

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 20
(збирка задачи за VI и VII одделение)

Скопје, 2020

Рецензенти

проф. д-р Методи Главче

доц. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 20 : (збирка задачи за VI и VII одделение) / Ристо
Малчески, Алекса Малчески, Самоил Малчески. - Скопје : Армаганка,
2020. - 328 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 322-328

ISBN 978-608-4904-47-2

1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Самоил [автор]

COBISS.MK-ID 51308805

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Алгебра	
I.1. Природни и цели броеви	7
I.2. Рационални броеви. Дропки	10
I.3. Равенки и неравенки	13
II Теприја на броеви	
II.1. Деливост	15
II.2. Прости броеви	18
II.3. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател	19
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	24
III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	27
III.3. Времето е важно	32
III.4. Задачи со мерни броеви	33
III.5. Дополнителни задачи	38
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Множества	44
IV.2. Логички задачи	49
IV.3. Нумерички загатки	54
IV.4. Геометриски загатки	56
IV.5. Принцип на Дирихле	59
IV.6. Пребројувања	60
V Геометрија	
V.1. Отсечки и агли	64
V.2. Триаголник	69
V.3. Четириаголник	76
V.4. Конструктивни задачи	82
V.5. Плоштина на триаголник и четириаголник	87
V.6. Коцка и квадар	90

Решенија на задачите		
I	Алгебра	
	I.1. Природни и цели броеви	92
	I.2. Рационални броеви. Дропки	105
	I.3. Равенки и неравенки	112
II	Теприја на броеви	
	II.1. Деливост	118
	II.2. Прости броеви	130
	II.3. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател	133
III	Текстуални задачи	
	III.1. Броеви и цифри	143
	III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	153
	III.3. Времето е важно	163
	III.4. Задачи со мерни броеви	168
	III.5. Дополнителни задачи	178
IV	Логика и комбинаторика	
	IV.1. Множества	190
	IV.2. Логички задачи	200
	IV.3. Нумерички загатки	212
	IV.4. Геометриски загатки	217
	IV.5. Принцип на Дирихле	223
	IV.6. Пребројувања	227
V	Геометрија	
	V.1. Отсечки и агли	236
	V.2. Триаголник	252
	V.3. Четириаголник	273
	V.4. Конструктивни задачи	290
	V.5. Плоштина на триаголник и четириаголник	310
	V.6. Коцка и квадар	319
	Литература	322

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 20* е наменета за талентираниите ученици по математика од шесто и седмо одделение и е комплементарна со книгите *Математички талент 3, 4, 15 и 16*, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 676 решени задачи во која во пет одделни делови се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од дванаесет до четиринаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторите

I АЛГЕБРА

I.1. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Без да ја пресметуваш вредноста на изразот определи ја неговата цифра на единиците: $326 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 629 + 451 \cdot 52 \cdot 953 \cdot 54$.
2. Пресметај го збирот: $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 2010 + 2015 + 2020$.
3. Пресметај ја вредноста на изразот: $(55 \cdot 77) : 35$.
4. Збирот на некои 20 последователни природни броеви е еднаков на 2590. Кои се тие броеви?
5. На која цифра завршува производот на 2019 седумки.
6. На местата на ѕвездичките стави ги соодветните цифри така што множењата ќе бидат точни.

$\begin{array}{r} *2*.*7 \\ \hline **8 \\ **** \\ \hline ****8 \end{array}$	$\begin{array}{r} *****.34* \\ \hline ***** \\ б) ***** \\ 235\,038 \\ \hline *****6 \end{array}$	$\begin{array}{r} ***.*2* \\ \hline *** \\ в) ***** \\ *2* \\ \hline *9*2* \end{array}$
---	---	---

7. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што делењето ќе биде точно: $3** : *3 = 3*$.
8. На местото на секоја ѕвездичка стави по една цифра така што делењето ќе биде точно.

$$\begin{array}{r} *3*****.*** = ***** \\ - **** \\ \hline *0* \\ - **9 \\ \hline ** \\ - ** \\ \hline 0 \end{array}$$

9. На местата на ѕвездичките запиши ги сите девет цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што равенствата ќе бидат точни:

$$*, ** = *** = **, *$$

10. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$\begin{array}{rcl} RDR & - & EM = RAE \\ : & - & - \\ I & \cdot & RH = DR \\ \hline EH & + & MR = ARM. \end{array}$$

Ако добиените цифри ги запишеме во растечки редослед од лево кон десно и под секоја од нив ја запишеш соодветната буква ќе го добиеш името на еден славен математичар и физичар. За кој научник станува збор?

11. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$\begin{array}{rcl} AB & \cdot & B = CB \\ + & - & + \\ B & : & A = B \\ \hline DE & \cdot & F = GE. \end{array}$$

12. Реши го бројниот ребус

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

13. Во бројниот ребус

$$\overline{MIS} + \overline{MAS} = 928,$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Бројот $\overline{SUMA}$ е делив со 4. Која цифра соодветствува на цифрата I ?

14. Реши го бројниот ребус

$$1995 \cdot \overline{abc} = \overline{defghij}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

15. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcde} - \overline{abc} \cdot \overline{de} = 2003$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

16. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} + 2007 = \overline{efgh}$$

во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, бројот $\overline{efgh}$ прима најголема можна вредност.

17. Во празните полиња на долната шема Мирко запишал 12 броеви и ги собрал броевите во секоја колона и секој ред со што ги добил прикажаните зборови. Потоа ги избришал броевите кои ги запишал на почетокот.

				2317
				3216
				4126
2619	2214	2102	2624	

Дали Мирко правилно ги извршил собирањата?

18. Броевите од 1 до 100 подели ги на пет множества од по 20 броеви така што збирот на броевите запишани во секое множество ќе биде еднаков.
19. Природните броеви се запишани во низа еден по друг, без растојание меѓу нив:

12345678910111213141516...

Која цифра се наоѓа на 1972-то место, а која на 1973-то место?

20. Природните броеви од 1 до 100 се поделени на две множества, множество парни и множество непарни броеви. Определи во кое множество и за колку е поголем збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на сите броеви во соодветните множества.
21. Определи го бројот на парните трицифрени броеви кои без остаток може да се поделат со бројот 5.
22. Со помош на три тега може да се измери било која маса изразена со природен број помал од 14. Кои се мерните броеви на овие тегови?

23. На бројот 1979 му допишуваме низа цифри на следниов начин. Ги собираме четирите цифри $1 + 9 + 7 + 9 = 26$ и цифрата на единиците ја допишуваме на бројот 1979 и го добиваме бројот 19796. Понатаму, ги собираме последните четири цифри $9 + 7 + 9 + 6 = 31$ и цифрата на единиците ја допишуваме на бројот 19796 со што го добиваме бројот 197961. Постапката ја повторуваме со последните четири цифри на секој следен број и собирајќи ги последните четири цифри на секој следен број и допишувајќи му ја цифрата на единиците на збирот добиваме 1979613992337...

Дали на некое место во оваа низа цифри ќе се појават последователно цифрите 1234, во овој редослед?

24. Подреди ги по големина броевите $|a|$, $|b|$ и $|c|$, ако

$$a = |-3| - 4 + 1, \quad b = (-5) - (+3) + 2 - 2^3, \quad c = -(4^2 - 8) + (3^2 + 6).$$

25. Подреди ги по големина апсолутните вредности на броевите A , B и C ако

$$A = |b| - 2a - 3, \quad B = 7 - 3|a| + 5b, \quad C = |a + b| - ab + 11 \text{ и } a = -3, b = -7.$$

26. Подреди ги по големина апсолутните вредности на броевите A , B и C ако

$$A = 4 - x(x + y), \quad B = 2x + z + 1, \quad C = z - (1 - z) \text{ и } x = 3, y = -1, z = -7.$$

27. На неколку листови се запишани броевите 1 или -1 (на секој лист по еден број). Збирот на запишаните броеви е 0, а нивниот производ е 1. Докажи дека бројот на листовите е делив со 4.

28. Дадени се 2019 броеви секој од кои е еднаков на 1 или -1 . Дали може овие броеви да се распоредат во две одделни групи така што збирот на броевите во првата група ќе биде еднаков на збирот на броевите во втората група?

1.2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ. ДРОПКИ

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\left(\frac{131313}{686868} + \frac{1648}{1751}\right)\left(\frac{1648}{1751} - \frac{131313}{686868}\right) : 2\frac{1}{16}.$$

30. Подреди ги по големина во растечки редослед броевите A, B, C и D , ако D е решение на равенката $2\frac{4}{9}:(7-x)=\frac{4}{9}$ и

$$A = \frac{4\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{3} + 5\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{3}}{8 + \frac{1}{3}}, B = 21 - 5\frac{1}{8} + 5\frac{17}{24} - 19\frac{1}{4} \text{ и } C = (\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} : \frac{5}{6} - 1) : \frac{9}{14}.$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{42021}{4}A + 99B$ ако

$$A = \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91},$$

а B е решението на равенката

$$\frac{195}{156} \cdot \frac{136}{187} + (\frac{65}{33} \cdot \frac{12}{30} - B) = \frac{34}{51} \cdot \frac{68}{17} \cdot \frac{25}{44}.$$

32. Броевите од 1 до 8 се запишани во квадратчињата на табелата десно (без централното квадратче), така што збирот на трите броја во првиот ред, збирот на трите броја во третиот ред, збирот на трите броја во првата колона и збирот на трите броја во третата колона е еднаков. Определи ја најголемата можна вредност на овие зборови и дади барем еден распоред на броевите

33. Броевите од 1 до 8 се запишани во квадратчињата на табелата десно (без централното квадратче), така што збирот на трите броја во првиот ред, збирот на трите броја во третиот ред, збирот на трите броја во првата колона и збирот на трите броја во третата колона е еднаков. Определи ја најмалата можна вредност на овие зборови и дади барем еден распоред на броевите

34. Во квадратчињата на фигурата дадена на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 9 (секој број е запишан по еднаш) така што бројот запишан во секое кругче да е еднаков на збирот на броевите во соседните квадратчиња. Кој број е запишан во горното лево квадратче?

?		6
14	16	
	1	
18	21	
	9	

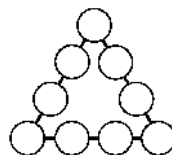
35. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала биде еднаков.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

36. Во централното поле на правоаголникот прикажан на цртежот десно запиши го најголемиот цел број кој е помал од бројот $-9,2$, а потоа во останатите полиња запиши броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

		$-9,1$
$-10,9$	0	

37. Дропките $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ распореди ги во кругчињата на фигурата прикажана на цртежот десно така што збирот на броевите запишани на секоја страна биде еднаков и притоа тој да е:
а) најмал, б) најголем.

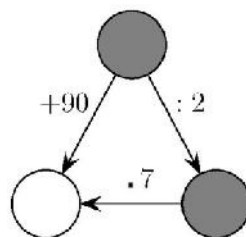


38. Што е поголемо: $\frac{13}{17}$ или $\frac{117}{154}$?
39. Кој број е поголем: $\frac{7}{1988}$ или $\frac{2}{569}$?
40. Која дробка е поголема $\frac{6660}{6661}$ или $\frac{9998}{9999}$?
41. Што е поголемо $\frac{1}{181}$ или $\frac{11}{1994}$?
42. Што е поголемо $\frac{19}{1995}$ или $\frac{20}{2079}$?
43. Запиши пет рационални броеви поголеми од $\frac{3}{4}$, а помали од $\frac{4}{5}$.
44. Без да делиш и без да сведуваеш на најмал заеднички именител утврди која од дропките $\frac{599}{799}$ или $\frac{5999}{7999}$ е поголема.
45. Спореди ги дропките
а) $\frac{13}{33}, \frac{1313}{3333}, \frac{131313}{333333}$, б) $\frac{41}{77}, \frac{4141}{7777}, \frac{414141}{777777}$.
46. Што е поголемо $\frac{2018}{2019}$ или $\frac{2019}{2020}$?
47. Спореди ги по големина дропките
а) $\frac{65}{2014}$ и $\frac{7}{145}$, б) $\frac{1}{5}$ и $\frac{403}{2016}$.

48. Определи дробка со именител 9 која е поголема од $\frac{2}{3}$ и е помала од $\frac{5}{6}$.
49. Определи ги сите дробки со едноцифрени именители секоја од кои е поголема од $\frac{7}{9}$ и е помала од $\frac{8}{9}$.
50. Ако е $\frac{3x+y}{3y-x} = 2$, определи ја вредноста на изразот $\frac{x+3y}{3x-y}$.

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

51. Определи го збирот на броевите кои треба да бидат запишани во сивите кругови така што пресметувањата ќе бидат точни.



52. Реши ја равенката

$$((5x + 178) \cdot 15 + 90) : 45 = 63$$

53. Реши ја равенката

$$(111 - (264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5)) : 12) : 11 = 9.$$

54. Реши ја равенката:

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{70} = \frac{x}{20}.$$

55. Реши ја равенката:

$$68 - a \cdot a = 32.$$

56. Определи ги сите природни броеви x за кои вредноста на изразот $5 - [3 + (-4 + x)]$ е поголема од -2 .

57. За кои цели броеви $\mathbb{Z}$ се исполнети неравенствата:

$$-2 + n < 2(n + 1) < n?$$

58. Определи го најголемиот природен број за кој е исполнето неравенството:

$$78 - 2 \cdot (56 - 32) + x < 51 : 3 + 2 \cdot (50 - 35).$$

59. Определи го најмалиот природен број кој треба да се стави на местото на x така што е точно неравенството

$$x + 7 \cdot 65 - 3 \cdot 72 > 3 \cdot (2 \cdot 7 + 69).$$

60. Колку природни броеви може да се стават на местото на x така што се точни неравенствата

$$10 < 2 + 3x < 40.$$

61. Определи ги сите дробки со именител 8 кои се поголеми од $\frac{1}{3}$, а се помали од $\frac{2}{3}$.

62. Определи ги сите природни броеви n такви што се исполнети неравенствата $\frac{3}{8} < \frac{n}{12} < \frac{11}{18}$.

63. Определи ги сите цели броеви n за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{11}{12}.$$

64. Определи ги сите цели броеви a за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{2}{5} < \frac{a+7}{6} < \frac{5}{3}.$$

65. Определи четири дробки a, b, c и d со едноцифрени именители за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}.$$

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Тешко е да се пресмета производот на деновите од 1986 недели. Затоа пресметај и образложи која е последната цифра на овој производ.
2. При делењето на бројот n со бројот 63 се добива количник k и остаток 59. Определи го остатокот при делењето на бројот n со бројот 21.
3. Нека n е природен број. При делењето на бројот $n+100$ со бројот 23 се добива остаток 17. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот n со 23.
4. Кога четирицифрен природен број a ќе се подели со бројот b се добива остаток c . Производот на броевите b и c е еднаков на 57344, а нивниот збир е непарен. Определи го бројот a .
5. Броевите од 1 до 101 се запишани еден до друг и е добиен бројот 1234567891011...9899100101. Докажи дека овој број е сложен, но не е точен квадрат на природен број.
6. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што множењето ќе биде точно:
$$\begin{array}{r} *7 \cdot 30 = *0** \end{array}$$
7. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што множењето ќе биде точно:
$$\begin{array}{r} *3* \cdot 45 = 5*4* \end{array}$$
8. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{123ab}$ ќе биде делив со 36.
9. Определи ги цифрите a и b така што збирот на броевите $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ е делив со 18.
10. Наместо буквите a и b во четирицифрените броеви стави соодветни цифри така што збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ ќе биде делив со 9.

11. На местото на ѕвездичката во бројот $\overline{3145^*}$ стави соодветна цифра така што при делење на добиениот број со бројот 3 и со бројот 5 се добијат еднакви остатоци.
12. Определи ги цифрите x и y така што бројот $\overline{x74y}$ ќе биде делив со 15.
13. Во четирицифрениот број $\overline{32x2}$ определи ја цифрата x така што тој ќе биде делив со 12.
14. Определи ги сите четирицифрени броеви од видот $\overline{abba}$ кои се деливи со 45.
15. На местото на буквите a и b стави соодветни цифри така што бројот $\overline{4a1b}$ ќе биде делив со 12.
16. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{22ab}$ е делив со 90.
17. На местото на буквите a и b стави соодветни цифри така што бројот $\overline{81ab}$ ќе биде делив со 90.
18. На местата на ѕвездичките стави цифри така што бројот $\overline{2^*44^*}$ биде делив со 90.
19. Кои цифри треба да се стават на местата на a и b за да бројот $\overline{2a0a1b2b}$ биде делив со 12.
20. Кои цифри треба да се стават на местата на a и b за да бројот $\overline{2a0b1a1b}$ биде делив со 36.
21. Трицифрениот број x е делив со 37. Докажи дека и броевите кои од x се добиваат со циклично поместување на цифрите исто така се деливи со 37.
22. Производот на четири парни последователни природни броја е 13440. Определи ги овие броеви.
23. Производот на пет последователни природни броеви е $\overline{95a4b}$. Определи ги непознатите цифри.
24. Производот на шест последователни природни броеви е бројот $\overline{66a28b}$.

- Опреди ги цифрите кои треба да стојат на местата на буквите a и b .
25. Опреди го трицифрениот број кој е делив со 9, таков што цифрата на десетките е за 4 поголема од цифрата на единиците, а производот на неговите цифри е еднаков на 0.
 26. Опреди го најмалиот природен број запишан само со цифрата 1 и кој е делив со бројот 333.
 27. Опреди го најмалиот природен број кој е запишан само со цифрата 1, а кој е делив со бројот $\underbrace{333\dots 333}_{100 \text{ тројки}}$. Опреди го количникот на овие два броја.
 28. Докажи дека збирот на три последователни природни броја е делив со 3.
 29. Нека a и b се природни броеви такви што $(10a+12b)(12a+10b)$ е делив со 11. Докажи дека $(10a+12b)(12a+10b)$ е делив со 121.
 30. Опреди трицифрен прост број таков што сите трицифрени броеви кои се формираат со пермутации на неговите цифри се прости броеви.
 31. Докажи дека збирот на произволни пет последователни природни броја не може да биде прост број.
 32. Опреди го трицифрениот природен број n таков што цифрата на единиците е еднаква на цифрата на стотките и 15 е делител на n .
 33. Со помош на цифрите 0, 1, 3, 4 и 5 запиши ги сите петцифрени броеви кои се деливи со 4, но не се деливи со 5. (Цифрите не се повторуваат.)
 34. Докажи дека бројот $2019^{2019} + 1$ делив со 10.
 35. Нека n е природен број поголем од 1. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{10^n+8}{36}$ е цел број.
 36. Опреди ги сите природни броеви n за кои бројот $10^n + 8$ е делив со 72.
 37. На местото на ѕвездичките стави цифри така што ќе добиеш точно равенство $\frac{\overline{3^*}}{\overline{5^*}} = \frac{2}{3}$.

38. Дропките $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{4*7*}{45}$ се природни броеви. Подреди ги овие дропки по големина.
39. Определи го целиот број a така што вредноста на изразот $\frac{a+9}{a+6}$ е цел број.
40. Определи ги сите едноцифрени природни броеви a, b и c такви што
- $$\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}.$$

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

41. Дали постои природен број чиј производ на цифри е 2012?
42. Определи го најмалиот природен број кој помножен со 378 дава точен квадрат на природен број.
43. Нека n е најмалиот природен број со кој треба да го помножиме бројот 2520 за да се добие квадрат на природен број. Определи го збирот на цифрите на бројот n .
44. Бројот 1000000 запиши го како производ на два природни броја во чии декадни записи не се содржи ниту една нула.
45. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 2 станува квадрат на некој природен број, а помножен со бројот 3 станува куб на друг природен број.
46. Определи ги сите прости броеви p такви што и бројот $p+9$ е прост.
47. Ако p е прост број, тогаш $p+2003$ и $2003-p^3$ се сложени броеви. Докажи!
48. Пополни ја табелата дадена на цртежот десно така што во секое квадратче ќе биде запишан по еден од броевите од 1 до 9 (секој број е запишан по еднаш), а збирот на броевите запишани во секој ред и секоја колона ќе биде прост број. Определи го производот на броевите запишани во сивите квадратчиња.

2		3
		9
7		

49. Нека a и b се прости броеви поголеми од 3. Докажи дека изразот $(a+b)(a-b)$ е делив со 12.
50. Определи ги природниот број n и простиот број p за кои важи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$.
51. Определи ги сите прости броеви p за кои се точни неравенствата $\frac{3}{16} < \frac{5}{p} < \frac{2}{7}$.
52. Дали постојат прости броеви p и q такви што $p + 4q = 2008$?
53. Определи ги сите прости броеви p, q и r такви што $2p + 3q + 4r = 2022$.

II.2. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

54. Нека бројот $\overline{2x1x}$ е делив со 12. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\overline{x4}$ и $\overline{5x}$.
55. На местото на ѕвездичките во бројот $\overline{523***}$ запиши ги соодветните цифри така што добиениот број при делење со 7, 8 и 9 ќе дава остаток 6.
56. Определи го најголемиот природен број таков што при делење на броевите 1988 и 30756 со тој број се добиваат остатоци еднакви на 4.
57. Дадени се отсечките $a = 420\text{ cm}$ и $b = 858\text{ cm}$. Определи ја отсечката со најголема должина изразена во сантиметри која цел број пати се содржи во дадените отсечки.
58. Определи го природниот број a , $100 < a < 200$ кој при делење со броевите 2, 3, 4 и 5 дава остатоци 1, 2, 3 и 4, соодветно.
59. Определи ги трицифрените броеви такви што ако од трицифрениот број се одземе бројот 13, тогаш разликата е делива со 13, а ако од трицифрениот број се одземе 17, тогаш разликата е делива со 17.

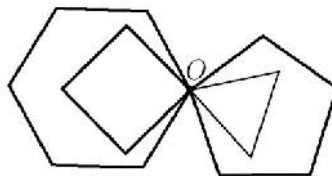
60. Производот на два природни броја е еднаков на 384, а нивниот најмал заеднички содржател е еднаков на 48. Определи ги овие броеви.
61. Марко има определен број сликички, помалку од 100. Кога тој ги броел сликичките по 2 му останала 1 сликичка. Потоа Марко ги броел сликичките по 3 и повторно му останала 1 сликичка. Една сликичка му останала и кога сликичките ги броел по 5 и по 6, но кога ги броел по 7 не му преостанала ниту една сликичка. Колку сликички имал Марко?
62. Определи го најмалиот природен број кој при делење со броевите 2, 7, 11, 13 и 14 дава остаток 1.
63. Определи го најголемиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.
64. Подготвувајќи ги учениците за спортско дефиле наставникот Марко учениците ги распоредил во три реда, но му преостанал еден ученик. Потоа пробал да ги распореди во 4 реда, но му преостанале 2 ученика. Кога ги распоредил во 5 реда му преостанале 3 ученика, а кога направил 6 реда му преостанале 4 ученика. Тогаш Марко рекол: „Постројте се во 8 реда“, на што ученикот Горјан прокоментирал: „Ќе преостанат 6 ученика, но ако се построиме во 7 реда, нема да преостане ниту еден ученик“. Се покажало дека Горјан е во право и дека не постои помал број ученици кои ги задоволуваат овие услови. Колку ученици учествувале во спортското дефиле?
65. На крајот на учебната година во едно одделение по предметот англиски јазик никој не добил оценка одличен (5). Секој шести ученик добил оценка многу добар (4). Секој трет ученик добил оценка доволен (2), а секој деветти ученик добил оценка недоволен (1). Се знае дека во одделението имало повеќе од 20, а помалку од 40 ученици. Колку ученици добиле оценка добар (3)?
66. Определи го најголемиот број со кој треба да се поделат броевите 845 и 275 за да остатокот во двата случаја биде 5.
67. Определи го најголемиот четирицифрен број кој при делење со броевите 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.
68. Во штедната каса Марко има само монети од по 1 денар. Тој од монетите правел кули или само со по 18, или само со по 24 или само со по

30 монети и секогаш му останувал 1 денар. Определи го најмалиот број монети кои може да ги има Марко.

69. Дамјан има повеќе од 2000 денари, а помалку од 3000 денари. Ако секој ден троши по 150 денари ќе му преостанат 30 денари, а ако секој ден троши по 180 денари повторно ќе му преостанат 30 денари. Колку пари има Дамјан?
70. Определи го најголемиот трифцифрен број кој при делење со 3, 4, 5 и 6 дава остаток 2, 3, 4 и 5 соодветно.
71. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 2 дава остаток 1, при делење со 3 дава остаток 2, при делење со 4 дава остаток 3, при делење со 5 дава остаток 4, при делење со 6 дава остаток 5 и при делење со 7 дава остаток 6.
72. Определи ги сите природни трицифрени броеви кои при делење со 7 даваат остаток 2, при делење со 9 даваат остаток 4 и при делење со 12 даваат остаток 7.
73. Три автобуси во 6 часот наутро истовремено тргнале од автобуската станица во три различни правци. Првиот автобус се вратил во станицата по 1 час и 5 минути и по 10 минути повторно тргнал на пат, вториот автобус се вратил по 56 минути и по 4 минути повторно тргнал на пат и третиот автобус се вратил по 48 минути и по 2 минути повторно тргнал на пат. Во колку часот сите три автобуси за првпат повторно истовремено ќе тргнат на пат.
74. Во едно пристаниште пристигнуваат пет брода од пет различни места. Првиот брод пристигнува секој втор ден, вториот секој трет ден, третиот секој четврт ден, четвртиот секој петти ден и петтиот секој шести ден. Сите бродови истовремено пристигнале во пристаништето на 1 јуни, а овој ред на возење важи од 1 јуни до 31 август.
 - а) Определи ги деновите кога сите бродови заедно ќе пристигнуваат во пристаништето.
 - б) Определи ги деновите кога во пристаништето нема да има ниту еден брод.
75. Денес во сабота 21.04.2018 година од едно пристаниште испловиле три брода. Определи го најмалиот број денови кога повторно сите три брода ќе испловат во сабота, ако се знае дека првиот брод испловува секој трет ден, вториот брод испловува секој четврт ден и третиот

брод испловува секој шести ден. Кој е следниот датум кога сите бродови за првпат повторно ќе испловат во сабота?

76. Определи ги природните броеви x и y за кои важи $NZD(x, y) = 6$ и $NZS(x, y) = 36$.
77. Производот на два природни броја е 384, а нивниот најмал заеднички содржател е 48. Определи ги овие броеви.
78. Денес е среда. Имаме часовник кој денес на пладне покажува точно време и кој секои 24 часа оди напред по 5 минути. Часовникот работи непрекинато една година. Колку пати во текот на оваа година часовникот покажал точно време? Дали некој од деновите во кои часовникот покажал точно време е среда?
79. Во една кутија има двапати повеќе виљушки од лажици, а вкупниот број виљушки и лажици е поголем од 200 и е помал од 250. Ако лажиците и виљушките од таа кутија се бројат по 10 или по 12, тогаш нема да остане ниту една лажица, ниту една виљушка. Колку лажици и колку виљушки има во кутијата?
80. Во едно училиште во шесто одделение се запишани 180 момчиња и 192 девојчиња. Формирани се одделенија со еднаков број ученици, така што бројот на момчињата во секое одделение е еднаков. Бројот на учениците во секое одделение е поголем од 18 и е помал од 35. Колку момчиња и колку девојчиња има во секое одделение?
81. Имаме 10 листови. Определен број од овие листови е исечен на по 10 делови, а потоа некои од добиените делови повторно се исечени на по 10 делови итн. На крајот Илија пребројал дека се добиени 2018 листови. Докажи дека Илија погрешил при броењето.
82. Од точката O истовремено и со една иста брзина тргнала Ана по триаголната, Бојан по квадратната, Виолета по петаголната и Горјан по шестаголната патека. Секој ја обиколувал својата патека се до моментот кога четворицата за првпат повторно се сретнале во точката O . Колку пати точно двајца или точно тројца од нив поминале истовремено низ точката O ? (Сите отсечки на црежот се со еднаква должина.)



83. Бројот 333 запиши го како производ на два броја така што секој од множителите е помал од 10.
84. Вредностите на дробките $\frac{32*60}{56}$ и $\frac{42*4*}{72}$ се природни броеви. Која од овие дробки е поголема?
85. Дадени се дробките $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$. Определи го најмалиот број таков што количникот на тој број и секоја од дадените дробки е природен број.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се четири пари поголеми од збирот на нивните цифри.
2. Во една улица куќите од едната страна се нумерирани со парни броеви, а од другата страна се нумерирани со непарни броеви. Притоа се искористени непарните броеви од 1 до 169 и парните броеви од 2 до 114. Колку цифри се искористени за нумерирање на сите куќе во оваа улица?
3. Ако еден број се подели со 7, а потоа тој број се собере со делителот и количникот се добива бројот 63. Определи го почетниот број.
4. Определи ги сите четирицифрени броеви кои се помали од 2000 и чиј производ на цифри е еднаков на 105.
5. За да се нумерираат сите странци на една книга биле употребени 1068 цифри. Колку страници имала оваа книга?
6. Мирко требало некој број да го помножи со бројот 408, но тој направил грешка и тој број го помножил со 48, па така направил грешка од 270000. Определи го производот кој требало да го добие Мирко.
7. При множењето на два броја Илија цифрата на единиците 4 на едниот број ја заменил со цифрата 1, па така добил производ 525 наместо 600. Кои броеви требало да ги помножи Илија?
8. Количникот на два броја е еднаков на 72. Ако деленикот се намали за 2000, а делителот остане непроменет се добива количник 32. Кои се тие броеви?
9. Збирот на четири броја е 208. Ако на првиот број му додадеме 3, од вториот број одземеме 3, третиот број го помножиме со 3 и четвртиот број го поделиме со 3, добиваме ист резултат. Определи ги овие броеви.

10. Две семејства имаат по 3 деца и во секое семејство има по 2 близнаци. Производот на бројот на годините на децата во секое од семејствата е 36, а зборовите на годините на децата во секое од семејствата се еднакви. Годините на децата од едното семејство се разликуваат од годините на децата од другото семејство. Колку години имаат децата во секое од семејствата?
11. Зборовите на секои два од броевите a, b и c се еднакви на 332, 408 и 466. Определи ги броевите a, b и c .
12. Аритметичката средина на два броја е 2019. Еден од броевите е 2021. Кој е другиот број?
13. Збирот на трицифрените броеви $\overline{ABC}, \overline{CAB}, \overline{BCA}$ е трицифрен број. Определи ги броевите $\overline{ABC}, \overline{CAB}, \overline{BCA}$, ако A, B, C се различни цифри.
14. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{5}{4}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 63.
15. Збирот на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ од некој број е за 9 помал од половината на истиот тој број. Кој е тој број?
16. Збирот на половината, третината и седмината на некој број е за 1 помал од самиот број. Кој е тој број?
17. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{43}{90}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 1995.
18. Определи ја дробката која е еднаква на $\frac{7}{13}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 140.
19. Дробката $\frac{999}{1994}$ запиши ја како збир на две дробки со едноцифрени броители.
20. Збирот на две позитивни дробки со едноцифрени именители е еднаков на $\frac{11}{18}$. Кои се тие дробки?
21. Збирот на $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ од некој број е за 48 помал од $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$ на истиот тој број. Кој е тој број?

22. Марко почнал од бројот 2 да ги одзема дробките $\frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, \frac{3}{2011}, \dots$.
Која е последната дробка која Марко може да ја одземе, а резултатот од одземањето да е поголем од нула?
23. Пабло почнал да ги пишува дробките $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2012}, \frac{3}{2012}, \dots$. Колку дробки може да запише Пабло такашто нивниот збир е помал од 3.
24. Горјан замислил некој број. Од замислениот број тој одзел 1,05, добиената разлика ја помножил со 0,8, на добиениот производ му додал 2,84 и добиениот збир го поделил со 0,01. Така Горјан го добил бројот 700. Кој број го замислил Горјан?
25. Кога од еден број ќе одземеме $\frac{5}{8}$ од неговата вредност, а потоа од остатокот ќе одземеме $\frac{5}{6}$ од остатокот, а потоа од новиот остаток ќе одземеме 6 се добива 0. Определи го непознатиот број?
26. Цифрата на единиците на еден број е 0 и ако истата ја избришеме, тогаш тој број се намалува за 27405. Кој е почетниот број?
27. Дамјан замислил некој број на кој прво му додал 25, а потоа добиениот број го помножил со 25 и добил 2025. Кој број го замислил Дамјан?
28. Ако на некој број n од десно му допишеме нула, па овој број го поделиме со 15, а потоа на добиениот количник од десно му допишеме 3 и така добиениот број го поделиме со 13, ќе го добиеме бројот 11. Определи го бројот n .
29. Мирјана замислила еден број. Потоа на замислениот број му додала 6, па добиениот број го помножила со 5. Добиеениот производ го намалила за 40, па добиената разлика ја поделила со 7, по што го добила бројот 25. Кој број го замислила Мирјана?
30. Цифрата на единиците на еден број е 2 и ако истата ја избришеме се добива број кој е за 31061 помал од почетниот број. Кој е почетниот број?
31. Наместо даден број да го подели со 3 и на добиениот количник додаде 8, Илија дадениот број го помножил со 3 и од добиениот производ одзел 8. Но, Илија повторно добил точен резултат. Кој е бројот кој Илија требало да го подели?

