме $i_{\max}^{(b-1)} = a-1$. Значи, бројот на индексите $i \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ за кои важи (3) е еднаков на

$$i_{\max}^{(k)} - i_{\min}^{(k)} + 1, \text{ т.е. } i \in \{i_{\min}^{(k)}, i_{\min}^{(k)} + 1, \dots, i_{\max}^{(k)}\}.$$

Воведуваме ознаки $c_k = \lfloor \frac{ka}{b} \rfloor$, $k = 1, 2, \dots, b-1$, $c_b = a-1$. Притоа важи

$$i_{\max}^{(k)} - i_{\min}^{(k)} + 1 = c_{k+1} - c_k. \text{ Значи,}$$

$$\sum_{i \in \{i_{\min}^{(k)}, i_{\min}^{(k)} + 1, \dots, i_{\max}^{(k)}\}} \lfloor \frac{ib}{a} \rfloor = k(c_{k+1} - c_k).$$

Оттука

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{a-1} \lfloor \frac{ib}{a} \rfloor &= \sum_{k=1}^{b-1} k(c_{k+1} - c_k) \\ &= (b-1)c_b - (c_{b-1} + c_{b-2} + \dots + c_1) \\ &= (a-1)(b-1) - \sum_{i=1}^{b-1} \lfloor \frac{ia}{b} \rfloor. \end{aligned}$$

Бидејќи $\sum_{i=1}^{a-1} \lfloor \frac{ib}{a} \rfloor = \sum_{i=1}^{b-1} \lfloor \frac{ia}{b} \rfloor$, добиваме

$$\sum_{i=1}^{a-1} \lfloor \frac{ib}{a} \rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Конечно, бројот на природните броеви n за кои равенката (1) нема решение во множеството природни броеви е еднаков на

$$ab - \frac{(a-1)(b-1)}{2} = \frac{(a+1)(b+1)}{2} - 1.$$