# Konačnost šaha

*Siniša Režek, Zagreb*

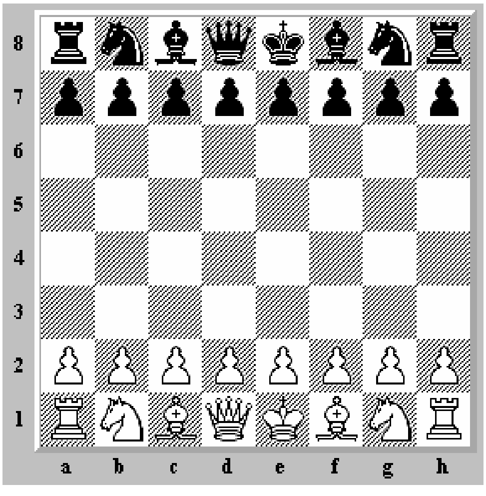
Nijedna igra nema toliko raznih aplikacija i uspoređenja kao šah; sport, umjetnost, strategija, filozofija, kultura, geometrija, sve su to derivati šaha, dapače Dufrense, otkriva šah kao "posebnu prostornu znanost", probleme šaha uspoređuje s poezijom, estetikom igre, a i s fizikom ("otkrito" je, da sistem konjeva skoka ima primjene u kristalografiji!).

Teško je šah uspoređivati s bilo čime, pa niti s matematikom, jedino se mogu razni problemi šaha i šahovske ploče sekundarno pokazati egzaktno s posebnim matematičkim izvodima, koji su vezani uz svoje postulate, odnosno pravila šahovske igre.

Iako takvi matematičari, kako kaže Schopenhauer, "liče čovjeku, koji si reže zdravu nogu, da si umetne drvenu", ipak su se Euler, Leibnity, Gauss, Moivre, Lucas, Bertrand, Landau, Jaenisch, bavili zanimljivim zadacima šaha, kao što su problemi osam i pet dama, te problem konjićevog skoka. Oni su još do danas ostali kao nepotpuno riješeni problemi. Većina njihovih rješenja bila su vezana za šahovsku ploču, i rezultati nisu imali općeniti oblik, već su izvođeni putem duhovitih proba i algoritamskih jednadžbi. Svi su ti problemi vrlo raznoliki i idu od prvog poznatog zadatka Sissa ben Dahira o količini žita, koje se udvostručuje na svakom polju šahovske ploče, pa do najnovijih zadataka u vezi s računom vjerojatnosti, konstrukcijskih analiza normalnog i višedimenzionalnog šaha.

Postoje dva osnovna oblika u pogledu djelovanja šahovskih figura: statički i dinamički, tj. postavljanje i gibanje figura ili pozicija i partija.

Od mnoštva zanimljivih izvoda i zadataka ovih oblika, u kojima se mnogi mogu obuhvatiti jednadžbama općenitog oblika, obradit ću u ovom prikazu dva najzanimljivija i najznačajnija problema, tj. proračuna broja svih pozicija i partija.



Za rješenje ovog pitanja važno je pronaći onaj broj figura, kod kojeg nastaje najveći broj postava. Na prvi se pogled čini, da maksimalni broj nastaje kod postave s 32 figure, no zbog smetnja pješaka, koji imaju razmjerno mali broj različitih postava, a veliku zakrčenost, suma se gubi u odnosu prema drugim postavama.

$$S_{32} = \binom{64-16}{14} \cdot \frac{14!}{2!^6} \cdot 15^5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (64-31) \cdot \frac{1}{2} \cdot (64-31) \approx 10^{32}. \qquad (1)$$

Kod ovog izraza binomni koeficijent ima značenje svih kombinacija grupe od 14 figura (bez kraljeva!) na raspoloživih 48 polja; drugi član znači sve permutacije 14 elemenata od 8 vrsti (bijela i crna dama, top, lovac, skakač); sljedeća tri člana prikazuju broj svih postava pješaka (počevši od pozicije, kad su sve figure u mogućnosti potpunog razvoja!); dok posljednji članovi označuju dodatak na postave oba kralja, gdje popravni koeficijenti ($\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$) oslabljuju ova gibanja kod onih slučajeva, kada su oba kralja u šahu ili u nemogućoj poziciji.