32. Ако на двоцифрен број му се допише и од лево и од десно цифрата 1, се добива број кој е 21 пат поголем од почетниот број. Определи го двоцифрениот број.
33. Збирот на пет последователни цели броеви е еднаков на 0. Кои се тие броеви?
34. Збирот на пет последователни цели броеви е еднаков на -40 . Кои се тие броеви?
35. Ако на некој број оддесно му допишем 9, добиениот број го поделиме со 13, потоа на добиениот количник оддесно му допишеме 1 и добиениот број го поделиме со 11, се добива бројот 21. Определи го почетниот број.
36. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{19}{34}$ и кај која збирот на броителот и именителот е еднаков на 2014.
37. Дадена е дробката $\frac{17}{63}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да се добие дробката $\frac{3}{17}$?
38. Збирот на две броја е $\frac{2}{3}$, а нивната разлика е $\frac{1}{3}$. Определи ги овие броеви.
39. Ако не еден природен број му ја додадеме неговата четирикратна реципрочна вредност, ќе го добиеме производот на тој број и неговата четирикратна реципрочна вредност. Кој е тој број?
40. Збирот на два броја од првиот број е поголем за 245, а од вториот број е поголем за 67. Определи го збирот на овие броеви.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

41. Марија во продавница купува чоколади од ист вид. Ако купи 20 чоколади и преостануваат 60 денари од парите кои ги има, а за да купи 25 чоколади и недостасуваат 40 денари. Колку пати има Марија?
42. На Павел му недостасуваат 140 денари, а на Томи му недостасуваат 40 денари за да секој од нив купи иста збирка задачи по математика.

Затоа одлучиле заеднички да купат само една збирка, но и тогаш им недостасувале 20 денари. Определи ја цената на оваа збирка задачи.

43. За 4 kg сливи и 6 kg праски Илија платил 126 денари. Цените на сливите и праските се однесуваат како 3:5. Определи ги цените на сливите и праските.
44. Матеј, Кирил и Павел добиле на лотарија премија од 100000 денари. Како ќе ја поделат премијата, ако при купување на лозот Матеј дал 5 денари, Кирил дал 6 денари и Павел дал 9 денари?
45. Горјан отишол во книжара и сакал да купи 11 тетратки од ист вид, при што забележал дека од парите кои ги имал му преостануваат 70 денари. Кога сакал да купи 15 тетратки од овој вид, тој забележал дека му недостасуваат 50 денари. Колку чини една тетратка? Колку пари имал Горјан?
46. Али Баба и 40-те разбојници подеднакво поделиле 42 идентични вреќи полни со златници. Секој од нив добил една цела вреќа и два златника. Колку златници добил секој разбојник? Колку златници вкупно се поделени?
- 
47. Девет исти тетратки чинат 11 евра и извесен број евроценти, а 13 такви тетратки чинат 15 евра и извесен број евроценти. Колку пари чини една тетратка?
48. Марија за 5 kg круши платила колку и за 8 kg јаболка. Определи ги цената на јаболката и цената на крушите ако се знае дека 1 kg круши чини 15 денари повеќе од 1 kg јаболка.
49. Марко за 370 денари купил книга, тетратка, молив и хемиско пенкало. Тетратката, моливот и хемиското пенкало ги платил вкупно 190 денари. Книгата, хемиското пенкало и моливот заедно чинат 350 денари, а тетратката и моливот заедно чинат 50 денари. Колку пари чини секој предмет одделно?
50. Илија купил 4 книги. Првата, втората и третата книга заедно чинат 360 денари, првата, третата и четвртата книга заедно чинат 400 денари, првата, втората и четвртата книга заедно чинат 380 денари и втората, третата и четвртата книга заедно чинат 420 денари. Определи ја цената на секоја од купените книги.

51. За 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 1 kg портокали Елена платила 320 денари. За 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 2 kg портокали Марија платила 420 денари и за 1 kg јаболка, 2 kg лимони и 2 kg портокали Петра платила 380 денари. Определи ја цената на 1 kg од секој вид овошје.
52. Во две продавници за овошје имало 365 kg јаболка и тие се продавале по иста цена. Кога првата продавница продала определено количество јаболка и за тоа добила 4340 денари, а втората продавица продала определено количество јаболка и за тоа добила 8750 денари, во првата продавница останале 102 , а во втората останале 76 kg јаболка. По колку килограми јаболка имало во секоја продавница на почетокот?
53. Неколку пријатели отишле во слаткарница и се договориле секој да даде по 160 денари. Кога требала да се плати сметката се покажало дека се потребни уште 40 денари. Тогаш решиле да дадат по 180 денари, за да можат да остават и бакшиш кој изнесувал $\frac{1}{10}$ од целата сметка. Колку пријатели биле во слаткарницата и колку изнесувала сметката?
54. Ванчо и Михаил меѓу себе поделиле 816 денари. Кога Ванчо потрошил $\frac{3}{5}$ од својот дел, а Михаил потрошил $\frac{3}{7}$ од својот дел, им останале еднакви суми пари. Колку пари добил секој од нив при поделбата?
55. Владимир, Натка и Јасна заедно имале 2450 денари. Кога Владимир потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Натка потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари и Јасна потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари, им останале еднакви суми пари. Колку пари имал секој од нив?
56. Иван во книжарница за книги потрошил $\frac{3}{5}$ од парите кои ги имал, потоа $\frac{5}{9}$ од парите кои му останале потрошил за тетратки, потоа $\frac{3}{8}$ од парите кои му останале потрошил за прибор за цртање и пишување и му останале 800 денари. Колку пари имал Иван на почетокот?
57. Четири другари заеднички купиле фудбалска топка. Првиот дал половина од парите колку што чинела топката, вториот дал третина од сумата која ја дале останатите тројца, а третиот дал четвртина од

сумата која ја дале останатите тројца. Четвртиот дал 500 денари. Определи ја цената на топката.

58. Павел купил книга за која платил 100 денари и уште $\frac{1}{3}$ од вредноста на книгата. Колку чинела книгата која ја купил Павел?
59. Иван, Милан и Јане имаат вкупно 360 денари. Иван и Милан заедно имаат 40 денари повеќе од Јане, а Иван има три пати повеќе пари од Милан. Колку пари има секој од нив?
60. Лидија донела на пазар четири пилиња со иста маса. Кога ја прашале колкава е масата на секое пиле, таа одговорила: „Секое пиле има маса 1 kg и уште петтина од својата маса“. Колку пари заработила Лидија со продажбата на сите пилиња, ако 1 kg го продавала по 300 денари?
61. Еден трговец купил стока за 212100 денари. Две третини од стоката ја продал со $\frac{1}{20}$ заработувачка, а останата стока ја продал со загуба $\frac{1}{70}$. Колку пари заработил трговецот?
62. Максим потрошил $\frac{3}{5}$ од парите кои ги имал, потоа потрошил $\frac{5}{9}$ од остатокот, а потоа уште $\frac{3}{8}$ од новиот остаток. На крајот му останале 200 денари. Колку пари имал Максим на почетокот?
63. За купување на таблет Марко планирал да потроши $\frac{3}{4}$ од парите кои ги имал. При купувањето дознал дека таблетот поевтинил за 10%. По купувањето на таблетот му останале 6500 денари од парите кои ги имал. Колку пари имал на почетокот Марко?
64. По намалувањето на цената за 20%, за 800 денари може да се купи 1 m платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 900 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.
65. Иван и Лазар заработиле определена сума пари која требало да ја поделат во размер 5:3. Благајникот згрешил и сумата ја поделил во размер 2:3 и така Лазар добил 3600 денари повеќе отколку што требало. Определи ја вкупната сума и вистинските делови кои требало да ги добијат Иван и Лазар.

66. Петар и Марко заедно имале 900 денари. Кога Петар потрошил $\frac{3}{8}$ од неговите пари, а Марко потрошил $\frac{3}{10}$ од неговите пари, тие заклучиле дека потрошиле $\frac{1}{3}$ од вкупната сума. Колку пари имал секој од нив на почетокот?
67. Елена, Даница и Мирјана биле на пазар. Тие заедно потрошиле 5280 денари. Елена потрошила 340 денари повеќе од Даница, но трипати помалку од вкупната сума која ја потрошиле Даница и Мирјана. Колку пари потрошила секоја од нив?
68. Раде, Томе и Зоран имаат определени суми пари. Томе има трипати повеќе пари од Зоран, а трипати помалку од Раде. Зоран и Раде заедно имаат 1000 денари. Колку пари има секое од децата?
69. Марко, Дејан и Никола на екскурзија вкупно понеле 2220 денари. Марко потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Дејан потрошил $\frac{1}{5}$ од своите пари и Никола потрошил $\frac{7}{15}$ од своите пари. Потоа на секој од нив му останала иста сума пари. Колку денари секој од нив понел на екскурзија?
70. Од некоја сума прво се одбиени 5% за трошоци, потоа 90 денари за заеднички потреби, а остатокот е поделен на три лица подеднакво. Колку изнесува целата сума ако секое лице добило по 160 денари?
71. Петнаесет другари собирале пари за посета на театарска претстава. Колку пари собрале ако по купувањето на 11 карти им остануваат 50 денари, а за да купат 15 карти им се потребни уште 700 денари?
72. Павел, Марко и Шана влегле во книжарница. Павел си купил: едно пенкало, еден молив и една гума. Шана си купила: две пекала и една гума, а Марко си купил: два молива и три гуми. Марко платил 80 евроценти повеќе од Шана, а Шана и Павел платиле еднаква сума пари за работите што ги купиле. Една гума е за 10 евроценти поскапа од еден молив.
- а) Колку пари платил Марко?
- б) Ако Павел располага со монети од 50, 20, 5 и 1 евроцент, но со нив не може да ги плати работите што ги купил без продавачот да му врати кусур, колку најмногу пари може да има Павел?

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

73. На една работа работи група од 9 работници и според планот работата треба да ја завршат за 46 дена. По 6 дена од почетокот на работата менаџерот одлучил да го забрза завршувањето на работата и затоа почнувајќи од седмиот ден во работата биле вклучени уште 6 работници. За колку дена е завршена целата работа?
74. Триесет сидари сидаат еден сид за 28 дена. За да сидот биде завршен побрзо по 10 дена се вработени уште 6 сидари. За колку дена е изсидан целиот сид, ако секој сидар работи со иста брзина?
75. Еден базен може да се полни од две цевки и да се празни од една цевка. Од првата цевка базенот се полни за 6 часа, а од втората за 8 часа. Полн базен од одводната цевка се празни за 4 часа. Истовремено се отворени вентилите на сите три цевки. Колкав дел од базенот ќе биде полн по 2 часа.
76. Ласко и Ратко завршуваат една работа за 495 часа, Ласко и Жарко ја завршуваат истата работа за 440 часа, а Ратко и Жарко за 792 часа. За колку часови оваа работа ќе биде завршена ако сите тројца заедно работат?
77. Иван може една работа да ја заврши за 18 дена. Ако на истата работа со него заедно работи и Лазар, тогаш работата ќе биде завршена за 12 дена. Колку денови му се потребни на Лазар сам да ја заврши оваа работа?
78. Базен за вода може да се полни со помош на три славини. Првата славина сама го полни базенот за 8 часа, втората сама го полни за 10 часа, а третата сама го полни за 12 часа. Докажи дека ако сите три славини истовремено се пуштата да го полнат базенот, тогаш за 1 час ќе се наполни повеќе од четвртина, а помалку од третина од базенот.
79. Киро една работа ја завршува за 12 дена, Стојан истата работа ја завршува за 15 дена, а Марко оваа работа ја завршува за 20 дена. Колкав дел од работата ќе остане незавршен ако на оваа работа сите тројца заедно работат 4 дена?
80. Еден човек може да испие буре пиво за 21 ден. Човекот и неговата сопруга истото буре пиво може да го испијат за 14 дена.

Колку дена и се потребни на сопругата за сама да го испие бурето пиво?

81. Семејството на Тина се состои од нејзините мајка, татко, брат и Тина. Тина ги собрала годините на сите од семејството и тој збир е 88. Колку години се потребни да поминат за да збирот на годините на членовите на нејзиното семејство биде 100?
82. Кога синот имал 8 години, таткото имал 31 година. Сега таткото е двапати постар од синот. Колку години има синот?
83. Таткото е постар од синот 24 години и по 5 години таткото ќе биде четири пати постар од синот. Определи ги годините на таткото и синот.
84. Група ученици засадиле 6006 садници багрем, даб и бор така што на секоја багремова садница имало 26 дабови и 12 борови садници. Колку работни часови имал групата, ако за засадување на багремова садница се потребни 15, за дабова 18 и за борова 20 минути?
85. Елена имала 28 години кога го родила синот Горјан. Колку години ќе има Елена во 2026 година, ако во 2016 година Горјан бил четири и пол пати помлад од Елена?
86. Дедо Ристо сега има 62 години, неговиот син Самоил има 35 години, а внукот Горјан има 5 години. По колку години збирот на годините на Самоил и Горјан ќе биде еднаков на годините на Ристо?
87. Илина има три сина. Најстариот е три пати постар од најмладиот, а производот на годините на трите сина е 864. Колку години има секој син на Илина?
88. Три гуски за три дена несат три јајца. Колку јајца ќе снесат 9 гуски за 12 дена?

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

89. Две тела се движат истовремено во ист правец и во иста насока, но едното од нив на стартот било 5 m поблиску до целта и се движи со константна брзина од 3 m во секунда. Второто тело се движи со по-

стојана брзина од 5 m во секунда. После колку секунди второто тело ќе го стигне првото и колкав пат ќе помине до моментот на стигнување?

90. Периметарот на предното тркало на велосипедот на Горјан изнесува 3 m , а на задното тркало 4 m . Колкав пат поминал Горјан ако предното тркало направило 752 завртувања повеќе од задното?
91. На картата растојанието меѓу местата A и B е еднакво на 4 cm . Определи го во километри растојанието меѓу A и B , ако на 1 mm на картата соодветствуваат 3000 m во природата.
92. Растојанието меѓу две места е 270 km . Два велосипедиста тргнуваат истовремено еден кон друг во пресрет. Секој велосипедист вози со постојана брзи и тоа првиот вози со брзина 24 km/h , а вториот со брзина која е за една осмина помала од брзината на првиот велосипедист. Колку километри поминал секој од нив до средбата?
93. Гумена топка која слободно паѓа, секој пат отскокнува од земјата до висина за $\frac{1}{4}$ помала од висината од која паднала. Пресметај од која висина е пуштена топката ако во третото отскокнување достигнала висина 432 cm . Која висина ќе ја достигне топката во петтото отскокнување?
94. Ангел со велосипед патува од местото A до местото B . Кога поминал четвртина од патот и уште 5 km , до крајот на патот му останале третина од патот и уште 10 km . Колку е долг патот од A до B ?
95. Од местата A и B истовремено тргнале еден кон друг двајца велосипедисти. Првиот вози со брзина 13 km на час, а вториот со брзина $15,5\text{ km}$ на час. Велосипедистите се сретнале на 5 km од средината на патот меѓу местата A и B . Определи ја должината на патот од A до B .
96. Турист планирал патот меѓу местата A и B да го помине за три дена. Првиот ден поминал половина од патот, вториот ден половина од остатокот, а третиот ден ги поминал преостанатите 40 km . Определи го растојанието меѓу местата A и B .

97. Турист предвидениот пат го поминал за четири дена. Првиот ден поминал $\frac{1}{3}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{1}{5}$ од целиот пат и третиот ден туристот поминал 68 km . Туристот првите три дена поминал шест пати повеќе пат од остатокот на патот. Колку бил долг патот кој што туристот планирал да го помине?
98. Атанас за три дена со автомобил го поминал патот меѓу градовите A и B . Првиот ден поминал $\frac{3}{8}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{5}{12}$ од целиот пат и третиот ден поминал $\frac{1}{6}$ од целиот пат и уште 45 km . Колку е долг патот од A до B ?
99. Воз за 14 часа треба да помине пат долг 630 km . Откако поминал $\frac{2}{3}$ од патот, непредвидено стоел на сигнал 1 час и 10 минути. Со која брзина треба да продолжи возот за да стигне на целта во предвиденото време?
100. Три автомобили истовремено тргнале од местото A во местото B . По извесно време првиот автомобил поминал $0,625$, вториот поминал $\frac{7}{9}$, а третиот поминал $\frac{4}{5}$ од растојанието меѓу овие две места. Определи го растојанието меѓу овие две места, ако автомобилот кој е најблиску до местото B во тој момент од местото B бил оддалечен 36 km .
101. Растојанието меѓу местата A и B е 300 km . Местата C и D се наоѓаат меѓу местата A и B така што растојанието меѓу B и C е три пати поголемо од растојанието меѓу A и C . Растојанието меѓу местата B и D е четири пати поголемо од растојанието меѓу местата A и D . Колкаво е растојанието меѓу местата D и C на карта со размер $1:500000$?
102. Градовите A и B се оддалечени еден од друг 590 km . Еден дел од патот е нагорница, другиот е хоризонтален, а третиот е надолница. Нагорницата е четири пати пократка од хоризонталниот дел и за 110 km е пократка од надолницата. Определи ја должината на секој дел од патот.
103. Мотоциклист тргнал од местото A во местото B , во кое планирал да стигне за определено време. Ако вози со брзина 35 km/h тој ќе пату-

ва 2 часа повеќе, а ако вози со брзина 50 km/h , тој ќе патува 1 час помалку. Определи ја должината на патот од местото A до местото B , како и времето за кое мотоциклистот планирал да патува.

104. Еден патник првиот ден поминал $\frac{3}{8}$ од предвидениот пат, вториот ден поминал $\frac{5}{12}$ од предвидениот пат, а третиот ден поминал 45 km повеќе од $\frac{1}{6}$ од предвидениот пат и стигнал до целта. Колкава е должината на патот кој го поминал патникот?
105. Експресен воз тргнал од местото A до местото B . По 8 часа возење поминатиот пат бил за 400 km подолг од преостанатиот пат. Ако возот ја зголеми брзината за 16 km/h , преостанатиот дел од патот ќе го помине за 4 часа. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B .
106. Вкупната должина на три јажиња е 29 m . Ако од првото јаже се отсече $\frac{1}{4}$ од неговата должина, од второто јаже се отсече $\frac{1}{3}$ од неговата должина и од третото јаже се отсече $\frac{1}{2}$ од неговата должина, тогаш преостанатите делови ќе бидат со еднакви должини. Определи ги почетните должини на трите јажиња.
107. При излегувањето од своето дувло верверицата донесува орев од ореовото стебло за 2 минути. Определи го растојанието од ореовото стебло до дувлото на верверицата, ако се знае дека верверицата без орев поминува 5 метри во секунда, а со орев поминува 3 метри во секунда. (За земањето на орев верверицата не губи време и таа по пат не застанува.)
108. Два трактора изорале парцела од 296 ha . Првиот дневно орал 10 ha , а вториот 12 ha . Последниот ден орал само првиот трактор. За колку дена е изорана парцелата?
109. Фармерот Стојан изорал една земјишна парцела за три дена. Првиот ден Стојан изорал $\frac{3}{8}$ од парцелата, вториот ден изорал $\frac{3}{7}$ од остатокот, а третиот ден го изорал остатокот од парцелата. Третиот ден Стојан изорал 5 ha повеќе отколку вториот ден. Определи ја плоштината на парцелата. Колку хектари орал Стојан секој ден?

110. Карпа со должина на раб 10 m е исечена на еднакви коцки со должина на раб 1 dm . Потоа со редување една до друга на малите коцки е направена патека со ширина 1 m . Пешак се движи по патеката со брзина од 5 km на час. Колку време му е потребно на пешакот да ја помине патеката?
111. Два базени со еднакви волумени се полни со вода и треба да се испразнат. Во исто време се отворени славините за истекување на водата од двата базени. Во текот на првиот час од првиот базен истекле 184 m^3 вода, а од вториот базен истекле 346 m^3 , па така во вториот базен останало четири пати помалку вода отколку во првиот базен. Определи го волуменот на базените.
112. Во два сада има вода. Кога од првиот сад ќе се прелеат во вториот сад $3,75\text{ l}$, тогаш во вториот сад ќе има $2,5\text{ l}$ вода помалку отколку во првиот сад. На почетокот во првиот сад имало 20 l вода. Колку литри вода имало на почетокот во вториот сад?
113. Во два сада вкупно има $78\frac{2}{3}\text{ l}$ вода. Ако од првиот сад се прелеат $5\frac{5}{6}\text{ l}$ вода во вториот сад, тогаш во вториот сад ќе има 8 l вода помалку отколку во првиот сад. Колку литри вода имало на почетокот во вториот сад?
114. Имаме две корпи со јаболка. Во првата корпа има 9 kg јаболка повеќе отколку во втората. Кога од првата корпа ќе се префрлат 12 kg јаболка, тогаш во втората корпа ќе има двапати повеќе јаболка отколку во првата корпа. Колку килограми јаболка имало на почетокот во секоја корпа?
115. Во еден магацин има 120 исти големи и 40 исти мали конзерви, кои вкупно имаат маса од 108 kg . Масата на 3 големи конзерви е еднаква на масата на 8 мали конзерви. Определи ги масите на конзервите
116. Тројца рибари вкупно уловиле 135 kg риба. Првиот рибар продал 22 kg , вториот продал 9 kg , а третиот продал 14 kg , по што на секој рибар му останало еднакво количество риба. Колку килограми риба уловил секој од рибарите?

117. Од својата овошна градина лешниците кои ги набрал Самоил ги ставал во вреќи кои собираат 45 kg и забележал дека му останале 31 kg лешници. Неговиот син Горјан пресметал дека ако лешниците се стават во еднаков број вреќи кои собираат 50 kg , тогаш во една вреќа ќе има само 21 kg лешници. Колку килограми лешници се набрани?
118. Сад наполнет со вода тежи 1 kg . Ако се одлее $\frac{2}{7}$ од водата во садот, вкупната тежина ќе се намали за $\frac{1}{4}\text{ kg}$. Определи ја тежината на празниот сад.
119. Ако на едниот тас на вагата ставиме една цигла, а на другиот ставиме $\frac{3}{4}$ цигла и $\frac{3}{4}\text{ kg}$, тогаш вагата е во рамнотежа. Колкава е масата на една цигла?
120. Во една вреќа има 100 kg компири кои содржат 96% вода. По извесно време количеството на водата во компирит се намалило на 95%. Колку килограми компири има сега во вреќата?
121. При ископувањето на камениот јаглен е констатирано дека тој содржи 2% влага. Ископани се 2210 t камен јаглен. На стовариштето овој јаглен впил уште вода, па по извесно време содржел 15% влага. За колку тони се зголемила тежината на јагленот?

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

122. На две полица има вкупно 90 книги. Ако шест книги се преместат од првата на втората полица, тогаш на првата полица ќе има двапати повеќе книги отколку на втората полица. Колку книги има на секоја полица?
123. Секој ученик од едно одделение учествува во една од секциите: литературна, драмска и математичка. Познато е дека во секоја од овие секции членува ист број ученици од ова одделение. Освен тоа бројот на учениците кои членуваат во сите три секции е еднаков на бројот на учениците кои членуваат точно во две секции и е еднаков на бројот на учениците кои членуваат само во една секција. Бројот на учениците во

ова одделение е поголем од 30 и е помал од 35. Колку ученици учат во ова одделение?

124. Во три корпи вкупно има 141 јаболко. Ако од првата корпа се преместат 5 јаболка во втората и 11 јаболка во третата, тогаш во сите три корпи ќе има еднаков број јаболка. Колку јаболка имало во секоја корпа на почетокот?
125. Во една кутија има 15 црни, бели и црвени топчиња, од секоја боја најмалку по едно топче. Бројот на црвените топчиња е седум пати помал од бројот на белите топчиња. По колку топчиња има во кутијата од секоја боја?
126. Во три есенски дена температурата се движела вака: од 6 часот наутро, па во текот на денот температурата се зголемува двојно, а преку ноќта до 6 часот наутро опаѓа за 8°C . Колку изнесувала температурата првиот ден во 6 часот наутро, ако третиот ден во 6 часот наутро таа изнесувала 0°C .
127. Должината на чекорот на Самоил е 75 cm , а должината на чекорот на неговиот син Горјан е 45 cm . Колку чекори треба да направи Горјан за да го помине истиот пат кој Самоил го поминува со 900 чекори.
128. Во училиштата трпезарија се наоѓаат определен број маси. Некои маси имаат по 3, а некои по 4 ногарки. Освен тоа, околу секоја маса има по четири столици и секоја столица има по 4 ногарки. Сите столици вкупно имаат 176 ногарки, а сите маси вкупно имаат 39 ногарки. Колку маси имаат по 3, а колку по 4 ногарки?
129. Во една продавница има 800 тетратки и таа работи од понеделник до петок. Во една седмица биле продадени сите тетратки така што во секој ден биле продадени по 40 тетратки повеќе од претходниот ден. По колку тетратки биле продадени секој ден од таа недела?
130. Учениците од едно училиште тргнале на екскурзија. Сообраќајното претпријатие за превоз на учениците испратило определен број автобуси. Ако во секој автобус се сместат по 40 ученици, тогаш ќе недостасуваат 5 автобуси, а ако во секој автобус се сместат по 50 ученици, тогаш два автобуси ќе останат празни. Колку ученици тргнале на екскурзија и колку автобуси испратило сообраќајното претпријатие?

131. Зајакот се наоѓа на 60 свои скокови пред кучето, кое го пристигнува. Додека зајакот прави 9 скока, кучето прави 6 скока, но 4 скока на кучето се еднакви на 7 скока на зајакот. Колку скока треба да направи кучето за да го стигне зајакот?
132. Алекса отпил $\frac{1}{6}$ од полна чаша црно кафе и чашата ја дополнил со млеко, правејќи бело кафе. Потоа отпил $\frac{1}{3}$ од белото кафе и чашата ја дополнил со млеко, а потоа отпил $\frac{1}{2}$ од белото кафе и чашата ја дополнил со млеко. На крајот Алекса го испил последното добиено бело кафе. Што испил повеќе Алекса, кафе или млеко.
133. Компанија за производство на чевли, од вкупното месечно производство, произведува $\frac{3}{8}$ парови женски чевли, $\frac{1}{4}$ парови машки чевли и 6000 парови детски чевли. Определи го месечното производство на оваа компанија.
134. Горјан прочитал една книга за три дена. Првиот ден прочитал $\frac{3}{8}$ од книгата, вториот ден прочитал $\frac{5}{12}$ од книгата, а третиот ден прочитал $\frac{1}{6}$ од книгата и уште 10 страници. Колку страници имала книгата?
135. Матеј прочитал една книга за 3 дена. Првиот ден прочитал $\frac{1}{5}$ од целата книга и уште 16 страници, вториот ден прочитал $\frac{3}{10}$ од остатокот и уште 20 страници, а третиот ден прочитал $\frac{3}{4}$ од новиот остаток и последните 30 страници. Колку страници имала книгата?
136. Горјан читал книга. Тој првиот ден прочитал $\frac{3}{8}$ од книгата, а вториот ден прочитал $\frac{1}{5}$ од книгата, со што во текот на двата дена прочитал 12 страници повеќе од половината книга. Колку страници имала книгата?
137. На една училишна прослава присуствувале ученици, наставници и родители. На прославата имало 16 ученици и 4 наставници, а $\frac{5}{12}$ од присутните биле татковци и $\frac{1}{4}$ од присутните биле мајки. Колку луѓе присуствувале на прославата?

138. Наставникот Илија на општинскиот натпревар по математика довел 40 свои ученици. Еден од членовите на комисијата го праша: „На колку ученици им предаваш, кога толку многу учебици си довел на натпревар?“ Илија одговорил: „Доведов две третини од третина од вкупниот број ученици на кој им предавам. Пресметај!“ Определи го бројот на учениците на кои им предава наставникот Илија?
139. Во едно училиште има 760 ученици и наставници. Бројот на момчињата е осум пати поголем од бројот на наставниците, а бројот на девојчињата спрема бројот на момчињата се однесува како 5:4. Колку наставници има во ова училиште, а колку момчиња и колку девојчиња?
140. Група ученици решиле да одат на излет. Од нив 25% биле девојчиња. Меѓутоа, едно девојче се откажало и наместо неа отишол нејзиниот брат, па така на излетот имало 20% девојчиња. Колку момчиња и колку девојчиња имало на излетот?
141. Мајката месила колачи за своите деца: Кате, Маја и Владо. Требало секој да добие еднаков број колачи. Меѓутоа, Кате стигнала дома прва, зела третина од сите колачи и отишла да си игра, Потоа дошла Маја и мислејќи дека дошла прва, зела третина од преостанатите колачи и отишла да си игра. На крајот дошол Владо и зел третина од преостанатите колачи, по што останале 8 колачи. Колку колачи месила мајката?
142. Марија, Кате и Јана купиле јајца, помалку од 100. Марија зела третина од јајцата, Кате зела третина од преостанатите јајца, Јана зела третина од преостанатите јајца и јајцата кои останале ги поделиле на три еднакви дела. Колку јајца вкупно купиле Марија, Кате и Јана и колку јајца добила секоја од нив?
143. Мајката купила чоколадни бомбони. Владимир изел $\frac{1}{3}$ од купените бомбони и уште 2 бомбони, Мајда изела $\frac{1}{4}$ од купените бомбони и уште 1 бомбона, а Катерина изела $\frac{1}{2}$ од бомбоните кои останале по Владимир и Мајда. Потоа останале само $\frac{1}{6}$ од почетното количество бомбони. Колку бомбони купила мајката?

144. Ана решавала математички задачи од понеделник до сабота. Таа вкупно решила 246 задачи и тоа така што секој следен ден решавала 4 задачи повеќе отколку што решила претдховниот ден. Колку задачи решила Ана во среда?
145. На еден натпревар по математика 14 ученици ги решиле сите задачи, 32% од учениците решиле некои од задачите, а 12% од учениците не решиле ниту една задача. Колку ученици учествувале на овој натпревар?
146. Два работника работат иста работа. Првиот работник ја натфрлил нормата за 50%, а вториот за 20%.
- а) Ако се земе дека норма е работата која ја завршил вториот работник, определи за колку проценти ја натфрлил нормата првиот работник.
- б) Ако се земе дека норма е работата која ја завршил првиот работник, определи за колку проценти вториот работни ја потфрлил нормата.
147. Буре се полни со вода со помош на една славина. Ако славината делимично се затвори, протокот на водата низ неа се намалува за 10%. За колку проценти се зголемува времето на полнење на бурето при вака намален проток на вода?
148. При мрзнењето на водата волуменот се зголемува за $9\frac{1}{11}\%$. За колку проценти се намалува волуменот на парче мраз кога тоа ќе се стопи?
149. Ов вкупниот број ученици запишани во едно училиште на почетокот на учебната година 43% биле девојчиња. Во текот на учебната година од училиштето се опишале 14 девојчиња и 36 момчиња, па на крајот на учебната година 44% од вкупниот број ученици биле девојчиња. Колку ученици биле запишани на почетокот на учебната година и колку момчиња имало во ова училиште на крајот на учебната година?
150. На примениот испит за упис во Математичкото училиште требало да се решат 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 4 бода, а за секоја нерешена или неточно решена задача се одземаат 3 бода. Горјан усвоил 28 бода. Колку задачи точно решил Горјан?
151. За превоз на 528 ученици автопревозникот упатил автобуси со по 36 седишта и автобуси со по 24 седишта. Вкупниот број автобуси бил 18. Колку автобуси биле со по 36 седишта?

152. Воз се состои од 11 вагони и во нив има 350 патници. Во било кои три последователни вагони, има вкупно 99 патници. Колку патници има во шестиот вагон?
153. Автобус на градски сообраќај тргнал од почетната станица со определен број патници. На првата станица се симнале $\frac{1}{9}$ од патниците, на втората станица бројот на патниците во автобусот се зголемил за $\frac{3}{4}$ од бројот на патниците кои во тој момент биле во автобусот, а на трета станица излегле $\frac{6}{7}$ од патниците кои со автобусот стигнале на станицата. Потоа во автобусот останале 16 патници. Колку патници имало во автобусот кога тој тргнал од почетната станица?
154. Од сите ученици на едно училиште 174 не отишле на излет, а останатите отпатувале во 18 исти автобуси, при што во секој автобус имало по 5 ученици повеќе отколку што бил бројот на седиштата во автобусот. Ако во секој автобус влегле онолку ученици колку што имало седишта во автобусот, тогаш ќе биле потребни уште 3 автобуси, но во еден од автобусите ќе останале 6 празни седишта. Колку ученици учеле во ова училиште?
155. Во три скопски населби живеат вкупно 36000 жители. Колку жители има во секоја населба, ако е познато дека $\frac{2}{3}$ од бројот на жителите во првата населба е еднаков на 0,5 од бројот на жителите во втората населба и на $\frac{2}{5}$ од бројот на жителите во третата населба?
156. Во еден овоштарник дрвјата се засадени по 20 во ред. Ако во овоштарникот биле засадени три реда помалки и во секој ред по 25 дрвја, тогаш во овоштарникот ќе имало 40 овошки повеќе. Колку редови дрвја биле засадени во овој овоштарник?
157. Климе поседува 10 чамци за изнајмување. Некои чамци имаат 6 седишта, а некои по 4 седишта. Вкупниот број седишта во чамците е еднаков на 46. Колку чамци се со по 6, а колку со по 4 седишта?

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Колку елементи може да има множеството A ако $A \cup B$ има 9 елементи и $A \cap B$ има 3 елементи.
2. Дадени се множествата $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Запиши ги сите подредени парови (x, y) такви што $x \in A, y \in B$ и $x \leq y$.
3. Определи ги сите елементи на множеството A ако
$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 7, |x| > 2, x > -7\}.$$
4. Кои од следните тврдења се вистинити:
 - а) $\{100 - 50 : 2, 32 \cdot 16\} \not\subseteq \{8 \cdot 64, 25, (11 - 11) : 11\}$,
 - б) $\{(6 - 6) : 1, (7 - 7) \cdot 1, 12 \cdot 12 \cdot (12 - 12)\} \subseteq \emptyset$,
 - в) $\{(111 - 11) : (28 - 3), 4\} \subseteq \{4\}$.
5. Дадени се множествата $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -5, x \leq 1\}$ и $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}$. Определи го множеството
$$(A \cup B) \setminus (C \cap B).$$
6. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x - 1 \in A\}$, $C = \{x \mid x - 1 \in B\}$. Определи ги множествата $A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus A$.
7. Дадени се множествата
$$A = \{1, 8, 9, 10\}, B = \{x \mid x - 3 \in A\} \text{ и } C = \{x \mid x + 2 \in B\}.$$
Определи ги множествата $A \cap B$, $(C \setminus A) \cup (A \setminus C)$. Докажи дека важи
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (A \cap C).$$
8. Определи го множеството B , ако за множествата A, B и C важи
$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\}, A \cap C = \emptyset, A \setminus B = \{e, m\} \text{ и } C \setminus B = \{c, p\}.$$
9. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$. Определи го множеството X за кое важи $A \cup X = A$ и $B \cap X = A \setminus (A \cap B)$.

10. Дадени се множествата $A = \{a \mid a \in \mathbb{N}, a \leq 7\}$ и $B = \{b \mid b \in \mathbb{N}, 4 \leq b < 9\}$.
Опреди го множеството C за кое важи
$$C = \{c \mid c \in \mathbb{N}, c = a - b, a \in A, b \in B\}.$$
11. Опреди ги сите множества X за кои важи
$$X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 5\}.$$
12. Опреди ги сите множества X за кои важи $\{1, 2, 5, 8\} \cup X = \{1, 2, 5, 8\}$.
13. Опреди го множеството P , ако за множествата M, N и P важи
$$M \cup N \cup P = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M \cap N \cap P = \{1, 4\}, N \setminus P = \{2, 5\} \text{ и } P \setminus M \neq \emptyset.$$
14. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. Опреди го множеството X за кое се исполнети равенствата $A \cap X = \{3, 4\}$ и $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
15. Опреди го множеството C , ако за множествата A, B и C важи
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B \cap C = \{1, 4\},$$

$$B \setminus C = \{2, 5, 6\} \text{ и } C \setminus A \neq \emptyset.$$
16. Дадени се множествата $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, d, f\}, C = \{b, e, f, g\}$ и $D = \{a, f, g, h\}$. Опреди го множеството S за кое важи
$$S \subseteq A, S \cap (B \cup D) = \emptyset, (A \cap C) \setminus S = \emptyset \text{ и } \{c\} \setminus S = \{c\}.$$
17. Опреди го множеството N ако:
$$M \cup N \cup P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, M \cap P = \emptyset,$$

$$M \setminus N = \{6, 8\}, P \setminus N = \{3, 2\}.$$
18. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 2008, 2009\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A \cup B = S, A \cap B = \emptyset$ и збирот на елементите на A е еднаков на збирот на елементите на B .
19. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Опреди ги сите множества A, B и C кои ги задоволуваат следниве услови:
$$A \cup B \cup C = S, A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset,$$

множеството A има помалку елементи од множеството B , множеството B има помалку елементи од множеството C и збирот на елементите на множествата A, B и C е еднаков.

20. На правата p последователно се земени точки A, B, C и D . Определи го множеството $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB)$.
21. Во еден хотел престојувале 100 туристи. Десет туристи не знаеле ниту германски ниту француски јазик, 75 туристи знаеле германски, а 83 туристи знаеле француски јазик. Колку туристи ги знаеле двата јазика?
22. Од 1250 ученици во едно училиште 570 ученици се занимаваат со кошарка, 280 ученици се занимаваат со фудбал, а 542 ученика не се занимаваат со овие спортови. Колку ученици се занимаваат и со двата спорта?
23. Во едно училиште работат 60 наставници. Од нив 39 пијат кафе, 28 пијат чај и 16 пијат и кафе и чај. Дали во училиштето има наставници кои не пијат ниту чај ниту кафе?
24. Во една група од 40 луѓе 15 знаат француски јазик, 13 знаат англиски јазик и 6 ги знаат и двата јазика. Дали во групата има луѓе кои не знаат ниту еден од двата јазика?
25. Во едно училиште има 500 ученици. Баскет играат 325 ученици, фудбал играат 250 ученици, а 35 ученици не се занимаваат ниту со баскет, ниту со фудбал. Колку ученици играат само баскет, а колку само фудбал? Колку се занимаваат и со двата спорта?
26. Сите ученици на едно одделение се членови на една од секциите: кошаркарска, рецитаторска и математичка. Само 6 ученици се членови на сите три секции, а 12 ученици се членови на повеќе од една секција. Понатаму, 8 ученици се членови на математичката и кошаркарската секција, а 9 ученици се членови на математичката и рецитаторската секција.
Колку ученици учествуваат во работата на рецитаторската и кошаркарската секција, а не се членови на математичката секција?
27. Од 70 ученици во шесто одделение 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се занимаваат со спорт. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот пета 6 спортисти, додека 8 спортисти членуваат во драмската секција. Три ученика се членови на сите три секции. Колку ученици не членуваат во ниту една секција, а колку ученици се занимаваат само со спорт?

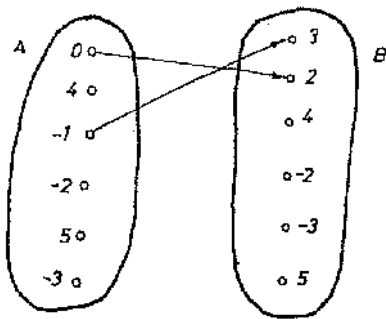
28. Колку учесници биле на конференција на која секој учесник говори најмалку еден од јазиците француски, англиски и руски, ако се знае дека:
- два учесника ги говорат сите три јазици,
 - девет учесници говорат само француски и англиски јазик,
 - тринаесет учесници говорат француски и руски јазик,
 - дванаесет учесници говорат руски и англиски јазик,
 - дваесет и девет учесници говорат само англиски јазик,
 - шест учесници говорат само француски јазик и
 - седум учесници говорат само руски јазик.
29. Во Крушево имало 30 занаетчии (некои имале и по два занаети). Деветмина биле сидари, 22 биле бравари и 11 биле лимари. Ниту еден сидар не бил истовремено и лимар. Сидари кои истовремено биле и бравари биле двапати помалку од лимарите кои биле и бравари. Колку занаетчии има кои имале само по еден занает и тоа од секој вид занает?
30. Од 70 ученици во шесто одделение точно 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се спортисти. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот има 6 спортисти, додека во драмската секција има 8 спортисти. Тројца спортисти се членови и на хорот и на драмската секција.
Колку ученици не членува во ниту една од споменатите секции?
Колку ученици се занимаваат само со спорт?
31. Во едно училиште се продаваат три списанија *A*, *B* и *C*. Списанието *A* го купуваат 120 ученици, списанието *B* го купуваат 90 ученици и списанието *C* го купуваат 180 ученици. Списанијата *A* и *C* ги купуваат 60 ученици, а списанијата *A* и *B* 16 ученици. Точно два ученика не купуваат ниту едно списание.
а) Колку ученици купуваат точно две списанија?
б) Колку ученици учат во ова училиште?
32. Во еден тим од 25 преведувачи 19 говорат англиски јазик, 19 ^{германски}, 11 француски, 12 преведувачи говорат англиски и германски, 5 англиски и француски, 5 говорат германски и француски, 2 ги говорат сите тријазика.
а) Колку преведувачи говорат француски, но не говорат и англиски јазик?

б) Колку преведувачи говорат точно два јазика?

в) Колку преведувачи говорат само еден јазик:

33. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 4, ниту со 6.
34. Горјан ги запишал сите природни броеви од 1 до 1000. Прво ги пречкртал броевите кои се деливи со 4, па ги пречкртал броевите кои се деливи со 6 и на крајот ги пречкртал броевите кои се деливи со 10. Колку броеви останае непречкртани?
35. На училишниот натпревар по математика учествувале 100 ученици и секој од нив решавал по 3 задачи. Само 3 ученици не решиле ниту една задача. Од останатите ученици 65 ја решиле првата или третата задача, а 61 ученик ја решил втората или третата задача. Колку ученици ја решиле првата, колку втората и колку третата задача?
36. Нека A е множеството од сите правоаголници кај кои мерните броеви изразени во сантиметри се природни броеви и кои имаат плоштина 12 cm^2 .
- а) Определи го множеството A .
- б) Која релација може да се забележи во ова множество? Нацртај го графикот на оваа релација.

37. На цртежот десно е прикажано дел од придружувањето на броевите меѓу множествата A и B , при што според правилото на бројот x му е придружен бројот $f(x) = ax + b$ каде a и b се некои броеви. Определи го правилот и доврши го започнатото придружување.



IV.2. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

38. Колку прадедовци имале заедно сите твои прадедовци?
39. Штетните инсекти губари ја нападнаа шумата и секој ден имало двапати повеќе заразени дрвја од предходниот. Целата шума била заразена за 8 дена. За колку дена била заразена половината шума?
40. Четири мачки за 4 дена фатиле 4 глувци. За колку дена 100 мачки ќе фатат 100 глувци?
41. Дедо Милан во 1996 година го прославил својот 22-ри роденден, а неговиот син Петар го прославил својот 58-ми роденден. На кој датум е роден дедо Милан?
42. Во кутија се наоѓаат 10 црвени, 8 плави, 6 зелени и 4 жолти пенкала. Во темница влечеме пенкала едно по едно. Колку најмалку пенкала мораме да извлечеме за да бидеме сигурни дека сме извлекле:
- а) едно црвено пенкало;
 - б) едно плаво и две жолти пенкала;
 - в) не помалку од 4 пенкала иста боја;
 - г) барем по едно пенкало од секоја боја;
 - д) две пенкала од различни бои?
43. Група од 21 деца треба да поделат 200 ореви. Докажи дека без оглед на тоа што како ќе постапат секогаш ќе се најдат две деца со еднаков број ореви.
44. Во торба има 20 бели и 40 црни ракавици. Колку најмалку ракавици без да се гледа треба да се извадат за сигурно меѓу нив да има:
- а) барем еден пар иста боја ракавици;
 - б) барем еден пар бели ракавици;
 - в) барем еден пар црни ракавици;
 - г) повеќе црни отколку бели ракавици?
45. Во кутија се наоѓаат 5 пара црни и 5 пара кафеави чевли со иста големина и ист изглед. Кој е најмалиот број чевли што треба да го извадиме без гледање за да сме сигурни дека сме извадиле еден пар чевли (лев и десен чевел од иста боја).

46. Во еден рибник има 30 штуки кои се јадат меѓу себе. Една штука се заситува ако изеде 3 штуки (не е важно дали се гладни или сити). Колку најмногу штуки може да се заситат.
47. На сите поставени прашања Владимир одговара со „Да!“ или со „Не!“ и секогаш ја говори вистината. Кое прашање треба да му се постави на Владимир двапати последователно почетокот на разговорот за да тој даде два различни одговора?
48. Петар и Љупчо се браќа близнаци кои се разликуваат само по тоа што едниот секогаш лаже, а другиот секогаш ја говори вистината. Не секое поставено прашање тие одговараат со „Да!“ или со „Не!“. Треба на Петар и Љупчо да им се постави едно исто прашање, така што и двајцата ќе дадат ист одговор. Наведи едно прашање на кое двајцата ќе одговорат со „Да!“ и едно прашање на двајцата ќе одговорат со „Не!“.
49. Пет другарки седат во еден ред во кино сала на пет седишта едно до друго, нумерирани со броевите од 1 до 5. Ана излегла да купи пуканки, а откако се вратила видела дека Јана се преместила за две седишта во десно, Кате - едно седиште во лево, а Дијана и Наташа си ги замениле местата, така што и останало да седне на седиштето со број 3. На кое седиште седела Ана пред да стане?
50. Секој од учениците Драган, Зоран и Милан свири само на еден од инструментите: труба, гитара и виолиба. Определи кој ученик на кој инструмент свири, ако се знае дека само еден од следниве искази е вистинит:
- 1) Драган свири на труба.
 - 2) Зоран не свири на труба.
 - 3) Милан не свири на виолина.
51. На прошетка биле три наставници: математичар, физичар и хемичар. Нивните презимиња се: Бојкоски, Ристески и Петрески. Мешу нив математичарот е најмлад и тој нема ниту браќа ниту сестри. Петрески е оженет со сестрата на Бојкоски, а е постар од физичарот. Определи ги презимињата на математичарот, физичарот и хемичарот.
52. По натпреварот во маратон на званичниот семафор е одјавено дека првите три места ги освоиле:
- 1) Милан Христовски,

- 2) Јане Средоески и
- 3) Милош Спасовски.

По кратко време спикерот им се извинил на гледачите и објавил дека соопштениот редослед не е точен. Имено, ниту едно име и ниту едно презиме не соодветствува на освојувачите на првите три места, а исто така ниту едно име не соодветствува на напишаното презиме. Спикерот додал дека победил Средоески. Определи го точниот редослед, како и имињата на натпреварувачите.

53. На училишниот маратон четири ученици A, B, C и D ги освоиле првите четири места. На прашањето кој од нив кое место го освоил, тие дале три различни одговори:

- 1) C беше втор, а D трет.
- 2) C беше прв, а B втор.
- 3) A беше втор, а D четврт.

Во секој од овие одговори еден дел е точен, а другиот не е точен. Определи кое место го освоил секој од четирите ученици.

54. На прашањето кој колку години има тројца од учениците A, B, C и D ги дали следниве три одговори:

- 1) B има 13 години, C има 14 години.
- 2) C има 13 години, D има 11 години.
- 3) A има 13 години, D има 10 години.

Сите ученици имаат различен број години и во секој од дадените одговори еден дел е точен, а другиот е неточен. Определи колку години имасекој од учениците A, B, C и D .

55. Павел, Борис и Владимир се пријатели и живеат во три различни градови: Пехчево, Битола и Велес. Нивните девојки се Гордана, Даница и Епсимија. Познато е дека:

- 1) Епсимија е девојка на Борис.
- 2) Владимир не е од Велес, а Борис не е од Битола.
- 3) Гордана е девојка на битолчанецот.
- 4) Даница не е девојка на велешанецот.

Во кој градови живее секој од тројцата пријатели?

56. Пиратот Црвена брада нашол четири пергаменти на кои е запишана информација за тоа на кој од четирите острови: Ајланд, Деланд, Беланд и Целанд се наоѓа некое закопано богатство. Пергаментите се прикажани на долните цртежи. Од четирите пергаменти, само на еден

е запишана точна информација. На кој од овие четири острови е закопано богатството?



57. Во една група од пет другари, Томе, Диме, Борис, Симе и Петар, некои од другарите секогаш лажат, а некои секогаш ја говорат вистината. Секој од нив има еден плод: круша или јаболко. На прашањето кој што има, тие одговориле:

Томе: Јас имам круша. Петар има јаболко.

Диме: Јас имам круша. Денес е среда.

Борис: Симе и јас имаме јаболка. Петар има круша.

Симе: Томе има круша. Денес е петок.

Петар: Јас имам јаболко. Диме има круша.

Кој каков плод имал?

58. Три девојчиња: Жанета, Даница и Лилјана имаат по едно домашно милениче – куче, маче и зајаче. Тие ги дале следниве изјави:

Жанета: Даница има зајаче.

Даница: Јас немам куче.

Лилјана: Жанета има куче.

Само едно од трите девојчиња кажало вистина. Определи го домашното милениче на секое од девојчињата.

59. Околу тркалезна маса седнале 84 лица, некои од кои се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој од присутните на масата кажал дека од двете негови страни седат витез и лажго. Колку витези седеле на масата?
60. Од три девојчиња и три момчиња секое момче познава точно две девојчиња и секое девојче познава точно две момчиња. Докажи дека

момчињата и девојчињата може да се поделат, момче и девојче во секој пар, така што во секој пар се наоѓаат познаници. (Познанството е симетрична релација.)

61. Во колона, еден за д друг, се наоѓаат учениците A, B, C, D и E . Меѓу учениците A и B , а исто така и меѓу учениците D и E се наоѓаат точно едно момче и едно девојче. На првото и последното место не се наоѓа девојче, а не се ниту учениците A и E . Зад ученикот D се наоѓа само едно девојче.
Како се распоредени учениците A, B, C, D и E ? Со кои букви се означени момчињата, а со кои девојчињата?
62. На складиште се наоѓаат шајки спакувани во кутии од 16 kg , 17 kg и 40 kg . Како магационерот не растурајќи ги кутиите на купецот му испорачал точно 100 kg шајки?
63. Семејството Петровски се состои од татко (80 kg), мајка (65 kg), син (50 kg) и ќерка (40 kg). Тоа треба со чамец да ја премине реката. Како тоа ќе го направи, ако чамецот со кој треба да преминат може да пренесе маса од најмногу 100 kg ? (Сите членови на семејството знаат да веслаат.)
64. Бранко, Ванчо и Дарко биле на риболов. Масата на рибите кои ги уловил Бранко била 11 пати поголема од масата на рибите кои ги уловил Ванчо. Бранко му ги дал двете свои најлесни риби на Дарко и тогаш масата на преостанатите риби станала 8 пати поголема од масата на рибите уловени од Ванчо. Колку риби уловил Бранко?
65. Горјан има вага со еден тег од 250 g и 9 kg брашно. Како со помош на само три мерења ќе измери точно 2 kg брашно?
66. Со помош на вага треба да ги измериме сите целобројни тежини од 1 kg до 13 kg . Определи го најмалиот број тегови кои ни се потребни и нивните маси.
67. Имаме канта од 4 литри и канта од 9 литри. Како со нивна помош од чешма ќе донесеш точно 6 литри вода?
68. Располагаме со два празни сада, еден со волумен 11 литри, а друг со волумен 7 литри. Како со помош на овие садови најбрзо може во празно буре да се турат точно 6 литри вода?

69. Како со помош на садови од 3л и 5л во буре може да се турат точно 4л вода?
70. Како со помош на два сада со волумени 3л и 5л од чешма ќе налееш точно 4л?
71. Како со помош на садови од 3 литри и 5 литри во канта од 20 литри од чешма ќе налееш:
- 1) 1 литар вода,
 - 2) 7 литри вода.

IV.3. НУМЕРИЧКИ ЗАГАТКИ

72. За колку е збирот на првите 2019 парни броеви поголем од збирот на првите 2019 непарни броеви?

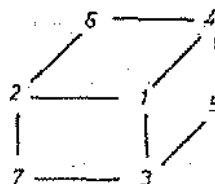
73. На местата на симболите $\oplus, \otimes, \odot$ треба да се стави по еден знак од основните аритметички операции така што ќе биде точно равенството:
- $$1 \oplus 2 \otimes 3 \oplus 4 \oplus 5 \odot 6 \oplus 7 \odot 8 \odot 9 = 1.$$

На исти симболи соодветствуваат исти знаци, а на различни симболи соодветствуваат различни знаци.

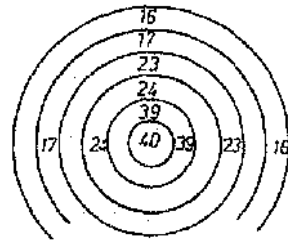
74. Во празните полиња на табелата прикажана на цртежот запиши броеви така што збирот на броевите запишани во секои три последователни хоризонтални и секои три последователни вертикални броеви ќе биде еднаков на 12.

	5								
						1			
6									
			2						

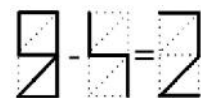
75. Дали може човек да живее два милиони часови?
76. На цртежот десно елементите на множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ се распоредени така што збирот на броевите запишани во темињата на секој четириаголник е еднаков на 13.
- Распореди ги елементите на множеството A така што збирот на броевите запишани во темињата на секој четириаголник е еднаков на 16.



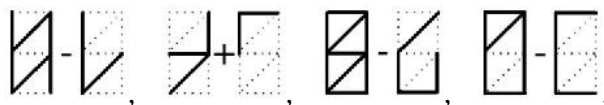
77. На цртежот десно е дадена кружна мета на која се означени поените за соодветните погодоци. Определи го најмалиот број на стрелања и како треба стрелец да ја погодува така што тој ќе освои точно 100 поени.



78. Горјан во книжарницата половина од парите кои ги имал ги потрошил за книга, третина за комплет водени боици и шестина за хемиско пенкало. Колку пари му останале на Горјан?
79. Едно јајце чини 4 денари и половина јајце. Колку пари чинат шест јајца?
80. Јован набрал корпа со јаболка. Васко зел половината од јаболката и половина јаболко. Потоа Васка зела половина од преостанатите јаболка и половина јаболко и на крајот Марија зела половина од преостанатите јаболка и половина јаболко, по што во корпата останале 5 јаболка. Колку јаболка набрал Јован?
81. Во три корпи има 12, 14 и 22 јаболка. Со три префрлања треба да се изеднали бројот на јаболката во трите корпи. Префрлањата се вршат така што од една корпа се префрлаат јаболка во втора корпа онолку јаболка колку што веќе има во втората корпа.
82. На ученичкиот маратон учествувале 2019 ученици, кои ги носат броевите 1, 2, 3, ..., 2019 и во овој редослед истите се наредени во редица. По издадена наредба секој ученик може со било кој ученик да го замени местото или да остане на своето место. Дали е можно по две наредби на учениците да се добие разместувањето 2019, 1, 2, 3, ..., 2018? Ако има 2020 натпреварувачи, дали може по две наредби да се добие разместувањето 2020, 1, 2, ..., 2019?
83. За телефонска централа се поврзани 55 телефонски броеви. Дали може овие телефони да се поврзат така што секој телефон директно ќе биде поврзан со точно 11 други телефони?
84. Александар сака да кодира разни броеви со користење на рускиот поштенски код и основните математички операции. На пример, бројот 2 може да го запише како што е прикажано на цртежот

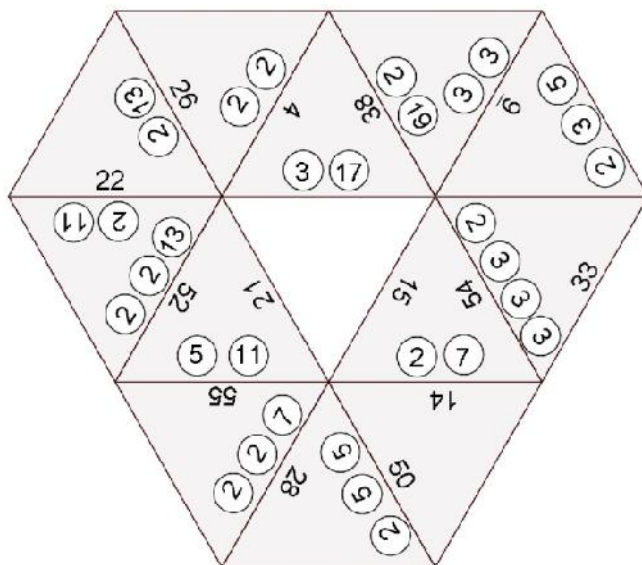


дно. Тој одлучил да ја кодира на на овој начин, годината во која Република Македонија се оддели од Југословенската федерација, па ги запишал изразите прикажан на долниот цртеж:



Која година Република Македонија се оддели од Југословенската федерација?

85. На долниот цртеж е прикажана бројна слојувалка.



Откриј го правилото според кое истата е направена, а потоа нацртај го триаголникот кој треба да се постави во средината на слојувалката.

IV.4. ГЕОМЕТРИСКИ ЗАГАТКИ

86. Зоран и Дарко ја играат следнава игра. На лист во облик на паралелограм наизменично цртаат еднакви кругови, кои меѓу себе не се преклопуваат и не излегуваат надвор од листот. Победник е играчот кој последен ќе нацрта круг. Докажи дека Зоран, ако го црта првиот круг, може да игра така што ќе победи без разлика како игра Дарко.
87. Должината на патот од местото A до местото B е еднаква на најдолгата страна на паралелолипедот кој се добива кога сите кубни милиметри на една коцка со страна $1m$ ќе се наредат во права линија.

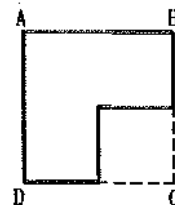
Колку време му е потребно на автомобил кој се движи со брзина од 50 km/h да стигне од местото A во местото B ?

88. Дрвена коцка со волумен 1 m^3 е обоена со црвена боја, а потоа е расечена на коцки со волумен 1 dm^3 .
- а) Колку од овие коцки имаат 3 обоени страни, 2 обоени страни, 1 обоена страна и ниту една обоена страна.
- б) Определи ја вкупната плоштина на коцките кои се добиени со расекнувањето.
89. Распoredи 10 точки на 5 отсечки така што на секоја отсечка припаѓаат по 4 точки.
90. Во рамнината се дадени 7 точки такви што точно 4 припаѓаат на една права и не постојат други три точки кои припаѓаат на иста права. Колку прави се определени со овие точки.
91. Во рамнината се дадени четири отсечки чии крајни точки не се совпаѓаат. Определи го бројот на отсечките кои се определени со нивните крајни точки.
92. Во рамнината се дадени пет прави такви што секои две се сечат и не постојат три прави кои се сечат во една точка. На колку дисјунктни делови е поделена рамнината со овие прави?
93. Определи го најмалиот број прави кои треба да се повлечат така што рамнината ќе биде поделена на седум дисјунктни области? Колку од овие области се ограничени, а колку се неограничени?

94. Фигурата дадена на цртежот десно подели ја на четири складни делови така што во секој дел да се наоѓа точно по една ѕвезда.

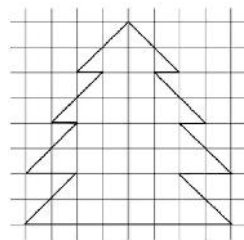


95. Од квадратот $ABCD$ е исечена една негова четвртина (види цртеж). Подели ја добиената фигура на четири складни делови.



96. Правоаголник со димензии 9 cm и 4 cm расечи го на три правоаголници така што од нив може да се состави квадрат.

97. На цртежот десно во квадратна мрежа е нацртана елка. Подели ја елката на четири дела и од добиените делови состави квадрат.

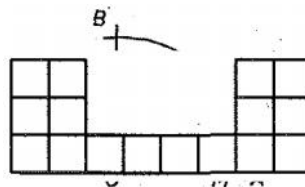


98. Парче картон со правоаголен облик има плоштина 2012 cm^2 , а должините на страните му се изразени со цели броеви во сантиметри. Од овој картон треба да се исечат еднакви квадрати чии должини на страни исто така се изразени со цели броеви. Кој е најголемиот, а кој најмалиот број квадрати кои може да се исечат така што неискористениот дел од картонот има најмала можна плоштина?

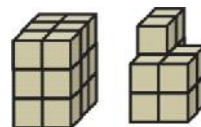
99. Околу темето на правиот агол AOB е опишана кружница со радиус 1 cm . Нека X е произволна точка од лакот AB и M и N се проекциите на точката X врз краците OA и OB , соодветно. Определи ја дожината на отсечката MN .

100. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја:

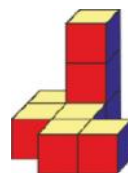
- 1) само со две прави на 6 делови
- 2) на четири исти делови (деловите може да се вртат и превртуваат).



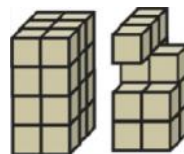
101. Парче направено од дрво како на левиот цртеж, е поделено на две парчиња. Едното од добиените парчиња е прикажано на цртежот десно. Како изгледа второто парче од направената поделба?



102. Тони почнал да гради голема коцка со помош на идентични мали коцки. Тој веќе наредил неколку мали коцки, како што е прикажано на цртежот десно. Кој е најмалиот број на мали коцки што треба Тони да ги дореди за да направи голема коцка?



103. Парче направено од дрво како на левиот цртеж, е поделено на две парчиња. Едното од добиените парчиња е прикажано на цртежот десно. Како изгледа второто парче од направената поделба?

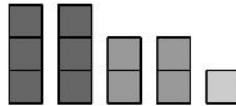
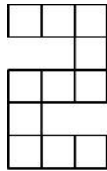


Логика и комбинаторика

114. Ако 7 зајаци треба да се сместат во 2 кафеза, тогаш постои кафез во кој се наоѓаат барем 4 зајаци. Докажи.
115. Во основното училиште „Петар Поп Арсов“ има во секое одделение по 4 (вкупно 20) паралелки од петто до деветто одделение, а во математичката школи одат 22 ученика. Докажи дека барем 5 од тие ученици одат во исто одделение клас и барем 2 ученика одат во иста паралелка.
116. Имаме 25 гајби со три сорти јаболки. Во секоја гајба јаболката се од иста сорта. Докажи дека постојат најмалку 9 гајби со иста сорта јаболка.
117. Во една кутија се наоѓаат 10 црвени, 20 бели, 30 зелени и 40 сини топки. Колку топки треба да извадиме за да бидиме сигурни дека сме извадиле најмалку 5 топки со иста боја?
118. Во една шума има 7654321 дрвја, и на секое дрво не повеќе од 1000000 листови. Докажи дека во шумата постојат најмалку 8 дрвја со еднаков број на листови.
119. Во едно основно училиште има 987 ученици. Докажи дека во тоа училиште постојат барем два ученика кои имаат исти иницијали.
120. Докажи дека во множество од 2012 произволни природни броеви може да се најдат два броја чија разлика е делива со 2011.