Praktično maksimum se nalazi kod postava s 28 figura i to nakon gubitka 4 pješaka, koji onemogućuju promociju ostalih 12 na posljednjim linijama:

$$S_{28} = \binom{64}{28} 8^{26} \cdot \frac{1}{2} \cdot (64-27) \cdot \frac{1}{5} \cdot (64-27) \approx 2 \cdot 10^{43}. \qquad (2)$$

Binomni koeficijent ima značenje kao gore, dok drugi član sadrži osim permutacija raznih vrsta figura (isto bez kraljeva) i razne promjene promoviranih pješaka; dok posljednji članovi znače broj gibanja kralja s pooštrenim koeficijentima nemogućih postava.

Drugi dio izraza nešto je prevelik, jer sadrži veći broj promocija, nego li je praktički moguće (npr. 26 figura iste vrste), no ta pogreška nimalo ne utječe na rezultat, jer te pozicije s većim brojem promocija iste vrste figura imaju vrlo mali broj permutacija.

Taj maksimum je istodobno maksimum za sve postave, jer se ostale pozicije gube u tom izrazu, tako npr. sljedeći najveći broj pozicija s 27 figura ima $5 \cdot 10^{40}$ postava.

Pitanje maksimalnog broja korektnih pozicija pokušavao je rješavati 1895. godine matematičar L. Schuring, dobivši sumu od $10^{51}$, što nije nikako ispravno jer najveći pogrešni izraz s 28 figura iznosi $\binom{64}{28} \cdot 28! \approx 10^{47}$ , tj. uz permutacije 28 raznih figura, što znači, da je Schuring prestupio i granicu pogreške!

Osim ovih izvoda, koji predočuju sumu svih korektnih postava, koje se temelje na ortodoksnim pravilima šahovske igre, postojala bi još suma svih mogućih postava na šahovskoj ploči u ilegalnom obliku, ali s legalnim šahovskim figurama. To bi bio ukupan broj šahovskih problema, koji se mogu postaviti u običnom i "čarobnom" šahu! U sljedećem izrazu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n \qquad (3)$$

gdje $n$ znači broj polja, $k$ broj figura u pojedinoj postavi i $a$ broj vrsta figura, te za $n = 64$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 64$, te $a = 12$, dobivamo sumu binomnog reda $\Sigma = 13^{64} \approx 2.5 \cdot 10^{71}$. Zanimljivo je kod ovog reda, da najveći broj pozicija dolazi kod postave s 59 figura!

Ovaj proračun koji se je tretirao kao da pripada u područje “mjerenja duljine, koja se ne može izmjeriti”, moguće je izvesti razmjerno mučnim kombiniranjem i variranjem izvjesnih konstrukcijskih partija i konstrukcijskih pozicija.

Kod određivanja maksimalnog broja partija, koji ima više akademsku, nego li praktičnu vrijednost, dolazi u obzir jedna problemski konstruirana partija velike duljine, a istodobno s velikim brojem pozicija. Ta se partija osniva na šahovskom pravilu, da u slučaju, ako je učinjeno 50 poteza s obje strane, a da za to vrijeme nije uzeta ni jedna figura niti pokrenut niti jedan pješak, ostaje partija remi. Dakle, takvu složenu remi-partiju najveće duljine uzet ćemo kod određivanja maksimalnog broja partija. Shema te partije imala bi četiri etape sljedećeg oblika:

Nakon 50 poteza bijelih i 49 poteza crnih skakača i topova vuče crni b7-b6, zatim opet nakon serije od 49 i pol poteza vuče g7-g6, nakon toga c7-c6 i f7-f6, što iznosi četiri pomaka crnih pješaka odnosno 200 poteza.

Ova etapa mogla bi biti i dulja, sve npr. do postave crnih pješaka: a4, b3, d3, d4, e3, e4, g3, h4, ali se onda produljuje pasivnost pokreta bijelih figura, te se zato forsira prijelaz na drugu etapu radi bržeg razvoja bijelih figura.

U drugoj se etapi, nakon gubitka od pola poteza (kod prijelaza bijelog na crne), bijeli pješaci probijaju (uzimajući šest crnih figura) do posljednje linije. Dakako, da kod toga moraju vući optimalno, da se bijele figure što prije razviju (d3, e3 ili b3, g3), a uzimaju crne figure kasnije, tako da crni operira što dulje s većim brojem figura! Etapa ima u svemu 48 pokreta, što iznosi daljnjih 2 400 poteza!