IV.6. ПРЕБРОЈУВАЊА

121. Мери ги запишала сите можни парни броеви со четири различни цифри кои се формирани од цифрите на бројот 2019. Колку броеви запишала Мери?
122. На една дрвена прачка Борис означил цртички со кои прачката ја поделил на 9 еднакви делови. По него Милан на прачката означил цртички со кои прачката ја поделил на 12 еднакви делови. На крајот Ангел означил цртички со кои прачката ја поделил на 15 еднакви делови. Колку цртички имало на крајот на прачката?
123. На колку различни начини може да се прекријат полињата на фигурата прикажана на левиот цртеж со плочките кои се десно од неа?



124. Определи го бројот на различните рамнокраки триаголници чии мерни броеви на должините на страните се природни броеви и кои имаат периметар еднаков на 60 единици?

125. Конкурсите задачи на списанието Питагора ги решавале 22 ученика од 8 училишта. Тие вкупно решиле 50 задачи. Сите ученици од исто училиште решиле еднаков број задачи, а учениците од различни училишта решиле различен број задачи. Секој ученик решил најмалку една задача. Колку ученици решиле точно една задача?

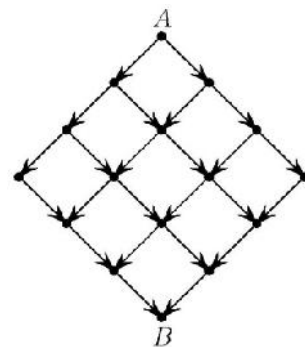
126. Со цифрите 1, 3, 5 и 9 запиши ги сите броеви кои се деливи со 3 и чии цифри се меѓусебно различни.

127. На кружница означив 2 зелени, 3 црвени, 4 сини и 6 жолти точки. Секој две од овие точки ги поврзав со отсечка. Колку отсечки имаат разнобојни крајни точки?

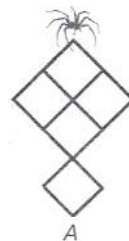
128. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 5 и чиј збир на цифрите на десетките и стотките е еднаков на 12.

129. Четириесет војници носат исти униформи на кои има еднаков број петлици, сошиени една под друга. Петлиците на униформите се или златни или сребрени и секој војник може да ја препознае својата униформа само ако го погледне распоредот на петлиците. Определи го најмалиот број петлици кои може да ги има една униформа.

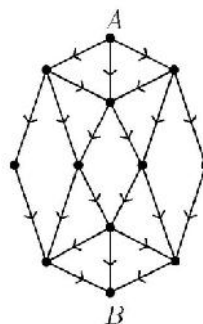
130. По колку различни патишта може на шемата прикажана на цртежот десно, одејќи во насока на стрелките, да се стигне од точката A до точката B?



131. Пајакот треба по пјажината прикажана на цртежот десно да доползи до точката А. По колку различни патишта може да помине пајакот ако ползи само надолу?



132. По колку различни маршрути може да се стигне од точката А до точката В на шемата прикажана на цртежот десно, ако се движиме во насока на стрелките?



133. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои при делење со броевите 5 и 6 даваат исти остатоци.
134. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис се среќава цифрата 6, но не се среќаваат цифрите 0 и 7?
135. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои почнуваат со цифрата 2, завршуваат со цифрата 4 и се деливи со 9.
136. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 1250.
137. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со различни цифри.
138. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2009 и чиј производ на цифри е еднаков на 10.
139. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2012 и чиј збир на цифри е поголем од 26.
140. Павел, Саво и Зоран имаат планински куќи. Од куќата на Павел до куќата на Саво може да се стигне или директно за што има 3 патеки или ако се помине покрај куќата на Зоран. Од куќата на Павел до куќата на Зоран исто така има 3 патеки, а од куќата на Зоран до куќата на Саво има 2 патеки. Павел сака да го посети Саво точно еднаш и да

се врати, но така што иста патека да не користи повеќе од еднаш. Колку различни маршрути може да избере Павел? (Маршрутите кои се разликуваат по насоката на движењето се сметаат за различни.)

141. На колку различни начини Самоил, Фросина и Вера може да се поделат 4 еднакви јаболка и 5 еднакви круши (без да ги сечат) така што секој од нив ќе има барем едно јаболко и барем една круша? Не е задолжително секој да има еднаков број плодови.
142. Во првата фудбалска лига играат 10 екипи. Колку натпревари ќе се одиграат во првенството ако секоја екипа игра точно 4 натпревари со секоја друга екипа?
143. Дадена е коцка со должина на раб 3 dm . Определи го бројот на сечењата со кои коцката ќе се расече на коцки со должина на раб 1 dm .
144. Коцка со раб 4 dm е обоена со црвена боја, а потоа е расечена на коцки со раб 1 dm . Колку од добиените коцки имаат обоени три, две, една и ниту една страна?

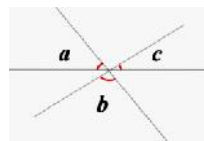
V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Две отсечки имаат еднакви должини. Ако должината на втората отсечка се намали за 10 cm , тогаш третина од должината на првата отсечка ќе биде за 2 cm пократка од должината на втората отсечка. Определи ги должините на почетните отсечка.
2. Една отсечка е подолга од друга отсечка за 90 cm . Ако двете отсечки се пократки за по 20 cm , тогаш првата отсечка ќе биде четири пати подолга од втората отсечка. Определи ги должините на отсечките.
3. На права p последователни се земени точките P, Q и R . Точката M е средина на отсечката PQ , а точката N е средина на отсечката PR . Докажи дека $\overline{QR} = 2\overline{MN}$.
4. Отсечката AB е поделена на три отсечки во однос $2:3:4$. Растојанието меѓу средините на крајните отсечки е еднакво на 6 cm . Определи ја должината на отсечката AB .
5. На права се дадени точките A, B, C и D , последователно. Точките M и N се средини на отсечките AB и BC . Определи ја должината на отсечката CD ако $\overline{AD} = 32\text{ cm}$ и $\overline{MN} = 1,5\text{ dm}$.
6. На права се дадени три точки A, B и C такви што $\overline{AB} = 30\text{ mm}$ и $\overline{AC} = 50\text{ mm}$. Нека точката K е средина на отсечката BC , точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката AC . Определи ги должините на отсечките BC, AK и MN .
7. Дадена е отсечка $AB, \overline{AB} = 20\text{ cm}$. Точката C припаѓа на отсечката AB и е оддалечена од точката B за една петтина од должината на отсечката AB . Точката D е средина на отсечката AC . Определи го растојанието од точката D до средината на отсечката AB ?

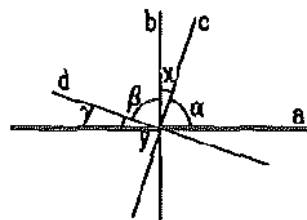
8. Дадена отсечка со три точки е поделена на 4 различни делови. Растојанието меѓу средините на внатрешните делови е еднакво на 6 cm , а растојанието меѓу средините на крајните делови е еднакво на 16 cm . Определи ја должината на дадената отсечка.
9. Дадена отсечка е поделена со три точки на четири дела така што вториот дел е два пати подолг од првиот, третиот дел е три пати подолг од првиот и четвртиот дел е два пати подолг од вториот. Растојанието меѓу средините на првиот и вториот дел е 3 cm . Определи ја должината на оваа отсечка.
10. Должината на отсечката AB е еднаква на 40 cm . Отсечката AB со три точки е поделена на четири дела. Растојанието меѓу средините на крајните делови е 33 cm . Определи го растојанието меѓу средините на внатрешните делови.
11. На отсечката MN се распоредени точките A, B, C, D (во овој редослед) така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на втората и четвртата отсечка е еднакво на 28 cm , а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е еднакво на 51 cm . Определи ја должината на отсечката MN .
12. Отсечката AB со точката C е поделена на два дела кои по должина се разликуваат за 1 cm . Средината на пократкиот дел е пет пати поблиску до точката A отколку до точката B . Определи ја должината на отсечката AB .
13. Дадена е отсечка AB . Само со помош на линијар и шестар подели ја оваа отсечка на три еднакви делови.
14. Основата на зграда на планот A е намалена 200 пати, а потоа е изработен планот B во кој е направено зголемување 4 пати во однос на планот A . Ако ширината на зградата на планот B еднаква на 18 cm , колку изнесува нејзината ширина на планот A ?
15. Дадени се прави кои се сечат така што збирот на трите од четирите добиени агли е еднаков на $212^\circ 30'$. Определи ги големините на секој од нацртаните агли.

16. За аглите на цртежот десно е познато дека аголот b е два пати поголем од аголот a , а аголот a е три пати поголем од аголот c . Колкав е аголот a ?



17. а) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $7a$.
 б) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $4a$.
 в) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $8a$.

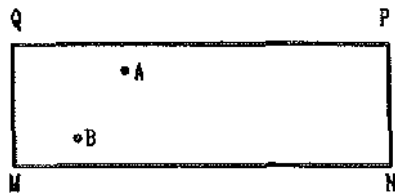
18. На цртежот десно правите a, b, c и d се такви што a е нормална на b и c е нормална на d . Определи ги аглите a, b и g ако се знае дека $x = \frac{4}{5}y$.



19. Петтина од аголот x е еднаква на седмина од неговиот суплементен агол y . Определи го аголот z кој е комплементен на аголот x .
20. Разликата на два напоредни агли е еднаква на $\frac{4}{7}$ од поголемиот агол. Определи ги овие напоредни агли.
21. Правите p и q се сечат. Определи ги добиените агли, ако се знае дека:
 а) збирот на два од четирите добиени агли е еднаков на 73° ,
 б) разликата на два од четирите добиени агли е еднаква на 73° ,
 в) збирот на три од четирите добиени агли е еднаков на 273° .
22. Ако се собере половината, четвртината и осмината на аголот a , тогаш се добива суплементниот агол на аголот a . Определи го аголот кој е комплементен на суплементниот агол на аголот a .
23. Две прави се сечат во точка S и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е еднаков на $\frac{2}{11}$ од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги мерните броеви на секој од четирите агли.

32. Паралелните прави a и b се пресечени со правите c и d така што $\angle(a, d) = a = 45^\circ 52' 45''$ и $\angle(b, c) = b = 30^\circ 7' 15''$. Определи го аголот g меѓу правите c и d .
33. Половината од аголот a е за 30° поголема од четвртината на неговиот суплементен агол. Определи го аголот a .
34. Остриот агол a и шестина од неговиот суплементен агол се комплементни агли. Определи го аголот a .
35. Две прави се сечат и формираат четири агли. Определи ги овие агли ако едниот од нив е девет пати помал од збирот на преостанатите три.
36. Правите a и b се сечат и формираат четири агли: два остри агли a и g , и два тапи агли b и d . Определи ги овие агли ако
- $$7(a + g) = 5(b + d).$$
37. Две прави се сечат во точка K и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половина од едниот накрсен тап агол. Определи ги мерните броеви на секој од овие агли.
38. Осмина на аголот a е еднаква на десеттина на неговиот комплементен агол b . Определи го збирот на суплементните агли на аглите a и b .
39. Дванаесеттина на аголот a е еднаква на петнаесеттина на неговиот комплементен агол b . Определи го збирот на суплементните агли на аглите a и b .
40. Разликата на два комплементни агли е 1° . Определи ги овие агли.
41. Едниот од два комплементни агли е за $16^\circ 10' 30''$ поголем од другиот. Определи ги овие агли.
42. Симетралите на два соседни агли a и b се заемно нормални. Определи ги аглите a и b ако $a - b = 32^\circ 22' 22''$.
43. Аголот a е поголем од својот комплементен агол за толку колку што е помал од својот суплементен агол. Определи го аголот a .

44. Определи го аголот кој е 24 пати поголем од својот напореден агол.
45. Нацртај агол AOB . Произволна кружница со центар во O на краците на аголот отсекува тетива CD . Ако ја „пренесуваме“ тетивата CD на кружницата почнувајќи од точката C , секогаш во иста насока, тогаш по 255 пренесувања врвот на шестарот за првпат повторно ќе биде во точката C . Притоа точно 34 пати е обиколена кружницата. Определи го аголот AOB .
46. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во моментот кога часовникот покажува $3h 15 min$.
47. Нацртај агол со големина 66° . Со помош на шестар и линијар подели го овој агол на 11 еднакви делови.
48. Нацртај агол со големина 54° . Со помош на шестар и линијар подели го овој агол на 3 еднакви делови.
49. Даден е $\angle xOy = 21^\circ$. Користејќи само линијар и шестар подели го овој агол на 7 делови.
50. На маса за билијар $MNPQ$ во точките A и B се наоѓаат топки. Топката во точката A е удрена, по што таа се добива од работ PQ во точката X , се одбива од работ QM во точката Y и ја погодува топката во точката B . Определи ги точките X и Y ако се знае дека топката се одбива од работ така што правецот по кој доаѓа и правецот по кој се одбива со работ зафаќаат еднакви агли.



V.2. ТРИАГОЛНИК

51. Должините на страните на еден триаголник во сантиметри се изразени со природни броеви. Мерниот број на едната страна е 5, а на другата е 1. Определи го мерниот број на третата страна.

52. Триаголник чии должини на страни во сантиметри се изразени со природни броеви има периметар 10 cm . Определи ги сите триаголници со ова својство.
53. Определи ги должините на страните a, b, c на триаголникот, ако $a + b = 22\text{ cm}$, $b + c = 26\text{ cm}$ и $c + a = 32\text{ cm}$.
54. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Точката D е средина на страната AB . Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на 50 cm , а периметарот на $\triangle ACD$ е еднаков на 40 cm . Определи ја должината на отсечката CD .
55. Периметарот на рамнокракиот $\triangle ABC$ е еднаков на 50 cm . На кракот BC е повлечена тежишната линија AD . Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е за 4 cm поголем од периметарот на $\triangle ABD$.
56. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{AC} = 10\text{ cm}$. Од средината D на страната AB повлечена е нормала DE на страната AB , која ја сече страната BC во точката E . Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на 40 cm . Определи го периметарот на $\triangle AEC$.
57. Страната AC на рамностраниот $\triangle ABC$ е продолжена преку темето C до точка D . Периметарот на $\triangle ABD$ е еднаков на 67 cm , а периметарот на $\triangle BCD$ е еднаков на 52 cm . Определи го периметарот на $\triangle ABC$.
58. Низ темето C на рамностраниот $\triangle ABC$ е повлечена права p паралелна со симетралата s на $\angle ABC$. Нека M е точката во која правата p ја сече правата AB . Ако $\overline{CM} = 17\text{ cm}$ и периметарот на $\triangle BMC$ е еднаков на 37 cm , определи го периметарот на $\triangle ABC$.
59. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. Низ произволна точка E на страната AB се повлечени две прави паралелни со краците на $\triangle ABC$. Правите ги сечат страната BC во точка M и страната AC во точка N . Определи ја разликата на периметрите на $\triangle ABC$ и четириаголникот $EMCN$.
60. Во $\triangle ABC$ аголот a е еднаков на 50° , а аголот g е за 20° поголем од аголот b . Определи ги аглите b и g .

61. Едниот агол на триаголникот е за 20% помал од другиот, а за $33\frac{1}{3}\%$ поголем од третиот агол. Определи ги аглиите на триаголникот.
62. Во $\triangle ABC$ едниот агол е еднаков на $\frac{2}{7}$ од другиот, а третиот е еднаков на збирот на првите два. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.
63. Внатрешниот агол во темето A на $\triangle ABC$ е $\alpha = 45^\circ 37' 50''$, а надворешниот агол во темето B е $\beta_1 = 124^\circ 13' 45''$. Определи ги внатрешните агли β и γ на $\triangle ABC$.
64. За аглиите α, β, γ на $\triangle ABC$ важи $\alpha - \beta = 3\gamma$. Докажи дека $\alpha - \gamma = 90^\circ$.
65. Определи ги аглиите на триаголникот, ако е познато дека едниот агол е еднаков на $\frac{2}{5}$ од другиот агол, односно на $\frac{1}{4}$ од третиот агол.
66. Збирот на два надворешни агли на $\triangle ABC$ е еднаков на 270° . Докажи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.
67. Едниот агол на правоаголникот $\triangle ABC$ е еднаков на $7^\circ 30' 30''$. Под кој агол се гледа секоја од катетите од центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.
68. Во $\triangle ABC$ отсечката BK , $K \in AC$ е симетрала на аголот во темето B . Ако $\angle BKC = 70^\circ$, пресметај ја разликата на аглиите $\angle ACB$ и $\angle CAB$.
69. Во $\triangle ABC$ познати се внатрешниот агол $\alpha = 67^\circ 28' 16''$ и надворешниот агол $\beta_1 = 142^\circ 44' 32''$. Определи го аголот кој го формираат симетралата на аголот и висината на $\triangle ABC$ кои минуваат низ темето C .
70. Симетралата на внатрешниот агол α на $\triangle ABC$ формира со симетралата на надворешниот агол γ_1 агол еднаков на $\frac{\beta}{2}$. Докажи.
71. Симетралите на внатрешните агли α и β на $\triangle ABC$ се сечат под агол од 135° . Докажи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.
72. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот меѓу симетралата на аголот при врвот и симетралата на аголот при основата е еднаков на 130° .

Опреди ги агли на $\triangle ABC$.

73. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D . Агли на $\triangle ABC$ се еднакви на агли на $\triangle ABD$. Опреди ги агли на $\triangle ABC$.
74. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот при основата е двапати поголем од аголот при врвот и симетралата на аголот при основата го сече кракот BC во точка M . Докажи дека $\overline{AM} = \overline{AB} = \overline{MC}$.
75. Во рамнокрак триаголник $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ симетралата AE на аголот при основата и висината AD формираат агол еднаков на 15° . Опреди ги внатрешните агли на триаголникот.
76. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ во кој надворешниот агол при врвот е еднаков на 108° . Опреди го аголот меѓу висината и симетралата на аголот повлечени од едно теме при основата.
77. Висините кои соодветствуваат на краците на рамнокрак $\triangle ABC$ зафаќаат агол еднаков на 40° . Опреди ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.
78. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот меѓу симетралите на агли на при основата е еднаков на 130° . Опреди го аголот меѓу висината и симетралата на аголот повлечени од темето B .
79. Аголот меѓу краците на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ е еднаков на 136° . Низ темето на овој агол повлечени се две прави така што секоја од нив на основата на триаголникот отсекува отсечка еднаква на кракот на триаголникот. Опреди го аголот меѓу овие прави.
80. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Висините спуштени кон краците на триаголникот формираат агол од 48° . Опреди ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.
81. Симетралата на надворешниот агол на основата на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ ја сече симетралата на надворешниот агол при врвот под агол од 80° . Опреди ги агли на $\triangle ABC$.

82. Даден е $\angle AOB = 75^\circ$ и точка C во неговата внатрешност. Нека точките C_1 и C_2 се симетрични на точката C во однос на краците OA и OB , соодветно.
- а) Докажи дека $\triangle C_1OC_2$ е рамнокрак.
- б) Определи ги аглиите на $\triangle C_1OC_2$.
83. Во правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето A сповлечена е висината AM , $M \in BC$. Нека M_1 и M_2 се симетричните точки на точката M во однос на катетите AB и AC , соодветно. Докажи дека точките A, M_1 и M_2 лежат на иста права.
84. Во рамнокрак $\triangle ABC$ основата AB е двапати пократка од краците. Низ средината на M на кракот BC е повлечена права паралелна со основата AB , која го сече кракот AC во точка N . Докажи дека правата AM е симетрала на $\angle BMN$.
85. Во $\triangle ABC$ со $\angle B = 80^\circ$ е повлечена симетралата на аголот BE , $E \in AC$. Низ темето C е повлечена права паралелна на BE која го сече продолжението на страната AB во точката F . Докажи дека $\triangle BFC$ е рамнокрак.
86. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Права нормална на основата AB на триаголникот ги сече кракот BC во точката M и продолжението на кракот AC во точка N . Докажи дека $\triangle CMN$ е рамнокрак.
87. Даден е разностран $\triangle ABC$. Од темето C е повлечена нормала на симетралата на аголот во темето C , која ја сече страната BC во точката N . Докажи дека $\triangle ANC$ е рамнокрак.
88. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB . На правата AC , по редослед C, A, D е земена точка D , а на кракот BC точка M така што $\overline{AD} = \overline{BM}$. Докажи дека основата AB ја полови отсечката DM .
89. Висината CD во $\triangle ABC$ со страните CA и CB формира агли j и q . Кој од овие агли е поголем ако $\overline{AC} < \overline{BC}$.
90. Во $\triangle ABC$, со агол од 75° во темето C , повлечена е симетралата s на страната AC , која ја сече страната AB во точката D . Ако $\angle ACD$ е двапати поголем од $\angle DCB$, определи ги другите два агли на $\triangle ABC$.

91. Докажи дека средината на хипотенузата е центар на опишаната кружница околу правоаголен триаголник.
92. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со хипотенуза AB . Хипотенузата AB е продолжена преку темето A за должината на катетата AC и е продолжена преку темето B за должината на катетата BC , со што сед обиеени точките E и F , соодветно. Определи го $\angle ECF$.
93. Даден е рамнострани $\triangle ABC$. На продолжението на висината CD , преку темето C , земена е точка M таква што $\overline{MC} = \overline{AB}$. Докажи дека аглиите $\angle ACB$ и $\angle AMB$ се комплементни.
94. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle B = 15^\circ$ и $\angle C = 30^\circ$. Правата која минува низ темето A и е нормална на страната AB ја сече страната BC во точката D . Докажи дека $\overline{BD} = 2\overline{AC}$.
95. Подножјето на висината повлечена кон хипотенузата AB на правоаголниот триаголник $\triangle ABC$ ја дели хипотенузата во однос $1:3$. Определи ги острите агли на $\triangle ABC$.
96. Во правоаголен $\triangle ABC$ важи $\angle B = 30^\circ$ и $\overline{AC} = 4\text{ cm}$. Нека CD , $D \in AB$ е висината повлечена кон хипотенузата AB . Определи ги должините на отсечките AD и BD .
97. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\angle C = 30^\circ$. Нека D , $D \in BC$ е подножјето на висината повлечена од темето A . Определи ги аглиите на $\triangle ABD$. Докажи дека $\overline{BC} = 2\overline{AD}$.
98. Даден е рамнострани $\triangle ABC$. Од точката M која ја дели страната AB на делови од 6 cm и 2 cm повлечени се нормални прави на другите две страни на триаголникот. Определи ги растојанијата од точката C до овие нормални прави.
99. Во правоаголен триаголник висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол формираат аголеднаков на $18^\circ 24'$. Определи ги острите агли на овој триаголник.
100. Еден од острите агли на правоаголниот $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ е еднаков на 32° . Од темето C се повлечени тежишната линија, висината и симе-

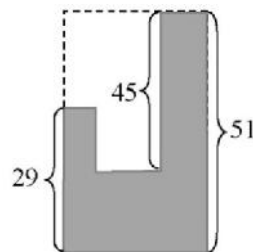
тралата на аголот. Определи ги аголот меѓу тежишната линија и симетралата на аголот и аголот меѓу висината и симетралата на аголот.

101. Во правоаголен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ е повлечена висината CD , $D \in AB$. Нека E и F се средините на катетите BC и AC , соодветно. Докажи дека $\angle EDF = 90^\circ$.
102. Даден е $\triangle ABC$. Во темето A е конструирана отсечка AD нормална на AC таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и отсечка AE нормална на AB таква што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Притоа точките D и B се на различни страни на правата AC , а точките C и E се на различни страни на правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.
103. Во $\triangle ABC$ низ центарот O на впишаната кружница е повлечена права паралелна на страната BC , која ги сече страните AB и AC во точките M и N , соодветно. Докажи дека $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.
104. На правата AB е земена точка C (C е меѓу A и B), а потоа е повлечена произволна полуправа CD . На симетралите на аглиите ACD и DCB избрани се точки M и N , соодветно такви што правата MN е паралелна со правата AB . Полуправата CD ја сече правата MN во точката Q . Докажи дека точката Q е средина на отсечката MN .
105. Нека A, B, C, D се четири точки кои лежат во иста рамнина и такви што $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Докажи дека $AD \perp BC$.
106. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека CD , $D \in AB$ е висината повлечена од темето C , M е средина на CD и N е средина на отсечката BD . Докажи дека правата AM е нормална на правата CN .
107. Дадени се три точки A, B и C кои не лежат на иста права. Кружниците со дијаметар AB и дијаметар BC се сечат во точка M различна од точката B . Докажи дека M припаѓа на правата AC .
108. Даден е разностран $\triangle ABC$. Нека точките E, F и G се средини на страните AB, AC и BC , соодветно. Во надворешноста на $\triangle ABC$ се повлечени отсечки $EM, \overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2}$ и $FN, \overline{FN} = \frac{\overline{AC}}{2}$ такви што $EM \perp AB$ и $FN \perp AC$. Докажи дека $\overline{GM} = \overline{GN}$.

109. Нека C и D се точки на отсечката AB такви што $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$ и нека точките E и F се од иста страна на правата AB и се такви што триаголниците ADF и DBE се рамнострани. Докажи дека $\triangle CEF$ е рамностран.
110. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Точките K и M припаѓаат на страната AB и се такви што $\overline{AK} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Определи го $\angle KCM$.
111. а) Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C , ако $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ и $\angle B = 15^\circ$.
 б) Конструирај ги симетралите AD и BF на острите агли на $\triangle ABC$, па од точките D и F во кои овие симетрали ги сечат катетите BC и AC , соодветно повлечи нормали DM и FN на хипотенузата AB ($M, N \in AB$). Определи го $\angle MCN$.
112. Во $\triangle ABC$ центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

113. Горјан располага со 16 сламки со должина 1 cm , 6 сламки со должина 2 cm и 7 сламки со должина 3 cm . Дали може со наведените сламки да конструира правоаголник така што сите сламки ќе ги употреби и ниту една сламка не смее да ја крши или превиткува?
114. Горазд располага со дрвца со должина 6 cm и 4 cm . Определи го најмалиот вкупен број дрвца со кои тој може да направи правоаголник со должини на страни 34 cm и 14 cm (дрвцата не смее да се кршат).
115. Кога од правоаголен лист хартија се отсечени два правоаголници, добиена е сивата фигура прикажана на цртежот десно. Ако дадените димензии се во сантиметри, определи за колку сантиметри периметарот на обоената фигура е поголем од периметарот на правоаголниот лист.

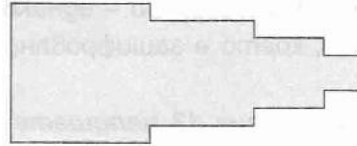


116. Сто еднакви квадрати со должина на страна еднаква на 3 cm треба да се наредат така што ќе се добие правоаголник со:

- 1) најголем периметар
- 2) најмал периметар.

Опреди ги должините на страните на овие правоаголници. (Квадратот е правоаголник.)

117. Фигурата прикажана на цртежот десно е добиена со помош на четири квадрат со должини на страни 1 cm , 2 cm , 3 cm и 4 cm , кои се залепени еден до друг. Опреди го периметарот на оваа фигура.



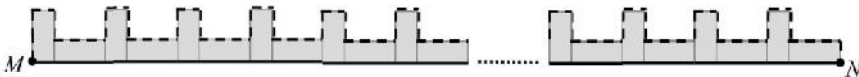
118. Фигурата на цртежот десно е формирана од четири еднакви правоаголници, поставени последователно вертикално, хоризонтално, вертикално и пак хоризонтално.



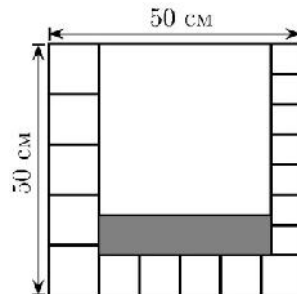
Растојанието меѓу точките A и B е еднакво на 26 cm , а должината на непрекинатата линија која ги поврзува овие две точки е 48 cm .

а) Пресметај ги должините на страните на еден од правоаголниците.

б) Фигурата на долниот цртеж е формирана од повеќе вакви правоаголници, поставени на истиот начин. Пресметај го бројот на овие правоаголници, ако растојанието меѓу точките M и N е за 328 cm помало од должината на искршената линија која ги поврзува овие две точки.

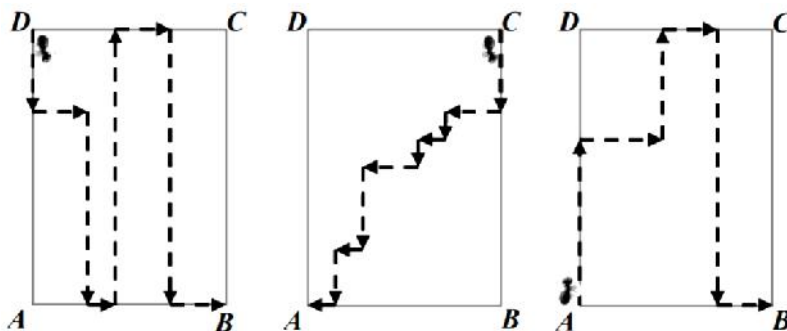


119. Квадрат со должина на страна 50 cm е поделен на 18 бели квадрати и еден сив правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Опреди го периметарот на сивиот правоаголник.



120. На трите цртежи $ABCD$ е еден ист правоаголник. Кога мравката оди по патеката на левиот цртеж, за да стигне од темето D до темето B таа изминува 43 m , а за да стигне од темето C до темето A по пока-

жаната патека на средниот цртеж таа изминува 19 m . Колку метри ќе помине мравката за да отиде од темето A до темето C ако оди по патеката прикажана на десниот цртеж?

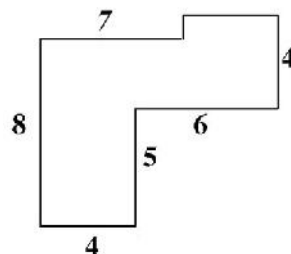


121. Бојан, Иван и Павел добиле по еден лист хартија со должини на страни 80 mm и 100 mm . Бојан отсекол од својот лист три правоаголници со должини на страни 1 cm и 8 cm , Иван отсекол од својот лист три правоаголници со должини на страни 1 cm и 10 cm , Павел отсекол од својот лист последователно три правоаголници со ширина 1 cm и различни должини. На тројцата по последното отсекување делот од листот кој им останал имал форма на правоаголник.

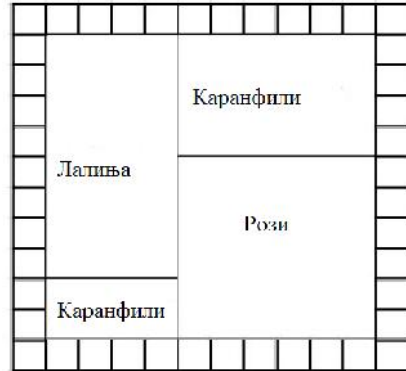
- Опреди го периметарот на преостанатиот дел од листот на Бојан.
- Опреди го периметарот на преостанатиот дел од листот на Иван.
- Опреди го периметарот на преостанатиот дел од листот на Павел.

122. Ако страната на даден квадрат се зголеми за 10 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 200 cm^2 . Опреди ги периметарот и плоштината на дадениот квадрат.

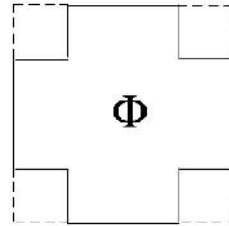
123. Цветната градина на Вера има облик како што е прикажано на цртежот десно, при што броевите означуваат должини на одделните страни изразени во метри. Вера градината ја поделила на квадрати со димензии $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ и во секој квадрат засадила по еден трендафил. Колку трендафили засадила Вера?



124. Илина во својата градина засадила лалиња, рози и каранфили (цртеж десно) околу кои има патека направена од квадратни плочки. Кое цвеќе е засадено на површина со најголема плоштина?

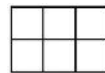


125. Фигурата Φ е добиена кога од четирите агли на квадрат се отсечени четири еднакви квадратчиња, секое со плоштина 1 cm^2 (цртеж десно). Периметарот на фигурата Φ е еднаков на збирот на периметрите на четирите отсечени квадратчиња. Определи ја плоштината на фигурата Φ ?



126. Семејството Јакопетрески има три градини во форма на квадрат. Едната градина е засадена со компири, другата со домати и третата со зелка. Градините ги заградиле со жичена ограда. Оградата на градината со домати е двапати подолга од оградата на градината со компири и двапати пократка од оградата на градината со зелка. Вкупната должина на сите три огради е еднаква на 1008 m . Определи ја должината на секоја од оградите.

127. Од квадратни картончиња е направен правоаголник (на цртежот десно е даден пример на правоаголник од картончиња). Потоа една страна е намалена 2 пати, а другата страна е намалена 3 пати. Притоа бројот на картончињата е намален за 65. Колку квадрати со страна од 4 картончиња може да се одделат од почетниот правоаголник, без да се преместуваат картончињата? (На цртежот може да се одделат 2 квадрата со страна од 2 картончиња.)



128. Периметарот на еден паралелограм е еднаков на 50 cm . Дијагоналите го делат паралелограмот на два пара складни триаголници, чии периметри се разликуваат за 5 cm . Определи ги должините на страните на паралелограмот.
129. Должината на еден правоаголник е за 6 cm поголема од неговата ширина. Средините на две соседни страни на правоаголникот ги по-

врзуваме, со што правоаголникот го делиме на триаголник и петаголник. Периметарот на петаголникот е за 30 cm поголем од периметарот на триаголникот. Определи ги должините на страните на правоаголникот.

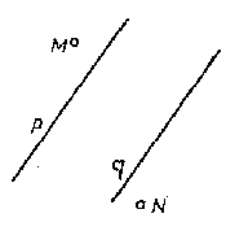
130. Даден е правоаголник $ABCD$ чиј периметар е еднаков на 100 cm . Нека M е средина на страната AB и N е средина на страната CD . Периметарот на правоаголникот $BCNM$ е еднаков на 70 cm . Определи ги должините на страните на правоаголникот $ABCD$.
131. Во паралелограмот $ABCD$ симетралата на остриот агол во темето A го сече продолжението на страната BC во точката E , $\overline{EC} = 3\text{ cm}$. Определи ги должините на страните на паралелограмот $ABCD$ ако неговиот периметар е еднаков на 38 cm .
132. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Точките M и N лежат на страните AB и CD , соодветно. Периметрите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се еднакви на по 14 cm . Определи ја должината на отсечката MN .
133. Определи го видот на четириаголникот чии надворешни агли се еднакви на $3j$, $3j$, $2j$, $2j$. Определи го аголот j .
134. Дадена е кружница $k(o, r)$.
- а) Конструирај точки кои кружницата ја делат на три дела кои се однесуваат како $3:4:5$.
 - б) Во добиените точки повлечи тангенти на кружницата.
 - в) Определи ги аглие на триаголникот формиран од повлечените тангенти.
135. Даден е правоаголник $ABCD$. Над пократката страна BC е конструиран рамностран $\triangle BCE$ така што точката E е во внатрешноста на правоаголникот, а над страната CD е конструиран рамностран триаголник CDF кој е во надворешноста на правоаголникот.
- а) Докажи дека отсечката EF е еднаква на дијагоналата на правоаголникот.
 - б) Определи го $\angle BCF$.

136. Нека ABC е рамностран триаголник со страна $a = 6\text{ cm}$. Во точката M која припаѓа на страната BC и е поблиску до темето C се повлечени отсечки $MP \parallel AC$ и $MQ \parallel AB$, $P \in AB$ и $Q \in AC$.
- Докажи дека $\overline{AP} + \overline{AQ} = a$.
 - Ако $\angle APQ = 90^\circ$, определи ги должините на отсечките AP и AQ .
137. Од темињата A и C на правоаголникот $ABCD$ се повлечени нормали AN и CM на дијагоналата BD , $M, N \in BD$.
- Докажи дека четириаголникот $ANCM$ е паралелограм.
 - Докажи дека $DF \perp BF$, каде F е симетричната точка на точката A во однос на точката M .
138. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M и N се точки на страните AB и CD , соодветно такви што $\overline{MB} = \overline{DN}$. Ако $\angle ANB = 147^\circ$, определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $BCNM$.
139. Од темето A на правоаголникот $ABCD$, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ е повлечена нормала на дијагоналата на правоаголникот и е продолжена за иста должина до точката F . Докажи дека:
- Отсечката BF е нормална на правата DF .
 - Четириаголникот $BDCF$ е рамнокрак трапез.
140. Даден е рамнокрак трапез со должина на кракот 4 cm . Едната дијагонала на трапезот ја дели неговата средна линија на отсечки со должини 3 cm и 5 cm . Определи го периметарот и аглиите на трапезот.
141. Даден е рамнокрак трапез во кој дијагоналите се сечат под прав агол. Докажи дека должината на висината повлечена кон основите на овој трапез е еднаква на должината на неговата средна линија.
142. На пократката дијагонала BD на паралелограмот $ABCD$ се земени точки M и N такви што $\overline{DM} = \overline{BN} < \frac{1}{2}\overline{BD}$. Докажи дека четириаголникот $ANCM$ е паралелограм.
143. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките M и N се средини на страните BC и AD , соодветно. Докажи дека отсечките AM и CN ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

144. Даден е ромб чии внатрешните агли се однесуваат како $1:2:1:2$. Докажи дека висините на ромбот повлечени од темињата на тапите агли ја делат поголемата дијагонала на ромбот на три еднакви дела.
145. Докажи дека средините на страните и подножјето на било која висина на произволен триаголник се темиња на рамнокрак трапез.
146. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Нека M е средината на страната AB . Докажи дека правата CM е нормална на правата DM .
147. Во паралелограмот $ABCD$, прикажан на цртежот десно, конструирај точка E симетрична на точката B во однос на дијагоналата AC . Потоа повлечи ја отсечката AE . Нека F е пресечната точка на отсечките CD и AE . Докажи дека триаголниците CEF и ADF се складни.
-
148. Даден е паралелограм $ABCD$ чиј внатрешен агол во темето B е тап. Страните AB и CB се продолжени преку темето B и на овие продолженија соодветно се избрани точки E и F такви што BE и BF се основи на рамнокраки триаголници BCE и ABF . Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.
149. Дадени се прави p_1 и p_2 кои се сечат во точката O . Правите a и b се паралелни и се такви што правата a ги сече правите p_1 и p_2 во точките A_1 и A_2 , соодветно, а правата b ги сече правите p_1 и p_2 во точките B_1 и B_2 , соодветно и важи $\overline{A_1A_2} = 3,2\text{ cm}$ и $\overline{B_1B_2} = 8,8\text{ cm}$. Нека точката M е средина на отсечката A_2B_2 и точката N е средина на A_1B_1 . Определи ја должината на отсечката MN .

V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

150. Даден е $\angle BAC$. Конструирај точка M која е еднакво оддалечена од краците на $\angle BAC$ и за која важи $\overline{MB} = \overline{MC}$.

151. Даден е $\angle AOB$ и точка P надвор од него. Конструирај права p која минува низ точката P и која на краците на $\angle AOB$ отсекува отсечки со еднаква должина.
152. Дадени се отсечката AA_1 , нејзината симетрала s и точката B која лежи во иста полурамнина со точката A_1 и таква што A_1B не е паралелна со s . Само со помош на линијар конструирај ја точката B_1 која е симетрична на точката B во однос на правата s .
153. Даден е делтоид $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$ и точка M која лежи во надворешноста на делтоидот $ABCD$ и во полурамнина со B во однос на правата AC при што MB не е паралелна со AC . Само со помош на линијар конструирај права која минува низ точката M и која е нормална на правата AC .
154. Во рамнината се дадени правите a, b и c , кои по парови не се паралелни една на друга. Определи точки A и B кои припаѓаат на правите a и b , соодветно и кои се симетрични во однос на правата c .
155. Две села се наоѓаат на различни страни од еден праволиниски воден канал, чии брегови се паралелни. Селата се наоѓаат на различни растојанија од каналот. На кое место треба да се изгради најкраток можен мост така што патот меѓу селата ќе биде најкраток?
156. Дадени се паралелни прави p и q и точки M и N кои не лежат на правите (види цртеж). Нека точките M_1 и N_1 се соодветно симетрични на точките M и N во однос на правата p , а точките M_2 и N_2 се соодветно симетрични на точките M_1 и N_1 во однос на правата q . Докажи дека отсечките MN_2 и M_2N се преполовуваат.
- 
157. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени точки A_1, A_2 и B_1 такви што A_1 и A_2 се симетрични со A во однос на B и C , соодветно, а B_1 е симетрична на B во однос на C .
158. Дадени се три различни паралелни прави a, b и c . Конструирај квадрат $ABCD$ таков што $A \in a, B \in b$ и $C \in c$.

159. Дадени се точки A и B и права p паралелна на отсечката AB . Конструирај кружница која минува низ точките A и B и ја допира правата p .
160. Во рамнина се дадени три неколинеарни точки A, B и C . Во рамнината конструирај права p таква што растојанијата од точките A, B и C до правата p се еднакви.
161. Дадени се права p , точка A на правата p и точка B надвор од правата p . Конструирај кружница која минува низ точката B и правата p ја допира во точката A .
162. Дадена е права s . Точките A и B се наоѓаат на различни страни од правата s . Конструирај $\angle AOB$ чија симетрала е правата s .
163. Во рамнината се дадени права p и кружница $k(O, 2\text{ cm})$ такви што $p \cap k = \emptyset$. На кружницата е дадена точка M . Конструирај кружница k_1 која ја допира правата p и ја допира кружницата k во точката M .
164. Правите a и b се сечат во точката O . На правата a е дадена точка A таква што $\overline{OA} = 4\text{ cm}$. Конструирај кружница која минува низ точката A и ги допира правите a и b .
165. Дадени се права s и точка A која не лежи на s . Конструирај рамностран триаголник ABC таков што правата s е оска на симетрија на $\triangle ABC$.
166. Дадени се $k(O, r)$ и отсечка AB . Конструирај точка $M \in k$ таква што $\overline{MA} = \overline{MB}$.
167. Дадена е права p и на растојание 5 cm од p е дадена точка M . Определи го множеството точки во рамнината кои од правата p се оддалечени 3 cm , а од точката M се оддалечени 4 cm .
168. Дадени се права p , точка $A \in p$ и точка $M \notin p$. Конструирај кружница која минува низ точката M и ја допира правата p во точката A .
169. Дадени се кружница k , точка $D \in k$ и точка $M \notin k$. Конструирај кружница k_1 која минува низ точката M и ја допира кружницата k во точката D .

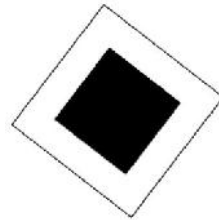
170. Конструирај кружница со радиус $r = 2\text{ cm}$ која допира дадена права p и минува низ дадена точка M која не лежи на p .
171. Дадена е права p , точки M и N , кои припаѓаат на правата p и точка K која не припаѓа на p . Конструирај кружница која минува низ точките M, N и K .
172. Дадени се точките A, B, C и D кои не лежат на една права. Конструирај кружница k таква што растојанијата од точките A, B, C и D до кружницата k се еднакви.
173. Дадени се прави a и b кои под агол од 60° се сечат во точката M . Нека N е точка на правата b различна од M . Конструирај кружница чиј центар S припаѓа на правата a и која минува низ точките M и N . Нека P е втората пресечна точка во која конструираната кружница ја сече правата a . Определи ги аглите на $\triangle MPN$.
174. Даден е агол $\alpha = 15^\circ$ со теме во точката M . Нека C е точка на еден од неговите краци. Конструирај кружница k со радиус $\overline{MC}$, која минува низ точката C и центар O , $O \neq M$ кој припаѓа на другиот крак на дадениот агол,
Нека D е втората заедничка точка на кружницата k и правата MC , а A и B се пресечните точки на k и кракот MO на дадениот агол, при што точката A е поблиску до M од точката B . Определи го $\angle BOD$.
175. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ и $\overline{AB} = 4\text{ cm}$.
Потоа на страната BC на $\triangle ABC$ конструирај точка P таква што $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{BC}$ и определи ги аглите на $\triangle ABP$.
176. Конструирај правоаголен триаголник со катета $\overline{AC} = 3\text{ cm}$ и висина $\overline{CD} = 2\text{ cm}$ повлечена кон хипотенузата AB .
177. Симетралата на аголот и висината на правоаголен триаголник, повлечени во темето на правиот агол, формираат агол од 15° .
а) Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.
б) Конструирај го овој триаголник ако должината на висината повлечена кон хипотенузата е 4 cm .

178. Конструирај правоаголен триаголник за кој е позната разликата на катетите $b - a = 4\text{ cm}$ и $\alpha = 30^\circ$.
179. Дадена е права p и точка C која не припаѓа на p . Конструирај рамнокрак триаголник чија оска на симетрија е правата p , точката C е теме при основата на триаголникот и аголот при врвот на триаголникот е еднаков на 30° .
180. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени средината M на страната BC , подножјето P на висината повлечена од темето C и подножјето Q на висината повлечена од темето A .
181. Конструирај $\triangle ABC$ ако $\overline{AB} + \overline{BC} = 11\text{ cm}$, $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ и $\angle ABC = 60^\circ$.
182. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, должината $t_b = 5\text{ cm}$ на тежишната линија повлечена од темето B и должината $h_a = 4\text{ cm}$ на висината повлечена од темето A .
183. Од сите триаголници со дадена плоштина и должина на едната од страните конструирај го триаголникот кој има најмал периметар.
184. За $\triangle ABC$ се познати $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, тежишната линија $t_b = 5\text{ cm}$ повлечена во темето B и висината $h_a = 4\text{ cm}$ повлечена во темето A . Конструирај го $\triangle ABC$.
185. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: подножната точка E на висината повлечена од темето A , подножната точка на висината повлечена од темето B и произволни две точки M и N од правата AB .
186. Даден е конвексен агол aOb и во него точка C . Определи точки A и B , $A \in a$ и $B \in b$ такви што периметарот на $\triangle ABC$ ќе биде најмал.
187. Дадени се права p и точки A и B кои лежат од иста страна на p . Конструирај точка $C \in p$ таква што $\triangle ABC$ има најмал периметар.
188. Два брода A и B се усидрени на езеро, недалеку од праволиниски брег p . Од бродот A испратиле чамец до бродот B , кој попатно требало да однесе еден патник до брегот. Конструирај го најкраткиот пат по кој чамецот треба да плови.

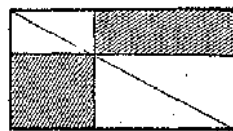
189. Конструирај правоаголник за кој се дадени страната $a = 4\text{ cm}$ и збирот на дијагоналата и другата страна $d + b = 8\text{ cm}$.
190. Даден е трапез $ABCD$. Конструирај права s која минува низ едно од темињата и го дели трапезот $ABCD$ на два дела со еднакви плоштини.
191. Дадени се точките A, B и C . Во рамнината која ги содржи дадедните точки конструирај права од која точките A, B и C се еднакво оддалечени.

V.5. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

192. Во правоаголен $\triangle ABC$ со катети $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ е повлечена симетралата $CD, D \in AB$ на правиот агол. Правата која минува низ темето B и е паралелна на CD го сече продолжението на катетата AC во точката E . Определи ја плоштината на $\triangle ABE$.
193. Во даден квадрат е впишан квадрат чии темиња се средините на страните на дадениот квадрат. Во вториот квадрат се наоѓа трет квадрат чии страни се 1 cm оддалечени од страните на вториот квадрат. Определи ја плоштината на дадениот квадрат ако должината на страната на третиот квадрат е еднаква на 2 cm .
194. Фирма за изработка на сообраќајни знаци треба да направи 300 знаци во форма на бел квадрат со должина на страна 45 cm во кој се содржи помал жолт квадрат со должина на страна која е 7 пати поголема од вториот по големина непарен прост број. Колку килограми бела и колку килограми жолта боја се потребни за изработка на знаците ако за 1 cm^2 се потребни $\frac{3}{25}\text{ g}$ бела и $\frac{4}{25}\text{ g}$ жолта боја.



196. За колку проценти ќе се зголеми плоштината на квадрат ако должината на неговата страна се зголеми за 30%? Што ќе се случи со периметарот на квадратот?
197. Ако едната страна на правоаголникот ја намалиме за 4 cm , а другата ја зголемиме за 4 cm , ќе добиеме квадрат со плошина 100 cm^2 . Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот.
198. Ако страната на квадратот ја продолжиме за 2 cm , тогаш неговата плошина се зголемува за 24 cm^2 . Определи ги плоштините на почетниот и новиот квадрат.
199. Квадрат е исечен на два правоаголници. Збирот на периметрите на двата правоаголници е за 210 cm поголем од периметарот на квадратот. Плоштината на едниот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на другиот. Пресметај го периметарот на помалиот правоаголник.

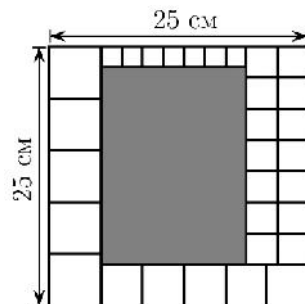


200. Спореди ги плоштините на осенчените правоаголници прикажани на цртежот десно.

201. Правоаголник со должини на страни 3 km и 5 km е намален во размер $1:10000$. Определи ја плоштината на намалениот правоаголник.
202. Дадена е просторија со квадратен под. Подот е поплочен така што на секои 2 m^2 покрај бели плочки ставени се четири црни плочки со иста димензија како белите плочки. Вкупно се ставени 98 црни плочки. Плочките се во форма на квадрат со должина на страна 2 dm .
- а) Определи го периметарот на подот на просторијата.
- б) Колку бели плочки се употребени при попложувањето?

203. Дадени се два квадрати, првиот со плоштината 16 cm^2 која е четири пати помала од плоштината на вториот квадрат. Определи го односот на периметрите на овие квадрати.

204. Квадрат со должина на страна 25 cm е поделен на 31 бел квадрат и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи ја плоштината на сивиот правоаголник.



205. Во правоаголникот $ABCD$ симетралата на аголот во темето A ја сече страната CD во точката E , која е средина на страната CD . Познато е дека $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.
206. Должините на страните на косоаголен паралелограм се еднакви на 7 cm и 4 cm . Определи го односот на плоштините на деловите на кои овој паралелограм е поделен со симетралата на еден од неговите внатрешни остри агли.
207. Нека E е средината на кракот AD на трапезот $ABCD$. Докажи дека плоштината на $\triangle EBC$ е еднаква на половината од плоштината на трапезот $ABCD$.
208. Даден е трапез $ABCD$ чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O . Докажи дека триаголниците ADO и BCO имаат еднакви плоштини.
209. Определи ја плоштината на трапез кај кој должината на едниот крак е еднаква на 8 cm , а растојанието од средината на другиот крак до првиот крак е еднакво на 6 cm .
210. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се заемно нормални и со должини 5 cm . Определи ја плоштината на овој трапез.
211. Во рамнокрак трапез со плоштина 5 cm^2 е впишана кружница со радиус 1 cm . Определи го периметарот на овој трапез.
212. Симетралите на внатрешните агли на правоаголникот $ABCD$ се сечат во точките M, N, P и Q .
- Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.
 - Определи ја плоштината на квадратот $MNPQ$ ако должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се разликуваат за $k\text{ cm}$.
213. Во училиштето на Матеј има правоаголно фудбалско игралиште со должина 80 m и ширина 48 m . За колку проценти ќе се зголеми плоштината на игралиштето ако должината му се зголеми за 15% , а ширината му се зголеми за $\frac{1}{4}$?

214. Фудбалско игралиште во облик на правоаголник, чија ширина е двапати помала од должината, е нацртано на два плана и тоа: на едниот во размер 1:2500, а на другиот во размер 1:7500. Збирот на периметрите на двата правоаголника на размерите е 144 *mm*. Определи ги вистинската должина и ширина на игралиштето.

V.6. КОЦКА И КВАДАР

215. Дадена е коцка со должина на раб 6 *cm* и квадар со должини на рабови 9 *cm*, 12 *cm* и 15 *cm*. На колку најголеми можни еднакви коцки може да се расечат коцката и квадарот (димензиите се во сантиметри)? Дали користејќи ги сите добиени коцки од расекнувањето може да се состави нова коцка?
216. Самоил ги запакувал новогодишните подароци на Горјан во кутија во форма на коцка, со раб долг 6 *dm* и кутијата ја обложил со светликава хартија. Колку квадратни сантиметри е плоштината на хартијата со која Самоил ја обложил кутијата?
217. Збирот на должините на рабовите на една коцка е еднаков на 1224 *cm*. Определи ги плоштината и волуменот на оваа коцка.
218. Плоштината на една коцка е еднаква на 96 *cm*². Определи го волуменот на оваа коцка?
219. Плоштината на коцката е еднаква на плоштината на правоаголник со должини на страни 12 *cm* и 8 *cm*. Определи го волуменот на коцката.
220. Ако работ на коцката се зголеми за 1 *cm*, тогаш новодобиената коцка има плоштина која е за 366 *cm*² поголема од почетната коцка.
- Определи го волуменот на почетната коцка.
221. Квадар е составен од 12 еднакви коцки со должина на раб 10 *cm*. Пресметај ја плоштината на овој квадар. Определи ги сите решенија.
222. Коцка со должина на раб 3 *cm* е расечена на еднакви помали коцки со должина на раб 1 *cm*. Од добиените мали коцки се составени сите

можни квадрати. Кој од добиените квадрати има најголема, а кој најмала плоштина?

223. Волуменот на коцката е еднаков на 1728 cm^3 . Определи ја нејзината плоштина.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Без да ја пресметуваш вредноста на изразот определи ја неговата цифра на единиците:

$$326 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 629 + 451 \cdot 52 \cdot 953 \cdot 54.$$

Решение. Цифрата на единиците е еднаква на збирот на цифрите на единиците на собирачите. Цифрата на единиците на секој од множителите е еднаква на цифрата на единиците на производот кој се добива со множење на цифрите на единиците. Затоа имаме:

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 42 \cdot 72 + 2 \cdot 12 = \dots 4 + \dots 4 = \dots 8,$$

т.е. цифрата на единиците на дадениот израз е 8.

2. Пресметај го збирот

$$5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 2010 + 2015 + 2020.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 2010 + 2015 + 2020 &= \\ &= 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 402 + 403 + 404) \\ &= 5 \cdot [(1 + 404) + (2 + 403) + \dots + (202 + 203)] \\ &= 5 \cdot 202 \cdot 405 = 409050. \end{aligned}$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот: $(55 \cdot 77) : 35$.

Решение. Имаме:

$$(55 \cdot 77) : 35 = \frac{511 \cdot 7 \cdot 11}{5 \cdot 7} = 11 \cdot 11 = 121.$$

4. Збирот на некои 20 последователни природни броеви е еднаков на 2590. Кои се тие броеви?

Решение. Нека последователните броеви се $n, n+1, n+2, \dots, n+19$.
Имаме,

$$\begin{aligned} n + n+1 + n+2 + \dots + n+19 &= 2590 \\ 20n + 1 + 2 + 3 + \dots + 19 &= 2590 \\ 20n + \frac{19 \cdot 20}{2} &= 2590 \\ 2n + 19 &= 259 \\ n &= 120. \end{aligned}$$

Конечно, бараните броеви се:

120, 121, 122, ..., 139.

5. На која цифра завршува производот на 2019 седумки.

Решение. Имаме

$$7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401.$$

Понатаму, бидејќи $2019 = 4 \cdot 504 + 3$ добиваме

$$\begin{aligned} 7^{2019} &= 7^{4 \cdot 504 + 3} = 7^{4 \cdot 504} \cdot 7^3 = (7^4)^{504} \cdot 7^3 \\ &= (2401)^{504} \cdot 7^3 = \dots 1 \cdot 343 = \dots 3, \end{aligned}$$

т.е. производот на 2019 седумки завршува на цифрата 3.

6. На местата на ѕвездичките стави ги соодветните цифри така што множењата ќе бидат точни.

$\begin{array}{r} *2*.7 \\ \hline **8 \\ **** \\ \hline *****8 \end{array}$	$\begin{array}{r} *****.34* \\ \hline ***** \\ б) \quad ***** \\ 235\,038 \\ \hline *****6 \end{array}$	$\begin{array}{r} ***.*2* \\ \hline *** \\ в) \quad **** \\ *2* \\ \hline *9*2* \end{array}$
---	---	--

Решение. а) Цифрата на единиците на првиот производ е 8, што значи дека цифрата на единиците на првиот множител е 4, т.е. првиот множител е $*24$. Бидејќи $224 \cdot 7 > 1000$ заклучуваме дека цифрата на стотките на првиот множител е 1, т.е. првиот множител е 124. Бидејќи производот на првиот множител со цифрата на десетките на вториот множител мора да биде четирицифрен број, а $124 \cdot 8 = 992 < 1000$ заклучуваме дека цифрата на десетките на вториот множител е 9. Значи, бараниот производ е $124 \cdot 97 = 12028$.

б) За првиот множител имаме $235038 : 3 = 78346$. Понатаму, бидејќи производот на првиот множител и цифрата на единиците на вториот множител е петцифрен број, а $78346 \cdot 2 > 100000$ заклучуваме дека цифрата на единиците на вториот множител е 1. Според тоа, бараниот производ е $78346 \cdot 341 = 26715986$.

в) Првиот множител помножен со 2 дава четирицифрен број, а додека останатите два делимични производи се трицифрен броеви. Тоа значи дека вториот множител е 121. Првиот и третиот делимичен производ се еднакви на првиот множител, па затоа цифрата на десетките на првиот множител е еднаква на 2 и сега множењето е:

$$\begin{array}{r}
 2 \cdot 121 \\
 \hline
 2 \\
 **** \\
 2 \\
 \hline
 *9*2*
 \end{array}$$

Сега е јасно дека цифрата на единиците на вториот делимичен производ е еднаква на 0, што значи дека цифрата на единиците на првиот множител е 0 или 5, па затоа множењето е:

$$\begin{array}{rcl}
 *20 \cdot 121 & & *25 \cdot 121 \\
 \hline
 *20 & & *25 \\
 **40 & \text{или} & **50 \\
 *20 & & *25 \\
 \hline
 *9*20 & & *9*25
 \end{array}$$

Јасно, цифрата на стотките на првиот множител мора да е поголема од 5. Од

$$620 \cdot 121 = 75020 \text{ и } 625 \cdot 121 = 75625$$

следува дека таа не е 6, од

$$720 \cdot 121 = 87120 \text{ и } 725 \cdot 121 = 87725$$

следува дека таа не е еднаква на 7 и од

$$920 \cdot 121 = 111320 \text{ и } 925 \cdot 121 = 111925$$

следува дека таа не е еднаква на 9. Конечно, од

$$820 \cdot 121 = 99220 \text{ и } 825 \cdot 121 = 99825$$

заклучуваме дека задачата има две решенија и тоа:

$$\begin{array}{rcl}
 820 \cdot 121 & & 825 \cdot 121 \\
 \hline
 820 & & 825 \\
 1640 & \text{и} & 1650 \\
 820 & & 825 \\
 \hline
 99220 & & 99825
 \end{array}$$

7. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што делењето ќе биде точно:

$$3** : *3 = 3*.$$

Решение. Бидејќи $23 \cdot 3 > 3*$ заклучуваме дека цифрата на десетките на делителот е еднаква на 1. Понатаму, бидејќи $13 \cdot 31 = 403 > 3**$ заклучуваме дека цифрата на единиците на количникот мора да биде 0. Конечно, од $13 \cdot 30 = 390$ следува дека бараното делење е $390 : 13 = 30$.

8. На местото на секоја ѕвездичка стави по една цифра така што делењето ќе биде точно.

$$\begin{array}{r}
 *3****: ** = **** \\
 \underline{ - *** } \\
 0 \\
 \underline{ - **9 } \\
 ** \\
 \underline{ - ** } \\
 0
 \end{array}$$

Решение. Разликата на $*0*$ и $**9$ е едноцифрен број, што значи дека вториот број е од видот $*99$. Бидејќи $**9$ треба да е производ на едноцифрен и двоцифрен број, тој може да биде само 399, бидејќи 199, 299 и 599 се двоцифрени броеви, $299 = 13 \cdot 23$, $699 = 3 \cdot 233$, $799 = 17 \cdot 47$ и $899 = 29 \cdot 31$. Бидејќи $399 = 7 \cdot 57$, бројот со кој делиме е 57. Сега лесно се добива дека цифрата на единиците на количникот е 1, цифрата на десетките е 7, цифрата на стотките е 0, а со непосредна проверка добиваме дека цифрата на илјадитите може да биде само 4. Конечно, добиваме

$$\begin{array}{r}
 232047 : 57 = 4071 \\
 \underline{ - 228 } \\
 404 \\
 \underline{ - 399 } \\
 57 \\
 \underline{ - 57 } \\
 0
 \end{array}$$

9. На местата на ѕвездичките запиши ги сите девет цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што равенствата ќе бидат точни:

$$*, ** = *** = **, *$$

Решение. Јасно, цифрата 5 не може да биде цифра на единиците на трицифрениот број, бидејќи ниту еден производ на другите цифри не дава цифра на единици 5. Понатаму, цифрата 3 не може да биде цифра на единиците на трицифрениот број, бидејќи само производот на 7 и 9 дава цифра на единици 3, а треба да имаме два такви производи. Од исти причини и цифрите 1 и 7 не може да се цифра на единиците на трицифрениот број, а цифрата 9 не може да биде цифра на единиците

на трицифрениот број бидејќи производот на било кои две од преостанатите цифри нема цифра на единиците 9. Според тоа, цифрата на единиците на трицифрениот број може да биде 2, 4, 6 или 8.

Ако цифрата на единиците на трицифрениот број е 2, тогаш

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot *3 = **2 = *6 \cdot 7 & 4 \cdot *3 = **2 = *7 \cdot 6 \\ 3 \cdot *4 = **2 = *6 \cdot 7 & 3 \cdot *4 = *** = *7 \cdot 6 \end{array}$$

и ни остануваат цифрите 1, 5, 8 и 9. Понатаму, бидејќи производот на двоцифрен број со 3 или со 4 е помал од 500, заклучуваме дека само цифрата 1 може да биде цифра на стотките на трицифрениот број. Но тогаш десниот множител е поголем од 300, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

Ако цифрата на единиците на трицифрениот број е 8, тогаш

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot *4 = **8 = *3 \cdot 6 & 2 \cdot *4 = **8 = *6 \cdot 3 \\ 4 \cdot *2 = **8 = *3 \cdot 6 & 4 \cdot *2 = **8 = *6 \cdot 3 \end{array}$$

и ни остануваат цифрите 1, 5, 7 и 9. Понатаму, бидејќи производот на двоцифрен број со 2 или со 3 е помал од 500, заклучуваме дека само цифрата 1 може да биде цифра на стотките на трицифрениот број. Од првите две равенства не се добива решение, бидејќи десниот множител е поголем од 300, а во вторите равенства единствена можност е цифрата на десетките на двоцифрениот множител на десната страна да е 5. Но, тогаш $4 \cdot *2 = 1 \cdot 8 = 56 \cdot 3$, па немаме решение бидејќи цифрата 6 ќе се појави двапати.

Ако цифрата на единиците на трицифрениот број е 4, тогаш

$$\begin{array}{ll} 3 \cdot *8 = **4 = *9 \cdot 6 & 8 \cdot *3 = **4 = *9 \cdot 6 \\ 3 \cdot *8 = **4 = *6 \cdot 9 & 8 \cdot *3 = **4 = *6 \cdot 9 \end{array}$$

и ни остауваат цифрите 1, 2, 5 и 7. Во десните равенства цифрата на единиците на двоцифрениот множител на левата страна не може да биде 1 или 2, па останува да провериме за 5 и 7. Ако таа е 5, добиваме $3 \cdot 58 = 174 = 29 \cdot 6$ и ова е едно решение на задачата. Ако таа е 7, добиваме $3 \cdot 78 = 234$ и во случајов немаме решение бидејќи цифрата 3 се јавува двапати. Од првото равенство на десната страна не добиваме решение, бидејќи левиот производ е делив со 8, а десниот производ не е делив со 8. За да десниот производ на второто равенство на десната страна е делив со 8, цифрата на десетките на двоцифрениот множител мора да биде 1 или 5, па затоа $144 = 16 \cdot 9$ или $504 = 56 \cdot 9$, што значи дека и во двата случаја немаме решение на задачата.