Kod treće se etape svi crni pješaci mijenjaju u figure, i na kraju uzimaju sve preostale bijele figure, dakako sve u maksimalno dopuštenim distancama. Etapa ima 57 pomaka pješaka i uzimanja, dakle još 2 850 poteza, uz daljnji gubitak od pola poteza.

U zadnjoj, četvrtoj etapi bijeli kralj uzima preostalih devet crnih figura, 450 poteza, te partija završava remijem!

Dakle, čitava partija sa 118 osnovno promijenjenih pozicija završava s 5 899. potezom.

Proračun broja svih partija ovog oblika vršen je dakle tako, da je za svaku osnovno promijenjenu poziciju izračunata srednja vrijednost svih mogućih gibanja, koja je zatim potencirana u svojem intervalu s brojem efektivnih varijantnih poteza!

Srednja vrijednost mogućih pomaka svake pozicije nađena je na temelju proračuna statički konstruiranih problema, zbroj pozicija s maksimalnim brojem poteza veći je od zbroja pozicija s minimalnim pokretima. Interpolacija za proračunavanje srednje vrijednosti uzeta je parabolički, a ne linearno.

Isto tako pozicije su konstruirane za istodobno proračunavanje ekstremnih vrijednosti bijelih i crnih pomaka (ne pojedinačno) tako da se u svakoj poziciji omogući uvijek alternativno (za obje boje) izvesti srednji broj poteza. Naravno, da su iste figure i kod konstrukcije s maksimalnim i minimalnim brojem poteza, i odbijeni su potezi s davanjem šaha!

Dodatak svih partija ekstremnih vrijednosti jedne boje, iako je ona veća od zajedničkih ekstremnih vrijednosti, ne povećava rezultat, jer povećanjem broja pozicija jedne boje rapidno pada broj pozicija druge boje.

Finesa proračuna je i u tom, što se kod mogućnosti povećanja broja pozicija jedne boje na uštrb druge, uvijek povećao broj pozicija one boje koja u odnosnoj etapi nije izvodila pješački potez! Između pojedinih etapa mora postojati izvjesna sličnost konstrukcijskih problema radi mogućnosti izvođenja varijacija.

Osim, proračuna ovog optimalnog slučaja unutar najdulje partije, pribrajaju se i druge partije s različitim varijacijama pješačkih gibanja (vidi primjedbu u prvoj etapi), ranijeg uzimanja figura, različitih promocija, te partija kraćih poteza.

Sve ove alternative računski ispitane neznatno povećavaju konačnu sumu, te npr. koeficijent povećanja uslijed svih mogućih varijacija gibanja bijelih i crnih pješaka, od početne postave do krajnje linije, iznosi $10^{76}$, što je ništavna vrijednost prema konačnom rezultatu.

Tim sistemom računanja eliminirana je gotovo i svaka pogreška, koja bi se protivila pravilima šaha, kao: nemoguće postave, ponavljanje poteza, osim kvalitativne vrijednosti partija, koje se nikada neće odigrati, ne samo radi njihove nelogičnosti, već i radi praktične nemogućnosti brojanja fantastične sume.

Prema naprijed navedenim shemama izračunati produkt iznosi po etapama i naprijed navedenim koeficijentom povećanja uslijed varijacija gibanja pješaka:

$$\sum = 10^{447} \cdot 10^{7\,060} \cdot 10^{10\,377} \cdot 10^{989} \cdot \left(\frac{48!}{6!^8}\right) \approx 10^{18\,900} \tag{4}$$

što bi iznosilo prosjek od 41 gibanja po potezu.

Ova suma, koja prikazuje "teoretsku konačnost šahovske partije", ne može se uopće praktički prikazati niti godinama svjetlosti, niti svemirskim duljinama, te i Eddingtonov zbroj svih elektrona u svemiru od $10^{79}$ ostaje u ništavilu prema ovom broju.

"Praktična konačnost šahovske partije" nastat će onog dana, kad ljudski mozak riješi "konačnicu početne postave", tj. kada bude u mogućnosti da savršeno registrira broj poteza najdulje remi varijante.