Ако цифрата на единиците на трицифрениот број е 6, тогаш

$$4 \cdot *9 = **6 = *8 \cdot 2$$

$$9 \cdot *4 = **6 = *8 \cdot 2$$

$$4 \cdot *9 = **6 = *2 \cdot 8$$

$$9 \cdot *4 = **6 = *2 \cdot 8$$

и ни остануваат цифрите 1, 3, 5 и 7. Во десните равенства цифрата на единиците на двоцифрениот множител на левата страна не може да биде 1, па останува да провериме за 3, 5 и 7. Ако таа е 3, тогаш $4 \cdot 39 = 156 = 78 \cdot 2$ и ова е второ решение на задачата. Ако таа е 5, тогаш $4 \cdot 59 = 236$ и во овој случај немаме решение на задачата. Ако таа е 7, тогаш $4 \cdot 79 = 316$ и во овој случај немаме решение на задачата. Левиот производ на десните равенства е делив со 9, па затоа и десниот производ мора да е делив со 9. За првото равенство тоа е можно само ако цифрата на десетките на двоцифрениот множител на десната страна е 1, а за второто равенство таа треба да биде 7. Лесно се гледа дека и во двата случаја не добиваме решение на задачата.

Конечно, единствени решенија на задачата се

$$3 \cdot 58 = 174 = 29 \cdot 6 \text{ и } 4 \cdot 39 = 156 = 78 \cdot 2.$$

10. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$RDR - EM = RAE$$

$$: \quad - \quad -$$

$$I \cdot RH = DR$$

$$EH + MR = ARM.$$

Ако добиените цифри ги запишеме во растечки редослед од лево кон десно и под секоја од нив ја запишеш соодветната буква ќе го добиеш името на еден славен математичар и физичар. За кој научник станува збор?

Решение. Бидејќи збир на два двоцифрени броја е помал од 200, од $\overline{EH} + \overline{MR} = \overline{ARM}$ следува $A=1$. Понатаму, бидејќи збирот на секој двоцифрен број и број кој е помал од 200 е број помал од 300, од $\overline{RAE} - \overline{DR} = \overline{ARM}$ следува $R=2$. Сега од собирањата и одземањата во шемата добиваме:

$$10D - M - 11E = 8,$$

$$10E - 9M - H = 22,$$

$$M + 10D - E = 88,$$

$$10E + H + 9M = 118.$$

Од втората и четвртата равенка добиваме $20E = 140$, т.е. $E = 7$. Ако замениме во првата и третата равенка добиваме $10D - M = 85$ и $M + 10D = 95$, од каде добиваме $20D = 180$, па затоа $D = 9$. Значи, $M = 95 - 10 \cdot 9 = 5$, па од втората равенка добиваме $H = 3$. Конечно, $I = 292 : 73 = 4$ и решението на шемата е:

$$\begin{array}{r} 292 - 75 = 217 \\ : \quad - \quad - \\ 4 \cdot 23 = 92 \\ \hline 72 + 52 = 125. \end{array}$$

Ако цифрите ги запишеме во растечки редослед почнувајќи од најмалата го добиваме бројот 1234579, на кој му соодветствува зборот *ARHIMED* и тоа е името на славниот антички научник.

11. Во долната шема замени ги буквите со цифри така што на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри и пресметувањата по редици и колони се точни.

$$\begin{array}{r} AB \cdot B = CB \\ + \quad - \quad + \\ B : A = B \\ \hline DE \cdot F = GE. \end{array}$$

Решение. Од $B : A = B$ следува $A = 1$. Сега имаме $\overline{1B} + B = \overline{DE}$, па затоа $D = 2$ и $B \neq 0$. Понатаму, од $\overline{1B} \cdot B = \overline{CB}$ и $A = 1$ следува $B = 5$ или $B = 6$. Ако $B = 5$, тогаш $F = 4$, $E = 0$ и од $15 \cdot 5 = 75$ следува $C = 7$, па затоа $G = 0$. Ако $B = 6$, тогаш $F = 5$ и $E = 2$, што не е можно бидејќи $D = 2$. Конечно, шемата е

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 5 = 75 \\ + \quad - \quad + \\ 5 : 1 = 5 \\ \hline 20 \cdot 4 = 80. \end{array}$$

12. Реши го бројниот ребус

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Од $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$ следува $a \cdot \overline{ab} = \overline{bbb} : b$, од каде добиваме $a \cdot \overline{ab} = 111 = 3 \cdot 37$.

Конечно, бидејќи 37 е прост број од последното равенство следува $a = 3$ и $b = 7$, односно бараното множење е

$$3 \cdot 7 \cdot 37 = 777.$$

13. Во бројниот ребус

$$\overline{MIS} + \overline{MAS} = 928,$$

на ист букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Бројот $\overline{SUMA}$ е делив со 4. Која цифра соодветствува на цифрата I ?

Решение. Бидејќи при збир на два едноцифрени различни броја и пренос најмногу 1 може да се добие само број кој е помал или еднаков на 18, од собирањето на стотките заклучуваме дека $M = 4$. Понатаму, од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток $\overline{4A}$ на бројот $\overline{SU4A}$ е делив со 4, што значи дека $A = 0$, $A = 4$ или $A = 8$. Понатаму, $M = 4$ што значи дека случајот $A = 4$ противречи на условот на задачата. За $A = 0$ добиваме $\overline{4IS} + \overline{40S} = 928$, т.е. $10I + 2S = 128$, што не е можно бидејќи I и S се едноцифрени броеви. Значи, $A = 8$ и притоа важи $\overline{4IS} + \overline{48S} = 928$, т.е. $10I + 2S = 48$. Но, $M = 4$ и од условот на задачата и од последното равенство следува $I = 3$ и $S = 9$.

14. Реши го бројниот ребус

$$1995 \cdot \overline{abc} = \overline{defghij}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Бидејќи $1995 \cdot \overline{abc} < 1995 \cdot 1000 < 2000000$, заклучуваме дека првата цифра на седумцифрениот производ е еднаква на 1. Понатаму, бидејќи $1995 \cdot 499 < 1000000$ заклучуваме дека првата цифра на трицифрениот множител мора да е 5, 6, 7, 8 или 9. Понатаму, $3|1995$, па затоа $3|\overline{defghij}$. Но, како збирот на цифрите од 0 до 9 е еднаков на 45 и $3|45$ заклучуваме дека $3|\overline{abc}$. Според тоа, $9|\overline{defghij}$, па како $9|45$ заклучуваме дека $9|\overline{abc}$. Според тоа, бараниот трицифрен множител е некој од броевите од 504 до 981 кои се деливи со 9 и се запишани со различни цифри. Од овие броеви ги отфрламе броевите 504, 540, 650, 702, 720 и 810, бидејќи во овие случаи цифрата 0 ќе се појави повеќе пати. Исто така ги отстрануваме броевите 523, 531, 549, 567, 657, 675, 765 и 945, бидејќи во овие случаи цифрата 5 ќе се појави повеќе пати.

Остануваат уште 28 можности, од кои со непосредно множење добиваме дека единствено решение на задачата е $1995 \cdot 639 = 1274805$.

15. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcde} - \overline{abc} \cdot \overline{de} = 2003$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Да означиме $x = \overline{abc}$, $y = \overline{de}$. Тогаш ребусот можеме да го запишеме во видот

$$100x + y - xy = 2003,$$

од каде добиваме

$$(x-1)(100-y) = 1903.$$

Значи, $100-y$ е едноцифрен или двоцифен делител на $1903 = 11 \cdot 173$, па затоа $100-y=1$ или $100-y=11$. Ако $100-y=1$, тогаш $y=99$, што не е можно. За $100-y=11$, добиваме $y=89$, па затоа $x=174$. Конечно, $17489 - 174 \cdot 89 = 2003$.

16. Реши го бројниот ребус

$$\overline{abcd} + 2007 = \overline{efgh}$$

во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри и бројот $\overline{efgh}$ прима најголема можна вредност.

Решение. И при собирање на десетките и при собирање на стотките некоја цифра собрана со 0 треба да дава друга цифра. Последното е можно само ако при собирањето имаме пренос кој може да биде само 1. Оттука следува дека $c=9$, $g=0$ и $d \geq 4$. Бидејќи бараме збирот да има најголема можна вредност, прво ќе провериме дали $e=8$. Ако $e=8$, тогаш $a=6$. Сега, од собирањето на стотките следува дека $f=b+1$ и f треба да е најголемата можна цифра. Јасно, $f \neq 6, 8$ и 9 , а ако $f=7$, тогаш добиваме $b=6=a$, што не е можно. Понатаму, ако $f=5$, тогаш $b=4$, што не е можно бидејќи $d \geq 4$. Останува $f=4$, па затоа $b=3$ и оттука лесно го добиваме равенството

$$6395 + 2007 = 8402.$$

17. Во празните полиња на долната шема Мирко запишал 12 броеви и ги собрал броевите во секоја колона и секој ред со што ги добил прикажаните зборови. Потоа ги избришал броевите кои ги запишал на почетокот.

				2317
				3216
				4126
2619	2214	2102	2624	

Дали Мирко правилно ги извршил собирањата?

Решение. Збирот на сите 12 запишани броеви можеме да го пресметаме на два начина: ако прво ги собереме броевите запишани во секој ред, а потоа ги собереме добиените броеви или ако прво ги собереме броевите запишани во секоја колона, а потоа ги собереме добиените броеви. Во првиот случај имаме:

$$2317 + 3216 + 4126 = 9659,$$

а во вториот случај имаме:

$$2619 + 2214 + 2102 + 2624 = 9559.$$

Како што можеме да видиме добивме два различни збира, што значи дека Мирко не ги извршил правилно сите собирања.

18. Броевите од 1 до 100 подели ги на пет множества од по 20 броеви така што збирот на броевите запишани во секое множество ќе биде еднаков.

Решение. Збирот на броевите од 1 до 100 е:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 = 5050. \end{aligned}$$

Бидејќи збирот на броевите запишани во секое множество треба да е еднаков, заклучуваме дека збирот на броевите запишани во секое множество ќе биде еднаков на $5050 : 5 = 1010$. Броевите од 1 до 100 ќе ги поделиме на 50 парови и тоа:

$$(1, 100), (2, 99), (3, 98), (4, 97), (5, 96), \dots, (47, 54), (48, 52), (49, 52), (50, 51).$$

Збирот на броевите во секој пар е 101, па доволно е произволно да ги распределиме овие 50 парови во пет множества со по 10 парови. Една можна поделба е:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91\}, \\ &\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 90, 89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81\}, \\ &\{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 80, 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71\}, \\ &\{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61\} \text{ и} \\ &\{41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60\}. \end{aligned}$$

19. Природните броеви се запишани во низа еден по друг, без растојание меѓу нив:

12345678910111213141516...

Која цифра се наоѓа на 1972-то место, а која на 1973-то место?

Решение. Едноцифрените и двоцифрените броеви се запишани со $9 + 2 \cdot 90 = 189$ цифри, што значи дека остануваат $1972 - 189 = 1783$ цифри. Од $1783 = 3 \cdot 594 + 1$ следува дека со останатите броеви се запишани 594 трицифрени броеви и на 1972 место се наоѓа цифрата на стотките на бројот $594 + 99 = 693$, т.е. цифрата 6. Јасно, на 1973 место се наоѓа цифрата на десетките на бројот 694, т.е. цифрата 6.

20. Природните броеви од 1 до 100 се поделени на две множества, множество парни и множество непарни броеви. Определи во кое множество и за колку е поголем збирот на сите цифри кои се употребени за запишување на сите броеви во соодветните множества.

Решение. Непарни броеви во првата десетка се 1, 3, 5, 7 и 9, а парни броеви се 2, 4, 6, 8 и 10. Збирот на цифрите со кои се запишани непарните броеви е $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, а збирот на цифрите со кои се запишани парните броеви е $2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 0 = 21$, па разликата на двата збира е еднаква на $25 - 21 = 4$. Аналогно се добива дека соодветните разлики за втората, третата, четвртата, петтата, шестата, седмата, осмата и деветтата десетка е еднаков на 4. Непарни броеви во десеттата десетка се 91, 93, 95, 97 и 99, а парни се 92, 94, 96, 98 и 100. Соодветните зборови на цифри се еднакви на 70 и 57, т.е. разликата е $70 - 57 = 13$. Конечно, збирот на сите цифри со кои се запишани непарните броеви е поголем од збирот на сите цифри со кои се запишани парните броеви и тоа за $9 \cdot 4 + 13 = 49$.

21. Определи го бројот на парните трицифрени броеви кои без остаток може да се поделат со бројот 5.

Решение. Парен број е делив со бројот 5 ако и само ако неговата цифра на единиците е 0. Имаме 900 трицифрени броеви, од кои на нула завршуваат 90 броеви. Значи, имаме 90 парни трицифрени броеви кои се деливи со бројот 5.

22. Со помош на три тега може да се измери било која маса изразена со природен број помал од 14. Кои се мерните броеви на овие тегови?

Решение. Ќе го искористиме фактот дека секој природен број може да се запише како израз во кој се користат операциите собирање и одземање и степените на бројот 3, т.е. броевите 1, 3, 9, 27, 81, Во случајот мерните броеви на трите тега се 1, 3 и 9. Навистина,

$$\begin{array}{lllll}
 1=1, & 4=3+1, & 7=9+1-3, & 10=9+1, & 13=9+3+1, \\
 2=3-1, & 5=9-(3+1), & 8=9-1, & 11=9+3-1 & \\
 3=3, & 6=9-3, & 9=9, & 12=9+3 &
 \end{array}$$

23. На бројот 1979 му допишуваме низа цифри на следниов начин. Ги собираме четирите цифри $1+9+7+9=26$ и цифрата на единиците ја допишуваме на бројот 1979 и го добиваме бројот 19796. Понатаму, ги собираме последните четири цифри $9+7+9+6=31$ и цифрата на единиците ја допишуваме на бројот 19796 со што го добиваме бројот 197961. Постапката ја повторуваме со последните четири цифри на секој следен број и собирајќи ги последните четири цифри на секој следен број и допишувајќи му ја цифрата на единиците на збирот добиваме 1979613992337...

Дали на некое место во оваа низа цифри ќе се појават последователно цифрите 1234, во овој редослед?

Решение. Збирот на првите четири цифри е парен број. Сега имаме три непарни и една парна цифра, па затоа збирот е непарен. Потоа имаме три непарни и една парна цифра, па збирот е непарен. Повторно имаме три непарни и една парна цифра, па збирот е непарен. Во петтиот чекор имаме три непарни и една парна цифра, па збирот е непарен. Во шестиот чекор имаме четири непарни цифри, па збирот е парен итн. Забележуваме дека во низата цифри секогаш се појавуваат 4 непарни и 1 парна цифра, што значи дека во оваа низа не може да се појават цифрите 1234 во овој редослед.

24. Подреди ги по големина броевите $|a|$, $|b|$ и $|c|$, ако

$$a = |-3|-4+1, \quad b = (-5)-(+3)+2-2^3, \quad c = -(4^2-8)+(3^2+6).$$

Решение. Имаме:

$$a = |-3|-4+1 = 3-4+1 = 0,$$

$$b = (-5)-(+3)+2-2^3 = -8-6 = -14,$$

$$c = -(4^2-8)+(3^2+6) = -8+15 = 7,$$

па затоа $|a|=0$, $|b|=14$ и $|c|=7$, т.е. $|a|<|c|<|b|$.

25. Подреди ги по големина апсолутните вредности на броевите A , B и C ако

$$A = |b|-2a-3, \quad B = 7-3|a|+5b, \quad C = |a+b|-ab+11 \text{ и } a = -3, b = -7.$$

Решение. Имаме:

$$A = |b| - 2a - 3 = |-7| - 2(-3) - 3 = 10,$$

$$B = 7 - 3|a| + 5b = 7 - 3 \cdot 3 + 5(-7) = -37,$$

$$C = |a + b| - ab + 11 = |-3 - 7| - (-3)(-7) + 11 = 0,$$

па затоа $|A| = 10, |B| = 37, |C| = 0$ и $|C| < |A| < |B|$.

26. Подреди ги по големина апсолутните вредности на броевите A, B и C ако

$$A = 4 - x(x + y), \quad B = 2x + z + 1, \quad C = z - (1 - z) \text{ и } x = 3, y = -1, z = -7.$$

Решение. Имаме:

$$A = 4 - x(x + y) = 4 - 3(3 + (-1)) = -2,$$

$$B = 2x + z + 1 = 2 \cdot 3 + (-7) + 1 = 0,$$

$$C = z - (1 - z) = -7 - (1 - (-7)) = -15,$$

па затоа $|A| = 2, |B| = 0, |C| = 15$ и $|B| < |A| < |C|$.

27. На неколку листови се запишани броевите 1 или -1 (на секој лист по еден број). Збирот на запишаните броеви е 0, а нивниот производ е 1. Докажи дека бројот на листовите е делив со 4.

Решение. Бидејќи збирот на сите броеви е еднаков на 0, заклучуваме дека бројот на позитивните броеви е еднаков на бројот на негативните броеви. Понатаму, бидејќи производот на сите броеви е 1, заклучуваме дека имаме парен број негативни броеви, т.е. бројот на негативните броеви е еднаков на $2k$. Конечно, имаме $2k + 2k = 4k$ броеви, т.е. листови и овој број е делив со 4.

28. Дадени се 2019 броеви секој од кои е еднаков на 1 или -1 . Дали може овие броеви да се распоредат во две одделни групи така што збирот на броевите во првата група ќе биде еднаков на збирот на броевите во втората група?

Решение. При било каква поделба на дадените броеви во едната група ќе имаме парен број, а во другата ќе имаме непарен број броеви. Збирот на два спротивни броја е еднаков на 0, па затоа збирот на броевите во првата група ќе биде парен (позитивен или негативен), а збирот на броевите во втората група ќе биде непарен број. Значи, балансот на распоредување на дадените броеви не е можно.

1.2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ. ДРОПКИ

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\left(\frac{131313}{686868} + \frac{1648}{1751}\right)\left(\frac{1648}{1751} - \frac{131313}{686868}\right) : 2\frac{1}{16}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{131313}{686868} + \frac{1648}{1751}\right)\left(\frac{1648}{1751} - \frac{131313}{686868}\right) : 2\frac{1}{16} = \\ & = \left(\frac{13 \cdot 10101}{68 \cdot 10101} + \frac{16 \cdot 103}{17 \cdot 103}\right)\left(\frac{16 \cdot 103}{17 \cdot 103} - \frac{13 \cdot 10101}{68 \cdot 10101}\right) : \frac{33}{16} \\ & = \left(\frac{13}{68} + \frac{64}{68}\right)\left(\frac{64}{68} - \frac{13}{68}\right) \cdot \frac{16}{33} \\ & = \frac{77}{68} \cdot \frac{51}{68} \cdot \frac{16}{33} = \frac{7}{17}. \end{aligned}$$

30. Подреди ги по големина во растечки редослед броевите A, B, C и D , ако D е решение на равенката $2\frac{4}{9} : (7 - x) = \frac{4}{9}$ и

$$A = \frac{4\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{3} + 5\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{3}}{8 + \frac{1}{3}}, \quad B = 21 - 5\frac{1}{8} + 5\frac{17}{24} - 19\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad C = \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} : \frac{5}{6} - 1\right) : \frac{9}{14}.$$

Решение. Прво ќе го определиме D . Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{22}{9} : (7 - x) &= \frac{4}{9} \\ 7 - x &= \frac{22}{4} \\ x &= 7 - \frac{11}{2} = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

па затоа $D = 1\frac{1}{2}$. Понатаму,

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{3} + 5\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{3}}{8 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{21 \cdot 4}{5 \cdot 3} + \frac{29 \cdot 4}{5 \cdot 3}}{\frac{25}{3}} = \frac{\frac{84 + 116}{15}}{\frac{25}{3}} = \frac{\frac{200}{15}}{\frac{25}{3}} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}, \\ B &= 21 - 5\frac{1}{8} + 5\frac{17}{24} - 19\frac{1}{4} = 21 - 5 + 5 - 19 - \frac{3}{24} + \frac{17}{24} - \frac{6}{24} = 2\frac{1}{3} \quad \text{и} \\ C &= \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} : \frac{5}{6} - 1\right) : \frac{9}{14} = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3} : \frac{5}{6} - 1\right) : \frac{9}{14} = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} - 1\right) \cdot \frac{14}{9} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Според тоа, бараното подредување е $D < C < A < B$.

31. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{42021}{4}A + 99B$ ако

$$A = \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91},$$

а B е решението на равенката

$$\frac{195}{156} \cdot \frac{136}{187} + \left(\frac{65}{33} \cdot \frac{12}{30} - B\right) = \frac{34}{51} \cdot \frac{68}{17} \cdot \frac{25}{44}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91} \\
 &= \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{6 \cdot 13} + \frac{1}{7 \cdot 13} \\
 &= \frac{4+3}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{5+4}{4 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{6+5}{5 \cdot 6 \cdot 11} + \frac{7+6}{6 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} \\
 &= \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{5-4}{4 \cdot 5} + \frac{6-5}{5 \cdot 6} + \frac{7-6}{6 \cdot 7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}
 \end{aligned}$$

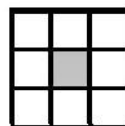
и

$$\begin{aligned}
 \frac{195}{156} \cdot \frac{136}{187} + \left(\frac{65}{33} \cdot \frac{12}{30} - B \right) &= \frac{34}{51} \cdot \frac{68}{17} \cdot \frac{25}{44} \\
 \frac{3 \cdot 5 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17}{11 \cdot 17} + \left(\frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 11} \cdot \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2 \cdot 3} - B \right) &= \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 17} \cdot \frac{4 \cdot 17}{17} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 11} \\
 \frac{10}{11} + \left(\frac{26}{33} - B \right) &= \frac{50}{33} \\
 \frac{56}{33} - B &= \frac{50}{33} \\
 B &= \frac{6}{33} = \frac{2}{11},
 \end{aligned}$$

па затоа

$$\frac{42021}{4} A + 99B = \frac{42021}{4} \cdot \frac{4}{21} + 99 \cdot \frac{2}{11} = 2001 + 18 = 2019.$$

32. Броевите од 1 до 8 се запишани во квадратчињата на табелата десно (без централното квадратче), така што збирот на трите броја во првиот ред, збирот на трите броја во третиот ред, збирот на трите броја во првата колона и збирот на трите броја во третата колона е еднаков. Определи ја најголемата можна вредност на овие зборови и дади барем еден распоред на броевите



Решение. Ако полињата ги пополниме како на цртежот десно, тогаш

$$a + b + c = f + g + h = a + d + f = c + e + h = A,$$

па затоа

$$(a + b + c) + (f + g + h) + (a + d + f) + (c + e + h) = 4A,$$

т.е.

$$(a + b + c + d + e + f + g + h) + (a + c + f + h) = 4A,$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + (a + c + f + h) = 4A$$

од каде добиваме

$$36 + a + c + f + h = 4A.$$



Последното равенство е исполнето ако и само ако 4 е делител на збирот $a + c + f + h$, а најголемата вредност на A се достигнува ако за a, c, f, h ги избереме најголемите можни броеви. Јасно, тоа се броевите 8, 7, 6 и 3, или пак броевите 8, 7, 5 и 4, при што добиваме $36 + 24 = 4A$, т.е. $A = 15$. Во првиот случај е можно избраните броеви да се распоредат на саканиот начин (цртеж десно), а додека во вториот случај тоа не е можно (Зошто?).

8	1	6
4		2
3	5	7

33. Броевите од 1 до 8 се запишани во квадратчињата на табелата десно (без централното квадратче), така што збирот на трите броја во првиот ред, збирот на трите броја во третиот ред, збирот на трите броја во првата колона и збирот на трите броја во третата колона е еднаков. Определи ја најмалата можна вредност на овие зборови и дади барем еден распоред на броевите

Решение. Ако полињата ги пополниме како на цртежот десно, тогаш

a	b	c
d		e
f	g	h

$$a + b + c = f + g + h = a + d + f = c + e + h = A,$$

па затоа

$$(a + b + c) + (f + g + h) + (a + d + f) + (c + e + h) = 4A,$$

т.е.

$$(a + b + c + d + e + f + g + h) + (a + c + f + h) = 4A,$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + (a + c + f + h) = 4A$$

од каде добиваме

$$36 + a + c + f + h = 4A.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако 4 е делител на збирот $a + c + f + h$, а најмалата вредност на A се достигнува ако за a, c, f, h ги избереме најмалите можни броеви. Јасно, тоа се броевите 1, 2, 3 и 6, или пак броевите 1, 2, 4 и 5, при што добиваме $36 + 12 = 4A$, т.е. $A = 12$. Во првиот случај е можно избраните броеви да се распоредат на саканиот начин (цртеждесно), а додека во вториот случај тоа не е можно (Зошто?).

1	5	6
8		4
3	7	2

34. Во квадратчињата на фигурата дадена на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 9 (секој број е запишан по еднаш) така што бројот

запишан во секое кругче да е еднаков на збирот на броевите во соседните квадратчиња. Кој број е запишан во горното лево квадратче?

Решение. Нека во празните квадратчиња се запишани a, b, c, d, e и f (цртеж десно). Тогаш

$$a + b + c + d + e + f = 29,$$

$$a + b + c = 13,$$

$$b + d = 9,$$

$$c + e = 8,$$

$$d + f = 11.$$

Ако ги собереме второто, четвртото и петтото равенство добиваме

$$a + b + c + d + e + f + c = 32.$$

Сега, бидејќи $a + b + c + d + e + f = 29$, од последното равенство добиваме $29 + c = 32$, т.е. $c = 3$.

Понатаму, од $c + e = 8$ следува $e = 5$. Според тоа,

$$a + b = 10, \quad b + d = 9 \text{ и } d + f = 11,$$

па како $\{a, b, d, f\} = \{2, 4, 7, 8\}$ заклучуваме $a = 8, b = 2, d = 7, f = 4$. Конечно, во горното лево квадратче е запишан бројот 8.

?		6
14	1	16
18	9	21

a	b	6
14	1	16
c	9	d
e		f

35. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала биде еднаков.

Решение. Збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дејагонала е еднаков на

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{15}{12}.$$

Бидејќи $\frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$ во првото квадратче на втората

колона треба да го запишеме бројот $\frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}$.

Понатаму во третото квадратче на првиот ред

треба да го запишеме бројот $\frac{15}{12} - \frac{7}{12} - \frac{1}{6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Постаката ја продолжуваме и го добиваме магичниот квадрат прикажан на цртежот десно.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

36. Во централното поле на правоаголникот прикажан на цртежот десно запиши го најголемиот цел број кој е помал од бројот $-9,2$, а потоа во останатите полиња запиши броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

		$-9,1$
$-10,9$	0	

Решение. Најголемиот цел број кој е поголем од бројот $-9,2$ е -10 .

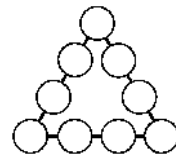
Значи, збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала треба да е еднаков на

$$-9,1 - 10 - 10,9 = -30.$$

Сега лесно се пополнуваат останатите полиња. Решението на задачата е дадено на цртежот десно.

$-0,9$	-20	$-9,1$
$-18,2$	-10	$-1,8$
$-10,9$	0	$-19,1$

37. Дропките $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$ распореди ги во кругчињата на фигурата прикажана на цртежот десно така што збирот на броевите запишани на секоја страна биде еднаков и притоа тој да е:



- а) најмал, б) најголем.

Решение. Имаме

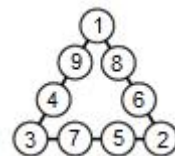
$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}, \frac{1}{3} = \frac{4}{12}, \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{1}{6} = \frac{2}{12}, \frac{1}{12} = \frac{1}{12}, \frac{5}{12} = \frac{5}{12}, \frac{7}{12} = \frac{7}{12},$$

што значи дека дадените дробки се: $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$, па затоа распоредувањето на дробките е еквивалентно на распоредувањето на броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Збирот на броевите е еднаков на $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

- а) Бидејќи трите броја запишани во темињата на триаголникот се собираат по два пати збирот на броевите запишани на секоја страна ќе биде најмал, ако во темињата се запишани најмалите можни броеви, т.е. броевите 1, 2 и 3. Значи, збирот на броевите запишани на секоја страна треба да биде еднаков на

$$(45 + 1 + 2 + 3) : 3 = 17$$

и еден од можните распореди на дадените броеви е прикажан на цртежот десно. Тоа значи дека најма-

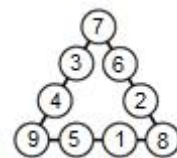


лиот збир на дробките ќе биде $\frac{17}{12}$. Обиди се да најдеш распоред кој е различен од добиениот.

б) Аналогно збирот на броевите запишани на секоја страна на триаголникот ќе биде најголем ако во аголните кругчиња се запишани броевите 7, 8 и 9. Значи, збирот на броевите запишани на секоја страна треба да биде еднаков на

$$(45 + 7 + 8 + 9) : 3 = 23$$

и еден од можните распореди на дадените броеви е прикажан на цртежот десно. Тоа значи дека најмалиот збир на дробките ќе биде $\frac{23}{12}$. Обиди се да најдеш распоред кој е различен од добиениот.



Коментар. Доколку во задачата се бараше било какво распоредување на дадените дробки, тогаш доволно е во темињата да запишеме било кои три броја x, y, z чиј збир е делив со 3, а останатите броеви ги распоредуваме така што збирот на броевите запишани на секоја страна е еднаков на $(45 + x + y + z) : 3$. Обиди се самостојно да најдеш неколку вакви решенија.

38. Што е поголемо: $\frac{13}{17}$ или $\frac{117}{154}$?

Решение. Имаме: $\frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 9}{17 \cdot 9} = \frac{117}{153} > \frac{117}{154}$.

39. Кој број е поголем: $\frac{7}{1988}$ или $\frac{2}{569}$?

Решение. Имаме: $\frac{7}{1988} = \frac{1}{284} = \frac{2}{568} > \frac{2}{569}$.

40. Која дробка е поголема $\frac{6660}{6661}$ или $\frac{9998}{9999}$?

Решение. Имаме $\frac{6660}{6661} = 1 - \frac{1}{6661}$ и $\frac{9998}{9999} = 1 - \frac{1}{9999}$. Од $9999 > 6661$ следува $\frac{1}{9999} < \frac{1}{6661}$, па затоа $1 - \frac{1}{9999} > 1 - \frac{1}{6661}$, т.е. $\frac{9998}{9999} > \frac{6660}{6661}$.

41. Што е поголемо $\frac{1}{181}$ или $\frac{11}{1994}$?

Решение. Имаме: $\frac{1}{181} = \frac{11}{181 \cdot 11} = \frac{11}{1991} > \frac{11}{1994}$.

42. Што е поголемо $\frac{19}{1995}$ или $\frac{20}{2079}$?

Решение. Имаме: $\frac{19}{1995} = \frac{380}{39900} < \frac{380}{39501} = \frac{20}{2079}$.

43. Запиши пет рационални броеви поголеми од $\frac{3}{4}$, а помали од $\frac{4}{5}$.

Решение. Имаме $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} = \frac{90}{120}$ и $\frac{4}{5} = \frac{16}{20} = \frac{96}{120}$, па едено решение на задачата се дробките $\frac{91}{120}, \frac{92}{120}, \frac{93}{120}, \frac{94}{120}$ и $\frac{95}{120}$.

44. Без да делиш и без да сведуваш на најмал заеднички именител утврди која од дробките $\frac{599}{799}$ или $\frac{5999}{7999}$ е поголема.

Решение. Двете дробки ќе ги одземеме од бројот 1, а потоа првата дробка ќе ја прошириме со 10. Добиваме

$$1 - \frac{599}{799} = \frac{200}{799} = \frac{2000}{7990} \text{ и } 1 - \frac{5999}{7999} = \frac{2000}{7999}.$$

Понатаму, од $\frac{2000}{7990} > \frac{2000}{7999}$ следува $1 - \frac{599}{799} > 1 - \frac{5999}{7999}$, т.е. $\frac{599}{799} < \frac{5999}{7999}$.

45. Спореди ги дробките

а) $\frac{13}{33}, \frac{1313}{3333}, \frac{131313}{333333}$, б) $\frac{41}{77}, \frac{4141}{7777}, \frac{414141}{777777}$.

Решение. Ако втората дробка ја скратиме со 101, а третата ја скратиме со 10101 ја добиваме првата дробка. Според тоа, и во двата случаја дробките се еднакви.

46. Што е поголемо $\frac{2018}{2019}$ или $\frac{2019}{2020}$?

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2020} &< \frac{1}{2019} \\ -\frac{1}{2019} &< -\frac{1}{2020} \\ 1 - \frac{1}{2019} &< 1 - \frac{1}{2020} \\ \frac{2018}{2019} &< \frac{2019}{2020}. \end{aligned}$$

47. Спореди ги по големина дробките

а) $\frac{65}{2014}$ и $\frac{7}{145}$, б) $\frac{1}{5}$ и $\frac{403}{2016}$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{65}{2014} = \frac{65 \cdot 7}{2014 \cdot 7} = \frac{455}{14098} \text{ и } \frac{7}{145} = \frac{7 \cdot 65}{145 \cdot 65} = \frac{455}{9425}.$$

Сега од $\frac{455}{14098} < \frac{455}{9425}$ следува $\frac{65}{2014} < \frac{7}{145}$.

б) Имаме $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 403}{5 \cdot 403} = \frac{403}{2015} > \frac{403}{2016}$.

48. Определи дробка со именител 9 која е поголема од $\frac{2}{3}$ и е помала од $\frac{5}{6}$.

Решение. Нека именителот на бараната дробка е x . Тогаш $\frac{2}{3} < \frac{x}{9} < \frac{5}{6}$, односно $\frac{24}{36} < \frac{4x}{36} < \frac{30}{36}$, од каде добиваме $24 < 4x < 30$. Последните неравенства се исполнети само за $x = 7$, па затоа бараната дробка е $\frac{7}{9}$.

49. Определи ги сите дробки со едноцифрени именители секоја од кои е поголема од $\frac{7}{9}$ и е помала од $\frac{8}{9}$.

Решение. Ако секоја од дадените дробки ја прошириме последователно со 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, ги добиваме следните парови дробки: $\frac{14}{18}$ и $\frac{16}{18}$, $\frac{21}{27}$ и $\frac{24}{27}$, $\frac{28}{36}$ и $\frac{32}{36}$, $\frac{35}{45}$ и $\frac{40}{45}$, $\frac{42}{54}$ и $\frac{48}{54}$, $\frac{49}{63}$ и $\frac{56}{63}$, $\frac{56}{72}$ и $\frac{64}{72}$. Понатаму ги наоѓаме сите дробки кои во секој пар се со ист именител, со што ги добиваме дробките

$$\frac{15}{18}, \frac{22}{27}, \frac{23}{27}, \frac{29}{36}, \frac{30}{36}, \frac{31}{36}, \frac{36}{45}, \frac{37}{45}, \frac{38}{45}, \frac{39}{45}, \frac{43}{54}, \frac{44}{54}, \frac{45}{54}, \frac{46}{54}, \\ \frac{47}{54}, \frac{50}{63}, \frac{51}{63}, \frac{52}{63}, \frac{53}{63}, \frac{54}{63}, \frac{55}{63}, \frac{57}{72}, \frac{58}{72}, \frac{59}{72}, \frac{60}{72}, \frac{61}{72}, \frac{62}{72}, \frac{63}{72}.$$

Сега ги наоѓаме дробките кои по скратувањето се дробки со едноцифрени именители и тоа се бараните дробки. Конечно, решение на задачата се дробките: $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ и $\frac{7}{8}$.

50. Ако е $\frac{3x+y}{3y-x} = 2$, определи ја вредноста на изразот $\frac{x+3y}{3x-y}$.

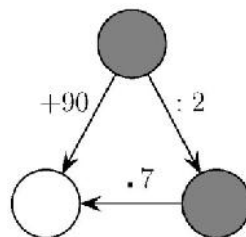
Решение. Од $\frac{3x+y}{3y-x} = 2$ следува $3x + y = 2(3y - x)$, т.е. $3x + y = 6y - 2x$,

од каде добиваме $3y = 3x$, односно $x = y$. Значи, $\frac{x+3y}{3x-y} = \frac{x+3x}{3x-x} = \frac{4x}{2x} = 2$.

I.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

51. Определи го збирот на броевите кои треба да бидат запишани во сивите кругови така што пресметувањата ќе бидат точни.

Решение. Нека во белиот круг е запишан бројот x . Тогаш $x - 90 = (x : 7) \cdot 2$, од каде добиваме $7x - 630 = 2x$, односно $x = 126$. Според тоа, во



сивите кругови треба да се запишани броевите $126 - 90 = 36$ и $126 : 7 = 18$. Нивниот збир е $36 + 18 = 54$.

52. Реши ја равенката:

$$((5x + 178) \cdot 15 + 90) : 45 = 63$$

Решение. Имаме:

$$((5x + 178) \cdot 15 + 90) : 45 = 63,$$

$$15 \cdot ((5x + 178) + 6) : 45 = 63,$$

$$((5x + 178) + 6) : 3 = 63,$$

$$(5x + 178) + 6 = 189,$$

$$5x + 178 = 183,$$

$$x = 1.$$

53. Реши ја равенката:

$$(111 - (264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5)) : 12) : 11 = 9.$$

Решение. Последователно добиваме:

$$(111 - (264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5)) : 12) : 11 = 9,$$

$$111 - (264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5)) : 12 = 99,$$

$$(264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5)) : 12 = 12,$$

$$264 + (17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5) = 144,$$

$$(17 - \frac{42}{x}) \cdot (-5) = -120,$$

$$17 - \frac{42}{x} = 24,$$

$$\frac{42}{x} = -7,$$

$$x = -6.$$

54. Реши ја равенката:

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{70} = \frac{x}{20}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{70} = \frac{x}{20},$$

$$\frac{28}{7} = \frac{x}{2},$$

$$x = 4 \cdot 2 = 8.$$

55. Реши ја равенката:

$$68 - a \cdot a = 32.$$

Решение. Имаме:

$$68 - a \cdot a = 32$$

$$a \cdot a = 68 - 32$$

$$a \cdot a = 36$$

$$a \cdot a = 6 \cdot 6$$

па затоа $a = 6$.

56. Определи ги сите природни броеви x за кои вредноста на изразот $5 - [3 + (-4 + x)]$ е поголема од -2 .

Решение. Последователно добиваме:

$$5 - [3 + (-4 + x)] > -2,$$

$$5 + 2 > 3 - 4 + x,$$

$$7 > x - 1$$

$$7 + 1 > x$$

$$x < 8.$$

Според тоа, решение на задачата е множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

57. За кои цели броеви $\mathbb{Z}$ се исполнети неравенствата:

$$-2 + n < 2(n + 1) < n ?$$

Решение. Од левото неравенство добиваме

$$-2 + n < 2n + 2,$$

$$-2 - 2 < 2n - n$$

$$-4 < n.$$

Од десното неравенство следува

$$2n + 2 < n,$$

$$2n - n < -2$$

$$n < -2.$$

Според тоа, $-4 < n < -2$ и како $n \in \mathbb{Z}$ добиваме $n = -3$.

58. Определи го најголемиот природен број за кој е исполнето неравенството:

$$78 - 2 \cdot (56 - 32) + x < 51 : 3 + 2 \cdot (50 - 35).$$

Решение. Последователно добиваме

$$78 - 2 \cdot (56 - 32) + x < 51 : 3 + 2 \cdot (50 - 35)$$

$$78 - 2 \cdot 24 + x < 17 + 2 \cdot 15$$

$$78 - 48 + x < 17 + 30$$

$$30 + x < 47,$$

па затоа $x = 16$.

59. Определи го најмалиот природен број кој треба да се стави на местото на x така што е точно неравенството

$$x + 7 \cdot 65 - 3 \cdot 72 > 3 \cdot (2 \cdot 7 + 69).$$

Решение. Имаме:

$$x + 7 \cdot 65 - 3 \cdot 72 > 3 \cdot (2 \cdot 7 + 69)$$

$$x + 455 - 216 > 3 \cdot (14 + 69)$$

$$x + 239 > 3 \cdot 83$$

$$x + 239 > 249.$$

Затоа најмалиот природен број кој треба да се стави на местото на x така што е точно неравенството е бројот 11.

60. Колку природни броеви може да се стават на местото на x така што се точни неравенствата

$$10 < 2 + 3x < 40.$$

Решение. За да десното неравенство е исполнето потребно е бројот x да е поголем или еднаков на 3, а за да левото неравенство е точно потребно е бројот x да е помал или еднаков на 12. Значи, за да двете неравенства се исполнети може да се стават броевите 3, 4, 5 ... 11, 12, што значи дека може да се стават 10 природни броеви.

61. Определи ги сите дробки со именител 8 кои се поголеми од $\frac{1}{3}$, а се помали од $\frac{2}{3}$.

Решение. Нека броителот на бараната дробка е x . Тогаш $\frac{1}{3} < \frac{x}{8} < \frac{2}{3}$, од каде добиваме $8 < 3x < 16$. Значи, $x \in \{3, 4, 5\}$ и бараните дробки се $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}$.

62. Определи ги сите природни броеви n такви што се исполнети неравенствата $\frac{3}{8} < \frac{n}{12} < \frac{11}{18}$.

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{3}{8} < \frac{n}{12} < \frac{11}{18}$$

$$\frac{27}{72} < \frac{6n}{72} < \frac{44}{78}$$

$$27 < 6n < 44$$

$$\frac{9}{2} < n < \frac{22}{3}$$

па затоа $n \in \{5, 6, 7\}$.

63. Определи ги сите цели броеви n за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{11}{12}.$$

Решение. Од левото неравенство последователно добиваме:

$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5},$$

$$5 < 3(1-n),$$

$$3n < 3-5,$$

$$n < -\frac{2}{3}.$$

Од десното неравенство последователно добиваме:

$$\frac{1-n}{5} < \frac{11}{12},$$

$$12(1-n) < 55,$$

$$12n > 12-55,$$

$$n > -\frac{43}{12}.$$

Конечно, бидејќи n е цел број од $-\frac{43}{12} < n < -\frac{2}{3}$ следува $n \in \{-3, -2, -1\}$.

64. Определи ги сите цели броеви a за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{2}{5} < \frac{a+7}{6} < \frac{5}{3}.$$

Решение. Од левото неравенство последователно добиваме:

$$\frac{2}{5} < \frac{a+7}{6},$$

$$12 < 5(a+7),$$

$$12-35 < 5a,$$

$$a > -\frac{23}{5}.$$

Од десното неравенство последователно добиваме:

$$\frac{a+7}{6} < \frac{5}{3},$$

$$3(a+7) < 30,$$

$$3a < 30-21,$$

$$a < 3.$$

Конечно, бидејќи a е цел број од $-\frac{23}{5} < a < 3$ следува

$$a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \dots$$

65. Определи четири дробки a, b, c и d со едноцифрени именители за кои се исполнети неравенствата

$$\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}.$$

Решение. Именителите на бараните дробки може да бидат 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8. Бидејќи $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9}$, заклучуваме дека именителите може да бидат 5, 6, 7 или 8. Бидејќи $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$, заклучуваме дека бараните дробки a, b, c и d се $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ и $\frac{7}{8}$, соодветно.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Тешко е да се пресмета производот на деновите од 1986 недели. Затоа пресметај и образложи која е последната цифра на овој производ.

Решение. Производот на деновите од 4 недели е $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 49$, па затоа тој завршува на цифрата 1. Бидејќи $1984 = 4 \cdot 496$ заклучуваме дека производот на деновите од 1984 недели завршува на цифрата 1. Конечно производот на деновите од 1986 недели има иста цифра како и производот $7 \cdot 7 = 49$, т.е. завршува на цифрата 9.

2. При делењето на бројот n со бројот 63 се добива количник k и остаток 59. Определи го остатокот при делењето на бројот n со бројот 21.

Решение. Од условот на задачата следува $n = 63k + 59$, па затоа

$$n = 63k + 59 = 21 \cdot 3k + 2 \cdot 21 + 17 = 21(3k + 2) + 17.$$

Од последното равенство следува дека остатокот при делењето на бројот n со бројот 21 е 17.

3. Нека n е природен број. При делењето на бројот $n + 100$ со бројот 23 се добива остаток 17. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот n со 23.

Решение. Имаме $100 = 23 \cdot 4 + 8$. Нека $n = 23k + q$. Тогаш

$$n + 100 = 23k + q + 23 \cdot 4 + 8 = 23(k + 4) + q + 8,$$

па затоа $q + 8 = 17$, од каде добиваме $q = 9$.

4. Кога четирицифрен природен број a ќе се подели со бројот b се добива остаток c . Производот на броевите b и c е еднаков на 57344, а нивниот збир е непарен. Определи го бројот a .

Решение. Имаме $57344 = 2^{13} \cdot 7 = 8192 \cdot 7 = 57344 \cdot 1$. Единствени непарни делители на 57344 се 1 и 7. Четирицифрениот број може да се запише како $a = bq + c$, при што $c < b$. Бидејќи збирот им е непарен, а остатокот е помал од делителот, заклучуваме дека остатокот може да биде 1 или 7. Ако $c = 1$, тогаш $b = 57344$, па затоа a не е четирицифрен број. Ако $c = 7$, тогаш $b = 7$ и за $q = 1$ го добиваме четирицифрениот број $a = 8192 \cdot 1 + 7 = 8199$, кој е решение на задачата. За $q \geq 2$, бројот $a = 8192q + 7$ не е четирицифрен

5. Броевите од 1 до 101 се запишани еден до друг и е добиен бројот 1234567891011...9899100101. Докажи дека овој број е сложен, но не е точен квадрат на природен број.

Решение. Збирот на цифрите на бројот 1234567891011...9899100101 е еднаков на $20 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 3 = 20 \cdot 45 + 3 = 903$ и тој е делив со 3, но не е делив со 9. Според тоа, бројот 1234567891011...9899100101 е делив со 3, но не е делив со $9 = 3^2$, па затоа тој е сложен број кој не е точен квадрат.

6. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што множењето ќе биде точно:

$$*7 \cdot 30 = *0**.$$

Решение. Јасно, цифрата на единиците на производот е еднаква на 0, па како $3 \cdot 7 = 21$ добиваме дека цифрата на десетките е еднаква на 1. Според тоа, $*7 \cdot 30 = *010$. Бидејќи производот е делив со 3, неговата цифра на илјадите е еднаква на 2, 5 или 8. Со непосредна проверка добиваме дека $67 \cdot 30 = 2010$.

7. На местата на ѕвездичките стави соодветни цифри така што множењето ќе биде точно:

$$*3* \cdot 45 = 5*4*.$$

Решение. Производот $5*4*$ е делив со 45. Бидејќи $45 = 5 \cdot 9$, а броевите 5 и 9 се заемно прости, добиениот производ мора да биде делив со 5 и со 9. Од деливост со 5 следува дека цифрата на единиците на производот мора да е 0 или 5.

1) Ако цифрата на единиците е 0, тогаш од деливоста со 9 следува дека цифрата на стотките може да биде 0 или 9, што значи дека производот е 5040 или 5940. Сега од $5040 : 45 = 112 \neq *3*$ следува дека во овој случај немаме решение, а од $5940 : 45 = 132$ добиваме дека $132 \cdot 45 = 5940$ е едно решение на задачата.

2) Ако цифрата на единиците е 5, тогаш од деливоста со 9 следува дека цифрата на стотките мора да е 4. Но, $5445 : 45 = 121 \neq *3*$, па затоа во овој случај немаме решение на задачата.

8. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{123ab}$ ќе биде делив со 36.

Решение. *Прв начин.* Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток $\overline{ab}$

треба да е делив со 4, а од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $6 + a + b$ треба да е делив со 9. Со непосредна проверка добиваме дека $\overline{ab} \in \{12, 48, 84\}$.

Втор начин. Имаме $\overline{123ab} = 12300 + \overline{ab} = 341 \cdot 36 + 24 + \overline{ab}$, па затоа $36 \mid \overline{123ab}$ ако и само ако $36 \mid 24 + \overline{ab}$, од каде следува $\overline{ab} \in \{12, 48, 84\}$

9. Определи ги цифрите a и b така што збирот на броевите $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ е делив со 18.

Решение. Збирот е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува дека бројот $\overline{199a}$ е парен, што значи дека цифрата a мора да е парна. Според тоа, $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Понатаму, од деливоста со 9 следува:

- за $a = 0$ имаме $\overline{1990 + b234} = \overline{(b+2)224}$, па затоа $b+10$ треба да е делив со 9, што значи $b = 8$,
- за $a = 2$ имаме $\overline{1992 + b234} = \overline{(b+2)226}$, па затоа $b+12$ треба да е делив со 9, што значи $b = 6$,
- за $a = 4$ имаме $\overline{1994 + b234} = \overline{(b+2)228}$, па затоа $b+14$ треба да е делив со 9, што значи $b = 4$,
- за $a = 6$ имаме $\overline{1996 + b234} = \overline{(b+2)230}$, па затоа $b+7$ треба да е делив со 9, што значи $b = 2$,
- за $a = 8$ имаме $\overline{1998 + b234} = \overline{(b+2)232}$, па затоа $b+9$ треба да е делив со 9, што значи $b = 9$.

10. Наместо буквите a и b во четирицифрените броеви стави соодветни цифри така што збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ ќе биде делив со 9.

Решение. Имаме:

$$\overline{323a} + \overline{b410} = \overline{(b+3)64a}.$$

Ако $b+3 \leq 9$, т.е. $b \leq 6$, тогаш збирот на цифрите на бројот $\overline{(b+3)64a}$ е еднаков на $13 + (a+b)$, па затоа бројот $\overline{(b+3)64a}$ е делив со 9 ако и само ако збирот на цифрите $13 + (a+b)$ е делив со 9. Тоа е можно ако и само ако $a+b=5$ или $a+b=14$. Но, $b \leq 6$ па затоа во овој случај подредениот пар (a,b) е еден од следниве парови: $(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (9,5), (8,6)$.

Ако $b+3 \geq 10$, т.е. $b \geq 7$, тогаш $\overline{(b+3)64a} = \overline{1(b-7)64a}$, што значи дека збирот на бројот $\overline{(b+3)64a}$ е $(a+b)+4$. Затоа бројот $\overline{(b+3)64a}$ е делив со 9 ако и само ако збирот на цифрите $(a+b)+4$ е делив со 9. Но, $b \geq 7$, па затоа последното е можно ако и само ако $a+b=14$, што значи дека во овој случај подредениот пар (a,b) е еден од следниве парови: $(7,7), (6,8), (5,9)$.

11. На местото на ѕвездичката во бројот $\overline{3145^*}$ стави соодветна цифра така што при делење на добиениот број со бројот 3 и со бројот 5 се добијат еднакви остатоци.

Решение. Прво ќе определиме која цифра треба да се стави на местото на ѕвездичката така што бројот $\overline{3145^*}$ биде делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека на местото на ѕвездичката треба да стои цифрата 0 или цифрата 5. Но збирот на цифрите на бројот 31450 е 13, т.е. добиениот број не е делив со 3, па затоа овој случај отпаѓа. Збирот на цифрите на бројот 31455 е 18, што значи дека тој е делив со 3 и овој број е едно решение на задачата. При делењето со 3 и со 5 други заеднички остатоци се 1 и 2, што значи дека останатите решенија на задачата ги добиваме ако бројот 31455 го зголемиме за 1, односно за 2. Конечно, решение на задачата се броевите: 31455, 31456 и 31457.

12. Определи ги цифрите x и y така што бројот $\overline{x74y}$ ќе биде делив со 15.

Решение. Еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 следува дека $y=0$ или $y=5$.

Ако $y=0$, тогаш од деливоста со 3 следува дека $x=1,4$ или 7, па во случајов ги добиваме броевите 1740, 4740 и 7740.

Ако $y=5$, тогаш од деливоста со 3 следува $x=2,5$ или 8, па во случајов ги добиваме броевите 2745, 5745 и 8745.

13. Во четирицифрениот број $\overline{32x2}$ определи ја цифрата x така што тој ќе биде делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. За да бројот $\overline{32x2}$ биде делив со 3, треба збирот на неговите цифри да е делив со 3. Последното значи дека цифрата x може да биде 2, 5 или 8. Ако $x=2$, тогаш двоцифрениот завршеток на бројот е 22 и тој не е делив со 4, па затоа и бројот 3222 не е делив со 4. Ако $x=5$, тогаш

двоцифрениот завршеток е 52 и тој е делив со 4, па и бројот 3252 е делив со 4. Ако $x = 8$, тогаш двоцифрениот завршеток е 82 и тој не е делив со 4, па и бројот 3282 не е делив со 4. Значи, единствено решение на задачата е $x = 5$.

14. Определи ги сите четирицифрени броеви од видот $\overline{abba}$ кои се деливи со 45.

Решение. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 5 и со 9. Од деливоста со 5 следува дека a е 0 или 5, но како $a \neq 0$ добиваме дека $a = 5$. Според тоа, бараните броеви се од видот $\overline{5bb5}$. Сега од деливоста со 9 следува дека збирот $10 + 2b$ треба да е делив со 9. Но, $10 \leq 10 + 2b \leq 28$, па затоа $10 + 2b$ може да биде 18 или 27.

Случајот $10 + 2b = 27$ не е возможен, бидејќи во последното равенство десната страна е непарен, а левата страна е парен број. Од $10 + 2b = 18$ следува $b = 4$, па бројот 5445 е единствено решение на задачата.

15. На местото на буквите a и b стави соодветни цифри така што бројот $\overline{4a1b}$ ќе биде делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот остаток $\overline{1b}$ е делив со 4, што значи дека $b = 2$ или $b = 6$.

За $b = 2$ збирот на цифрите на бројот $\overline{4a12}$ е еднаков на $7 + a$. Бројот $\overline{4a12}$ е делив со 3 ако и само ако збирот на цифрите $7 + a$ е делив со 3, т.е. ако и само ако $a \in \{2, 5, 8\}$.

За $b = 6$ збирот на цифрите на бројот $\overline{4a16}$ е еднаков на $11 + a$. Бројот $\overline{4a16}$ е делив со 3 ако и само ако збирот на цифрите $11 + a$ е делив со 3, т.е. ако и само ако $a \in \{1, 4, 7\}$.

Конечно, решенија на задачата се броевите: 4212, 4512, 4812, 4116, 4416 и 4716.

16. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{22ab}$ е делив со 90.

Решение. Четирицифрениот $\overline{22ab}$ број е делив со 90 ако и само ако е делив со 10 и е делив со 9. Од деливоста со 10 следува $b = 0$, што значи дека бројот е од обликот $\overline{22a0}$. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $2 + 2 + a + 0 = 4 + a$ е делив со 9, од каде следува дека $a = 5$. Конечно, бараниот број е 2250.

17. На местото на буквите a и b стави соодветни цифри така што бројот $\overline{81ab}$ ќе биде делив со 90.

Решение. Еден број е делив со 90 ако и само ако е делив со 9 и со 10. Од деливоста со 10 следува дека цифрата на единиците на бројот е 0, т.е. $b=0$. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите на бројот $\overline{81a0}$ треба да е делив со 9, што значи дека збирот $a+9$ е делив со 9. Оттука следува $a=0$ или $a=9$. Конечно, задачата има две решенија и тоа: 8100 и 8190.

18. На местата на ѕвездичките стави цифри така што бројот $\overline{2*44*}$ биде делив со 90.

Решение. Еден број е делив со 90 ако и само ако е делив со 10 и со 9. Од деливоста со 10 следува дека цифрата на единиците на бројот $\overline{2*44*}$ е 0, т.е. бројот е од видот $\overline{2*440}$. Сега, од деливоста со 9 следува дека збирот $2+4+4+*=10+*$ треба да е делив со 9. Последното е можно ако и само ако на местото на ѕвездата е цифрата 8. Според тоа, бараниот број е 28440.

19. Кои цифри треба да се стават на местата на a и b за да бројот $\overline{2a0a1b2b}$ биде делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот треба да е делив со 4, што значи дека $b \in \{0, 4, 8\}$.

Ако $b=0$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1020}$, па од деливоста со 3 следува дека збирот на неговите цифри $5+2a$ треба да е делив со 3, од каде добиваме $a \in \{2, 5, 8\}$.

Ако $b=4$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1424}$, па од деливоста со 3 следува дека збирот на неговите цифри $13+2a$ треба да е делив со 3, од каде добиваме $a \in \{1, 4, 7\}$.

Ако $b=8$, тогаш бројот е $\overline{2a0a1828}$, па од деливоста со 3 следува дека збирот на неговите цифри $21+2a$ треба да е делив со 3, од каде добиваме $a \in \{0, 3, 6, 9\}$.

20. Кои цифри треба да се стават на местата на a и b за да бројот $\overline{2a0b1a1b}$ биде делив со 36.

Решение. Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9.

Од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот треба да е делив со 4, што значи дека $b \in \{2, 6\}$.

Ако $b = 2$, тогаш бројот е $\overline{2a021a12}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на неговите цифри $8 + 2a$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 5$.

Ако $b = 6$, тогаш бројот е $\overline{2a061a16}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на неговите цифри $16 + 2a$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 1$.

21. Трицифрениот број x е делив со 37. Докажи дека и броевите кои од x се добиваат со циклично поместување на цифрите исто така се деливи со 37.

Решение. Нека $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c = 37k$; $k \in \mathbb{N}$ и нека y и z се броевите кои од x се добиваат со циклично поместување на цифрите, т.е. $y = 100b + 10c + a$ и $z = 100c + 10a + b$. Имаме,

$$\begin{aligned} y &= 100b + 10c + a = 10(100a + 10b + c) - 999a \\ &= 10 \cdot 37k - 27 \cdot 37a = 37(10k - 27a), \end{aligned}$$

па затоа $37 \mid y$, т.е. $y = 37m$, $m \in \mathbb{N}$. Сега,

$$\begin{aligned} z &= 100c + 10a + b = 10(100b + 10c + a) - 999b \\ &= 10 \cdot 37m - 27 \cdot 37b = 37(10m - 27b), \end{aligned}$$

па затоа $37 \mid z$, што и требаше да се докаже.

22. Производот на четири парни последователни природни броја е 13440. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ и $2n + 6$. Имаме

$$2n(2n + 2)(2n + 4)(2n + 6) = 13440, \text{ т.е. } n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 840.$$

Сега, бидејќи $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, заклучуваме дека $n = 4$, па затоа бараните броеви се: 8, 10, 12 и 14.

23. Производот на пет последователни природни броеви е $\overline{95a4b}$. Определи ги непознатите цифри.

Решение. Производот на пет последователни природни броеви е делив со 2, со 3, со 4 и со 5. Според тоа, тој е делив со 10, па затоа $b = 0$, т.е. бараните броеви е од видот $\overline{95a40}$. Од деливоста со 3 следува дека збирот $9 + 5 + a + 4 + 0 = 18 + a$ треба да е делив со 3, па затоа $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Според тоа, можни решенија на задачата се броевите

95040, 95340, 95640 и 95940. Но бројот мора да е делив со 8, што значи дека неговиот трицифрен завршеток треба да е делив со 8, па затоа можни решенија се само броевите 95040 и 95640. Со разложување на множители непосредно се проверува дека само бројот 95040 е производ на пет последователни природни броеви и тоа $95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$, па затоа единствено решение на задачата е 95040.

24. Производот на шест последователни природни броеви е бројот $\overline{66a28b}$. Определи ги цифрите кои треба да стојат на местата на буквите a и b .

Решение. Од шест последователни природни броеви најмалку еден е делив со 5 и три се деливи со 2. Затоа производот $\overline{66a28b}$ е делив со 10, што значи дека $b = 0$ и непознатиот производ е $\overline{66a280}$. Понатаму, од шест последователни природни броеви точно два се деливи со 3, па затоа нивниот производ е делив со 9. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $22 + a$ е делив со 9, од каде добиваме $a = 5$. Конечно, бараниот број е $665280 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

25. Определи го трицифрениот број кој е делив со 9, таков што цифрата на десетките е за 4 поголема од цифрата на единиците, а производот на неговите цифри е еднаков на 0.

Решение. Бидејќи производот на цифрите е еднаков на 0, добиваме дека една од цифрите мора да биде еднаква на 0. Тоа сигурно не е цифрата на стотките, бидејќи станува збор за трицифрен број. Цифрата на десетките не е 0, бидејќи таа е за 4 поголема од цифрата на единиците. Значи, цифрата на единиците е 0, па следува дека цифрата на десетките е 4. Според тоа, бројот е од видот $\overline{x40}$ и тој треба да е делив со 9. Од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $x + 4$ е делив со 9, од каде добиваме $x = 5$. Конечно, бараниот број е 540.

26. Определи го најмалиот природен број запишан само со цифрата 1 и кој е делив со бројот 333.

Решение. Еден број е делив со 333 ако и само ако е делив со 9 и со 37. Најмалиот природен број кој е делив со 9 и е запишан само со цифрата 1 е бројот 11111111. Јасно, овој број е делив со 37, па решение на задачата е бројот 11111111.

27. Определи го најмалиот природен број кој е запишан само со цифрата 1, а кој е делив со бројот $\underbrace{333\dots333}_{100 \text{ тројки}}$. Определи го количникот на овие

два броја.

Решение. Имаме, $\underbrace{333\dots333}_{100 \text{ тројки}} = 3 \cdot \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ единици}}$, па затоа бараниот број е

делив со бројот 3 и со бројот $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ единици}}$ и е запишан само со цифрата

1. Број кој е делив со $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ единици}}$ и е запишан само со цифрата 1 може

да има 100, 200, 300 ... единици. Значи, најмалиот природен број е запишан со 300 единици, бидејќи тоа е првиот број во спомената низа броеви кој е делив со бројот 3. За да го определиме бараниот количник, прво добиениот број ќе го поделиме со бројот $\underbrace{111\dots111}_{100 \text{ единици}}$,

ќе го поделиме со бројот 3. Значи,

$$\begin{aligned} \underbrace{111\dots111}_{300 \text{ единици}} : \underbrace{111\dots111}_{100 \text{ единици}} &= \underbrace{1000\dots000}_{99 \text{ нули}} \underbrace{1000\dots0001}_{99 \text{ нули}} \text{ и} \\ \underbrace{1000\dots000}_{99 \text{ нули}} \underbrace{1000\dots0001}_{99 \text{ нули}} : 3 &= \underbrace{333\dots333}_{100 \text{ тројки}} \underbrace{666\dots6667}_{99 \text{ шестки}}, \end{aligned}$$

Што значи дека бараниот количник е $\underbrace{333\dots333666\dots6667}_{100 \text{ тројки } 99 \text{ шестки}}$.

28. Докажи дека збирот на три последователни природни броја е делив со 3.

Решение. Нека $n, n+1$ и $n+2$ се три последователни броја. Имаме

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1),$$

што значи дека нивниот збир е делив со 3.

29. Нека a и b се природни броеви такви што $(10a+12b)(12a+10b)$ е делив со 11. Докажи дека $(10a+12b)(12a+10b)$ е делив со 121.

Решение. Нека $10a+12b = x$ и $12a+10b = y$. Тогаш $x+y = 22(a+b)$, што значи дека збирот $x+y$ е делив со 11. Бидејќи збирот и производот на два броја е делив со 11, а бројот 11 е прост број, заклучуваме дека секој од броевите x и y мора да е делив со 11. Според тоа, производот $xy = (12a+10b)(10a+12b)$ е делив со 121.

30. Определи трицифрен прост број таков што сите трицифрени броеви кои се формираат со пермутации на неговите цифри се прости броеви.
Решение. Меѓу цифрите на трицифрениот број не смее да има парна цифра, а не смее да е ниту цифрата 5. Според тоа, трицифрениот број мора да е запишан со некои од цифрите 1, 3, 7 и 9, при што некоја цифра може да се повторува двапати. Со непосредна проверка се добива дека при избор на било три од четири цифри најмалку еден од шесте броја е сложен, а истото важи и кога цифрите се 1, 1, 9 или 1, 1, 7 или 3, 3, 1 или 3, 3, 7 или 3, 3, 9 или 7, 7, 1 или 7, 7, 3 или 7, 7, 9 или 9, 9, 1 или 9, 9, 3 или 9, 9, 7. Конечно, само во случајот кога цифрите се 1, 1, 3 добиваме три прости броја 113, 131 и 311.
31. Докажи дека збирот на произволни пет последователни природни броја не може да биде прост број.
Решение. Нека $n, n+1, n+2, n+3$ и $n+4$ се произволни пет последователни природни броја. За нивниот збир добиваме
$$n + n+1 + n+2 + n+3 + n+4 = 5n+10 = 5(n+2),$$
што значи дека тој е делив со 5 и како тоа е број кој е поголем од 15 заклучуваме дека не може да биде прост број.
32. Определи го трицифрениот природен број n таков што цифрата на единиците е еднаква на цифрата на стотките и 15 е делител на n .
Решение. Според условот на задачата $n = \overline{aba}$. Понатаму, еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Од деливоста со 5 и фактот дека $a \neq 0$ добиваме $n = \overline{5b5}$. Сега, од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите на бројот $10+b$ е делив со 3, па затоа $b \in \{2, 5, 8\}$. Конечно, решение на задачата се броевите 525, 555 и 585.
33. Со помош на цифрите 0, 1, 3, 4 и 5 запиши ги сите петцифрени броеви кои се деливи со 4, но не се деливи со 5. (Цифрите не се повторуваат.)
Решение. Од деливоста со 4 следува дека двоцифрените завршетоци на броевите треба да се деливи со 4. Од дадените цифри може да се состават само два двоцифрени завршетоци кои се деливи со 4 и тоа 04 и 40. Но, броевите не треба да се деливи со 5, па затоа двоцифрениот завршеток 40 отпаѓа. Според тоа, бараните броеви се 13504, 15304, 31504, 35104, 51304 и 53104.
34. Докажи дека бројот $2019^{2019} + 1$ делив со 10.

Решение. Бројот 2019 завршува на цифрата 9, па затоа бројот 2019^2 завршува на цифрата 1. Според тоа, бројот $2019^{2018} = (2019^2)^{1009}$ завршува на цифрата 1, па затоа бројот 2019^{2019} завршува на цифрата 9. Конечно, бројот $2019^{2019} + 1$ завршува на цифрата 0, па затоа тој е делив со 10.

35. Нека n е природен број поголем од 1. Докажи дека вредноста на дробката $\frac{10^n+8}{36}$ е цел број.

Решение. Вредноста на дробката $\frac{10^n+8}{36}$ е цел број ако и само ако бројот $10^n + 8$, $n > 1$ е делив со 36, т.е. ако и само ако овој број е делив со 4 и со 9. Јасно, за секој $n > 1$ збирот на цифрите на бројот $10^n + 8$ е 9, што значи дека тој е делив со 9, а неговиот двоцифрен завршеток е 08, па затоа тој е делив со 4.

36. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $10^n + 8$ е делив со 72.

Решение. Еден број е делив со 72 ако и само ако е делив со 9 и со 8. За секој природен број n збирот на цифрите на бројот $10^n + 8$ е 9, што значи дека тој е делив со 9. Според тоа, треба да ги определиме сите природни броеви n за кои бројот $10^n + 8$ е делив со 8. Еден број е делив со 8 ако и само ако неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Имаме, $10^n + 8 = 10 \underbrace{\dots}_{n-1} 08$, па за да овој број биде делив со 8 потребно е неговиот трицифрен завршеток да е од видот 008, а тоа е случај за $n \geq 3$. Конечно, решение на задачата се сите природни броеви поголеми или еднакви на 3.

37. На местото на ѕвездичките стави цифри така што ќе добиеш точно равенство $\frac{3^*}{5^*} = \frac{2}{3}$.

Решение. Во именителот на левата дробка може да бидат запишани само броеви кои се деливи со 3, па затоа можни броеви се $51 = 3 \cdot 17$, $54 = 3 \cdot 18$ и $57 = 3 \cdot 19$. Понатаму, бидејќи $2 \cdot 17 = 34$, $2 \cdot 18 = 36$ и $2 \cdot 19 = 38$ ги добиваме решенијата $\frac{34}{51} = \frac{36}{54} = \frac{38}{57} = \frac{2}{3}$

38. Дропките $\frac{\overline{3*5*}}{36}$ и $\frac{\overline{4*7*}}{45}$ се природни броеви. Подреди ги овие дропки по големина.

Решение. Дропката $\frac{\overline{3*5*}}{36}$ е природен број ако и само ако броителот е делив со 36. Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. Од деливоста со 4 следува дека цифрата на единиците на бројот $\overline{3*5*}$ е 2 или 6. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека цифрата на стотките на бројот $\overline{3*52}$ е 8, а цифрата на стотките на бројот $\overline{3*56}$ е 4. Според тоа, добиваме две дропки $\frac{3456}{36} = 96$ и $\frac{3852}{36} = 107$.

Дропката $\frac{\overline{4*7*}}{45}$ е природен број ако и само ако броителот е делив со 45. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 5 и со 9. Од деливоста со 5 следува дека цифрата на единиците на бројот $\overline{4*7*}$ е 0 или 5. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека цифрата на стотките на бројот $\overline{4*70}$ е 7, а цифрата на стотките на бројот $\overline{4*75}$ е 2. Според тоа, добиваме две дропки $\frac{4770}{45} = 106$ и $\frac{4275}{45} = 95$.

Конечно имаме

$$\frac{4275}{45} = 95 < \frac{3456}{36} = 96 < \frac{4770}{45} = 106 < \frac{3852}{36} = 107.$$

39. Определи го целиот број a така што вредноста на изразот $\frac{a+9}{a+6}$ е цел број.

Решение. Имаме, $\frac{a+9}{a+6} = \frac{a+6+3}{a+6} = \frac{a+6}{a+6} + \frac{3}{a+6} = 1 + \frac{3}{a+6}$, па затоа $\frac{a+9}{a+6}$ ќе биде цел број ако и само ако $\frac{3}{a+6}$ е цел број, т.е. ако и само ако $(a+6) \mid 3$. Значи, $a+6 \in \{-3, -1, 1, 3\}$, т.е. $a \in \{-9, -7, -5, -3\}$.

40. Определи ги сите едноцифрени природни броеви a, b и c такви што

$$\frac{2}{a} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}.$$

Решение. Бидејќи a, b и c се едноцифрени природни броеви, очигледно $a = 5$, бидејќи само тогаш важи $\text{NZD}(a, 7) = 35$. Значи, $\frac{2}{5} + \frac{b}{7} = \frac{30+c}{35}$, т.е. $\frac{14+5b}{35} = \frac{30+c}{35}$, па затоа $5b = 16 + c$. Левата страна во последното равенство е делива со 5, па мора и десната страна да е делива со 5 и како при делење на 16 со бројот 5 се добива остаток 1, заклучуваме дека при делење на c со 5 треба да се добива остаток 4.

Но, c е едноцифрен број, па затоа $c = 4$ или $c = 9$. Ако $c = 4$, тогаш $5b = 20$, т.е. $b = 4$, а ако $c = 9$, тогаш $5b = 25$, т.е. $b = 5$. Конечно, решенија на задачата се $(a, b, c) \in \{(5, 4, 4), (5, 5, 9)\}$.

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

41. Дали постои природен број чиј производ на цифри е 2012?

Решение. Имаме $2012 = 2^2 \cdot 503$ и како бројот 503 е прост, заклучуваме дека не постои природен број чиј производ на цифри е 2012.

42. Определи го најмалиот природен број кој помножен со 378 дава точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот 378 го разложуваме на прости множители и добиваме: $378 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Забележуваме дека секој од неговите прости множители 2, 3 и 7 во разложувањето се јавува непарен број пати. Меѓутоа, во точен квадрат на природен број секој прост множител мора да се јави парен број пати. Затоа, најмалиот број со кој треба да се помножи бројот 378 е $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ и притоа важи

$$378 \cdot 42 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 126^2.$$

43. Нека n е најмалиот природен број со кој треба да го помножине бројот 2520 за да се добие квадрат на природен број. Определи го збирот на цифрите на бројот n .

Решение. Бројот 2520 го разложуваме на прости множители и добиваме: $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Забележуваме дека неговите прости множители 2, 5 и 7 во разложувањето се јавуваат непарен број пати. Меѓутоа, во точен квадрат на природен број секој прост множител мора да се јави парен број пати. Затоа најмалиот број со кој треба да се помножи бројот 2520 е $n = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ и збирот на неговите цифри е $7 + 0 = 7$.

44. Бројот 1000000 запиши го како производ на два природни броја во чии декадни записи не се содржи ниту една нула.

Решение. Имаме $1000000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ и како нула се добива исклучиво како производ на 2 и 5, заклучуваме дека бројот 1000000 треба да се запише како производ на два броја при што во едниот делители се сите двојки, а во другиот сите петки. Значи, $1000000 = 2^6 \cdot 5^6 = 64 \cdot 15625$.

45. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 2 станува квадрат на некој природен број, а помножен со бројот 3 станува куб на друг природен број.

Решение. Јасно, простите множители на бараниот број се 2 и 3. Понатаму, ако бројот 2 се јавува n пати, тогаш n треба да е непарен број делив со 3, а ако бројот 3 се јавува m пати, тогаш бројот m треба да е парен број таков што бројот $m+1$ е делив со 3. Притоа броевите m и n треба да се најмалите можни броеви со овие својства, па затоа $n=3$ и $m=2$. Конечно, бараниот број е $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ и важи $72 \cdot 2 = 12^2$ и $72 \cdot 3 = 6^3$.

46. Определи ги сите прости броеви p такви што и бројот $p+9$ е прост.

Решение. Ако p е непарен прост број, тогаш $p+9$ е парен број поголем од 2, што значи дека е сложен. За $p=2$ добиваме $p+9=11$ и тоа е прост број. Според тоа, единствено решение е $p=2$.

47. Ако p е прост број, тогаш $p+2003$ и $2003-p^3$ се сложени броеви. Докажи!

Решение. Ако $p=2$, тогаш $p+2003=2005$ и $2003-p^3=1995$ се деливи со 5, што значи дека се сложени броеви. Ако $p>2$, тогаш $p+2003$ и $2003-p^3$ се парни броеви различни од ± 2 , што значи дека тие се сложени броеви.

48. Пополни ја табелата дадена на цртежот десно така што во секое квадратче ќе биде запишан по еден од броевите од 1 до 9 (секој број е запишан по еднаш), а збирот на броевите запишани во секој ред и секоја колона ќе биде прост број. Определи го производот на броевите запишани во сивите квадратчиња.

2		3
		9
7		

Решение. Третиот запишан број во третата колона мора да е непарен, што значи дека тоа е еден од броевите 1 или 5. Ако тоа е бројот 5, тогаш третиот број во третиот ред мора да е непарен број, па тоа мора да е бројот 1. Останува да ги распоредиме броевите 4, 6 и 8. Јасно, бројот 4 не смее да биде во првиот ред. Ако бројот 6 е во првиот ред, тогаш броевите 4 и 8 се во вториот ред, па збирот во овој ред ќе биде 21 и тоа не е прост број. Ако бројот 8 е во првиот ред, тогаш третиот

број во втората колона мора да биде 4, па затоа третиот број во првата колона ќе биде 6, што не е можно бидејќи збирот на броевите во првата колона ќе биде 15 и ова не е прост број.

Нека третиот број во третата колона е 1. Тогаш третиот број во третиот ред е 5. Останува да ги распоредиме броевите 4, 6 и 8. Ако бројот 6 е во првиот ред, тогаш во вториот ред ќе бидат броевите 4 и 8, што не е можно бидејќи во овој случај збирот на броевите во вториот ред ќе биде 21, а тоа не е прост број. Ако бројот 8 е во првиот ред, тогаш во првата колона мора да биде бројот 4 и го добиваме распоредот прикажан на цртежот десно. Конечно, производот на броевите запишани во сивите квадратчиња е $4 \cdot 5 = 20$.

2	8	3
4	6	9
7	5	1

49. Нека a и b се прости броеви поголеми од 3. Докажи дека изразот $(a+b)(a-b)$ е делив со 12.

Решение. Секој прост број поголем од 3 е од облик $6k+1$ или $6k-1$, $k \in \mathbb{Z}$. Можни се следниве случаи:

- 1) $a = 6k+1, b = 6m+1$ и во овој случај

$$(a+b)(a-b) = 12(3k+3m+1)(k-m), \text{ т.е. } 12 \mid (a+b)(a-b).$$

- 2) $a = 6k+1, b = 6m-1$ и во овој случај

$$(a+b)(a-b) = 12(k+m)(3k-3m+1), \text{ т.е. } 12 \mid (a+b)(a-b).$$

- 3) $a = 6k-1, b = 6m+1$ и во овој случај

$$(a+b)(a-b) = 12(k+m)(k-m-1), \text{ т.е. } 12 \mid (a+b)(a-b).$$

- 4) $a = 6k-1, b = 6m-1$ и во овој случај

$$(a+b)(a-b) = 12(3k+3m-1)(k-m), \text{ т.е. } 12 \mid (a+b)(a-b).$$

50. Определи ги природниот број n и простиот број p за кои важи

$$\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}.$$

Решение. Од $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$ следува $\frac{n}{2 \cdot 5 \cdot 199} = \frac{1}{p}$, па затоа решенија на задачата се $p = 2, n = 995$; $p = 5, n = 398$ и $p = 199, n = 10$.

51. Определи ги сите прости броеви p за кои се точни неравенствата

$$\frac{3}{16} < \frac{5}{p} < \frac{2}{7}.$$

Решение. Дропките во неравенствата ќе ги прошириме така што ќе добиеме еднакви броители. Бидејќи $\text{NZS}(2, 3, 5) = 30$, добиваме

$\frac{30}{160} < \frac{30}{6p} < \frac{30}{105}$. Значи, $105 < 6p < 160$, па затоа $17 < \frac{35}{2} < p < \frac{80}{3} < 27$, од каде добиваме дека $p = 19$ или $p = 23$.

52. Дали постојат прости броеви p и q такви што $p + 4q = 2008$?

Решение. Ако постојат прости броеви p и q такви што $p + 4q = 2008$, тогаш мора да е $p = 2$, па затоа $4q = 2006$, односно $2q = 1003$, што е противречност. Според тоа, не постојат прости броеви p и q такви што $p + 4q = 2008$.

53. Определи ги сите прости броеви p, q и r такви што

$$2p + 3q + 4r = 2022.$$

Решение. Броевите $2p, 4r$ и 2022 се парни, па од равенката

$$2p + 3q + 4r = 2022$$

следува дека и бројот $3q$ треба да е парен, што значи дека $q = 2$. Со замена во дадената равенка добиваме $2p + 4r = 2016$, односно $p + 2r = 1008$. Сега, броевите $2r$ и 1008 се парни, па затоа $p = 2$, односно $2 + 2r = 1008$, од каде добиваме $r = 503$. Бројот 503 е прост, што значи дека во множеството прости броеви решение на дадената равенка е $p = q = 2, r = 503$.

II.2. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

54. Нека бројот $\overline{2x1x}$ е делив со 12. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\overline{x4}$ и $\overline{5x}$.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 3 следува дека збирот $2 + x + 1 + x = 3 + 2x$ е делив со 3. Последното е можно ако и само ако $x \in \{0, 3, 6, 9\}$. Понатаму, од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток $\overline{1x}$ е делив со 4, и како $x \in \{0, 3, 6, 9\}$ наоѓаме $x = 6$. Конечно, $\text{NZD}(64, 56) = 8$.

55. На местото на ѕвездичките во бројот $\overline{523^{***}}$ запиши ги соодветните цифри така што добиениот број при делење со 7, 8 и 9 ќе дава остаток 6.

Решение. Имаме $\text{NZS}(7, 8, 9) = 504$. Понатаму бидејќи

$$523000 = 504 \cdot 1037 - 352,$$

добиваме дека бараните броеви се:

$$523000 - 352 + 504 + 6 = 523158 \text{ и } 523158 + 504 = 523662.$$

56. Определи го најголемиот природен број таков што при делење на броевите 1988 и 30756 со тој број се добиваат остатоци еднакви на 4.

Решение. Треба да го определиме најголемиот број кој е делител на бројот $1988 - 4 = 1984$ и на бројот $30756 - 4 = 30752$, т.е. треба да го најдеме најголемиот заеднички делител на броевите 1984 и 30752.

Имаме, $1984 = 31 \cdot 2^6$ и $30752 = 31^2 \cdot 2^5$, па затоа бараниот број е

$$\text{NZD}(1984, 30752) = \text{NZD}(31 \cdot 2^6, 31^2 \cdot 2^5) = 31 \cdot 2^5 = 992.$$

57. Дадени се отсечките $a = 420 \text{ cm}$ и $b = 858 \text{ cm}$. Определи ја отсечката со најголема должина изразена во сантиметри која цел број пати се содржи во дадените отсечки.

Решение. Должината на бараната отсечка е еднаква на најголемиот заеднички делител на отсечките $a = 420 \text{ cm}$ и $b = 858 \text{ cm}$. Понатаму, $420 = 70 \cdot 6$ и $858 = 143 \cdot 6$, па како $\text{NZD}(70, 143) = 1$ добиваме дека $\text{NZD}(420, 858) = 6$.

58. Определи го природниот број a , $100 < a < 200$ кој при делење со броевите 2, 3, 4 и 5 дава остатоци 1, 2, 3 и 4, соодветно.

Решение. Јасно, бројот $a + 1$ е делив со 2, 3, 4 и 5, па затоа е делив со нивниот најмал заеднички содржател. Имаме, $\text{NZS}(2, 3, 4, 5) = 60$ и како $100 < a < 200$ добиваме дека $a = 2 \cdot 60 - 1 = 119$ или $a = 3 \cdot 60 - 1 = 179$.

59. Определи ги трицифрените броеви такви што ако од трицифрениот број се одземе бројот 13, тогаш разликата е делива со 13, а ако од трицифрениот број се одземе 17, тогаш разликата е делива со 17.

Решение. Нека x е бараниот трицифрен број. Според условот на задачата $13|x$ и $17|x$, па како $\text{NZD}(13, 17) = 1$, заклучуваме дека $13 \cdot 17 = 221$ е делител на x . Конечно, бараните броеви се 221, 442, 663 и 884.

60. Производот на два природни броја е еднаков на 384, а нивниот најмал заеднички содржател е еднаков на 48. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се a и b . Ако го искористиме равенството $\text{NZD}(a, b) \cdot \text{NZS}(a, b) = ab$, добиваме $48 \cdot \text{NZD}(a, b) = 384$, од-

носно $\text{NZD}(a,b)=8$. Според тоа, $a=8x, b=8y$ каде $\text{NZD}(x,y)=1$. Според тоа, $384=64xy$, т.е. $xy=6$. Сега, од $\text{NZD}(x,y)=1$ следува дека $x=6, y=1$ или $x=2, y=3$, што значи дека бараните броеви се $a=48, b=8$ или $a=16, b=24$.

61. Марко има определен број сликички, помалку од 100. Кога тој ги броел сликичките по 2 му останала 1 сликичка. Потоа Марко ги броел сликичките по 3 и повторно му останала 1 сликичка. Една сликичка му останала и кога сликичките ги броел по 5 и по 6, но кога ги броел по 7 не му преостанала ниту една сликичка. Колку сликички имал Марко?

Решение. Нека n е бројот на сликичките на Марко. Тогаш $n-1$ е делив со 2, 3, 5 и 6, што значи дека е делив со $\text{NZD}(2,3,5,6)=30$. Според тоа, $n-1$ е некој од броевите 30, 60 или 90. Според тоа, n е некој од броевите 31, 61 и 91. Но, $7 \nmid n$, па затоа $n=91$.

62. Определи го најмалиот природен број кој при делење со броевите 2, 7, 11, 13 и 14 дава остаток 1.

Решение. Нека бараниот број е a . Тогаш бројот $a-1$ е делив со секој од петте броеви, па како се бара најмалиот број со ова својство добиваме дека $a-1=\text{NZS}(2,7,11,13,14)=2002$. Конечно, бараниот број е $a=2002+1=2003$.

63. Определи го најголемиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

Решение. Нека a е најмалиот таков број. Тогаш бројот $a-2$ е делив со 3, 4, 5, 6 и 7, па затоа $a-2=\text{NZS}(3,4,5,6,7)=420$. Најголемиот четирицифрен број кој е делив со 420 е бројот $420 \cdot 23=9660$ па затоа бараниот број е $9660+2=9662$.

64. Подготвувајќи ги учениците за спортско дефиле наставникот Марко учениците ги распоредил во три реда, но му преостанал еден ученик. Потоа пробал да ги распореди во 4 реда, но му преостанале 2 ученика. Кога ги распоредил во 5 реда му преостанале 3 ученика, а кога направил 6 реда му преостанале 4 ученика. Тогаш Марко рекол: „Постројте се во 8 реда“, на што ученикот Горјан прокоментирал: „Ќе преостанат 6 ученика, но ако се построиме во 7 реда, нема да преостане ниту еден ученик“. Се покажало дека Горјан е во право и дека не постои помал број ученици кои ги задоволуваат овие услови.

Колку ученици учествувале во спортското дефиле?

Решение. Бараниот број ученици мора да е делив со 7 и треба да е од видот $k \cdot \text{NZS}(3,4,5,6,8) - 2 = 120k - 2$. Најмалиот број кој ги задоволува бараните услови е $120 \cdot 2 - 2 = 238$, што значи дека на спортското дефиле учествувале 238 ученика.

65. На крајот на учебната година во едно одделение по предметот англиски јазик никој не добил оценка одличен (5). Секој шести ученик добил оценка многу добар (4). Секој трет ученик добил оценка доволен (2), а секој деветти ученик добил оценка недоволен (1). Се знае дека во одделението имало повеќе од 20, а помалку од 40 ученици. Колку ученици добиле оценка добар (3)?

Решение. Нека во одделението има x ученици. Притоа важи $20 < x < 40$ и x мора да биде делив со 3, со 6 и со 9. Значи, x мора да биде делив со $\text{NZS}(3,6,9) = 18$ и како $20 < x < 40$ заклучуваме дека $x = 36$.

66. Определи го најголемиот број со кој треба да се поделат броевите 845 и 275 за да остатокот во двата случаја биде 5.

Решение. Нека q е бараниот број. Според условот на задачата q е најголемиот број кој е делител на броевите $845 - 5 = 840$ и $275 - 5 = 270$. Значи, $q = \text{NZD}(840, 270) = 30$.

67. Определи го најголемиот четирицифрен број кој при делење со броевите 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

Решение. Нека n е бараниот број. Тогаш бројот $n - 2$ е делив со броевите 3, 4, 5, 6 и 7, што значи дека е делив со нивниот најмал заеднички содржател. Имаме $\text{NZS}(3,4,5,6,7) = 420$. Од условот на задачата следува дека n е најголемиот број за кој е исполнето неравенството $n = 420k + 2 \leq 9999$. Оттука наоѓаме $k \leq 23$ и за $k = 23$ го добиваме бројот $n = 420 \cdot 23 + 2 = 9662$.

68. Во штедната каса Марко има само монети од по 1 денар. Тој од монетите правел кули или само со по 18, или само со по 24 или само со по 30 монети и секогаш му останувал 1 денар. Определи го најмалиот број монети кои може да ги има Марко.

Решение. Ако Марко имал n монети, тогаш бројот $n - 1$ е делив со 18, 24 и 30, што значи дека е делив со $\text{NZS}(18,24,30) = 360$. Значи, најмалиот број монети кои може да ги има Марко е $360 \cdot 1 + 1 = 361$.

69. Дамјан има повеќе од 2000 денари, а помалку од 3000 денари. Ако секој ден троши по 150 денари ќе му преостанат 30 денари, а ако секој ден троши по 180 денари повторно ќе му преостанат 30 денари. Колку пари има Дамјан?

Решение. Нека Дамјан има n денари. Од условот на задачата следува дека бројот $n - 30$ е делив со броевите 150 и 180, што значи дека е делив со $\text{NZS}(150, 180) = 900$. Според тоа, $n - 30 = 900k$, па затоа $2000 < 900k + 30 < 3000$, од каде следува $1970 < 90k < 2970$, т.е. $k = 3$. Конечно, Дамјан има $900 \cdot 3 + 30 = 2730$ денари.

70. Определи го најголемиот трифигурен број кој при делење со 3, 4, 5 и 6 дава остаток 2, 3, 4 и 5 соодветно.

Решение. Нека a е најмалиот број кој при делење со 3, 4, 5 и 6 дава остаток 2, 3, 4 и 5 соодветно. Тогаш бројот $a + 1$ е делив со 3, 4, 5 и 6. Затоа

$$a + 1 = \text{NZS}(3, 4, 5, 6) = 60, \text{ т.е. } a = 59.$$

Најголем трифигурен број кој е делив со 60 е бројот $16 \cdot 60 = 960$, па затоа бараниот број е $960 - 1 = 959$.

71. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 2 дава остаток 1, при делење со 3 дава остаток 2, при делење со 4 дава остаток 3, при делење со 5 дава остаток 4, при делење со 6 дава остаток 5 и при делење со 7 дава остаток 6.

Решение. Нека n е бараниот број. Тогаш бројот $n + 1$ е делив со 2, 3, 4, 5, 6 и 7, што значи дека е делив со нивниот најмал заеднички содржател. Имаме, $\text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$ и како се бара најмалиот број добиваме $n + 1 = 420 \cdot 1$, т.е. $n = 419$.

72. Определи ги сите природни трифигурни броеви кои при делење со 7 даваат остаток 2, при делење со 9 даваат остаток 4 и при делење со 12 даваат остаток 7.

Решение. Нека бараниот број е n . Тогаш бројот $n + 5$ е делив со броевите 7, 9 и 12, што значи дека е делив со нивниот најмал заеднички содржател. Но, $\text{NZS}(7, 9, 12) = 252$, па затоа $n + 5 = 252k$, односно $n = 252k - 5$. Понатаму, n е трифигурен број, па затоа $252k - 5 \leq 999$ од каде следува $k \in \{1, 2, 3\}$. Конечно, бараните броеви се 247, 499 и 751.

73. Три автобуси во 6 часот наутро истовремено тргнале од автобуската станица во три различни правци. Првиот автобус се вратил во станицата по 1 час и 5 минути и по 10 минути повторно тргнал на пат, вториот автобус се вратил по 56 минути и по 4 минути повторно тргнал на пат и третиот автобус се вратил по 48 минути и по 2 минути повторно тргнал на пат. Во колку часот сите три автобуси за првпат повторно истовремено ќе тргнат на пат.

Решение. Интервалите на поаѓање на пат на автобусите се 75, 60 и 50 минути. Ако тие повторно истовремено тргнат на пат по n минути, тогаш бројот n треба да е делив со 75, 60 и 50, што значи да е делив со најмалиот заеднички содржател на броевите 75, 60 и 50. Од $NZS(75,60,50) = 300$. Значи, $n = 300k$ и бидејќи се бара кога повторно за првпат автобусите заедно ќе тргнат на пат имаме $k = 1$, т.е. $n = 300$. Од $300 = 5 \cdot 60$ следува дека тоа ќе се случи по 5 часа, т.е. во 11 часот.

74. Во едно пристаниште пристигнуваат пет брода од пет различни места. Првиот брод пристигнува секој втор ден, вториот секој трет ден, третиот секој четврт ден, четвртиот секој петти ден и петтиот секој шести ден. Сите бродови истовремено пристигнале во пристаништето на 1 јуни, а овој ред на возење важи од 1 јуни до 31 август.

а) Определи ги деновите кога сите бродови заедно ќе пристигнуваат во пристаништето.

б) Определи ги деновите кога во пристаништето нема да има ниту еден брод.

Решение. а) Бидејќи $NZS(2,3,4,5,6) = 60$ сите бродови заедно ќе бидат во пристаништето само на 1 јуни и 60 дена покасно, т.е. на 31 јули.

а) Редот на возење важи 91 ден. За да ги определиме деновите кога во пристаништето не пристигнува ниту еден брод треба да ги избришеме броевите од 1 до 91 кои се деливи со 2, 3, 4, 5 и 6. Остануват броевите 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89 и 91. Така ги добиваме деновите 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24 и 30 јуни, 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24 и 30 јули и 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31 август.

75. Денес во сабота 21.04.2018 година од едно пристаниште испловиле три брода. Определи го најмалиот број денови кога повторно сите три брода ќе испловат во сабота, ако се знае дека првиот брод испловува секој трет ден, вториот брод испловува секој четврт ден и третиот

брод испловува секој шести ден. Кој е следниот датум кога сите бродови за првпат повторно ќе испловат во сабота?

Решение. За броевите 3, 4, 6, како и за бројот 7 кој ја претставува должината на седмицата треба да го определиме најмалиот заеднички содржател. Имаме, $NZS(3, 4, 6, 7) = 84$, што значи дека бродовите за првпат повторно заедно ќе испловат во сабота по 84 дена, а тоа ќе биде на 13.07.2018 година.

76. Определи ги природните броеви x и y за кои важи $NZD(x, y) = 6$ и $NZS(x, y) = 36$.

Решение. Од $NZD(x, y) = 6$ следува $x = 6k$ и $y = 6m$, каде k и m се заемно прости броеви. Сега, $NZS(x, y) = 6km$, па затоа $6km = 36$, т.е. $km = 6$, каде k и m се заемно прости броеви. Значи, $k = 1, m = 6$ или $k = 2, m = 3$ или $k = 3, m = 2$ или $k = 6, m = 1$. Конечно решение на задачата се подредените парови $(6, 36), (12, 18), (18, 12), (36, 6)$.

77. Производот на два природни броја е 384, а нивниот најмал заеднички содржател е 48. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x и y , $x \leq y$. Имаме

$$NZD(x, y) = xy : NZS(x, y) = 384 : 48 = 8.$$

Значи, $x = 8a, y = 8b$, па затоа $48 = 8ab$, т.е. $ab = 6$. Според тоа, $(a, b) \in \{(1, 6), (2, 3)\}$, па затоа $(x, y) \in \{(8, 48), (16, 24)\}$.

78. Денес е среда. Имаме часовник кој денес на пладне покажува точно време и кој секои 24 часа оди напред по 5 минути. Часовникот работи непрекинато една година. Колку пати во текот на оваа година часовникот покажал точно време? Дали некој од деновите во кои часовникот покажал точно време е среда?

Решение. Часовникот повторно ќе покаже точно време кога ќе напредува точно полни 12 часа. Ако во текот на 24 часа (едно деноноќие) напредува 5 минути, тогаш 1 час ќе напредува по 12 дена, а полни 12 часа ќе напредува по $12 \cdot 12 = 144$ дена. Според тоа, во текот на една година часовникот двапати ќе покаже точно време и тоа по 144 дена и по 288 дена. Точно време нема повторно да биде покажано во среда, бидејќи броевите 144 и 288 не се деливи со 7.

79. Во една кутија има двапати повеќе виљушки од лажици, а вкупниот број виљушки и лажици е поголем од 200 и е помал од 250. Ако

лажиците и виљушките од таа кутија се бројат по 10 или по 12, тогаш нема да остане ниту една лажица, ниту една виљушка. Колку лажици и колку виљушки има во кутијата?

Решение. Вкупниот број лажици и виљушки е делив со 10 и со 12, што значи дека е делив со $\text{NZS}(10,12) = 60$. Единствен број кој е поголем од 200 и е помал од 250, а е делив со 60 е бројот 240. Ако бројот на лажиците е x , тогаш бројот на виљушките е $2x$, па затоа $x + 2x = 240$, т.е. $x = 80$. Конечно, во кутијата има 80 лажици и 160 виљушки.

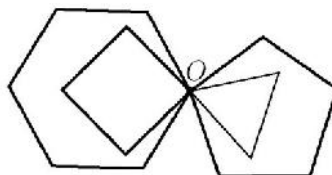
80. Во едно училиште во шесто одделение се запишани 180 момчиња и 192 девојчиња. Формирани се одделенија со еднаков број ученици, така што бројот на момчињата во секое одделение е еднаков. Бројот на учениците во секое одделение е поголем од 18 и е помал од 35. Колку момчиња и колку девојчиња има во секое одделение?

Решение. Одделенијата имаат еднаков број ученици и еднаков број момчиња, па затоа и бројот на девојчињата во сите одделенија е еднаков. Имаме, $\text{NZD}(180,192) = 12$, што значи дека според условот на задачата може да се формираат 1, 2, 3, 4, 6 или 12 одделенија. Првите пет случаи отпаѓаат бидејќи во овие случаи бројот на учениците во секое одделение ќе биде поголем од 35, што според условот на задачата не е можно. Значи, во училиштето се формирани 12 одделенија. Секое одделение има $(180 + 192) : 12 = 31$ ученик, при што $180 : 12 = 15$ се момчиња и $192 : 12 = 16$ се девојчиња.

81. Имаме 10 листови. Определен број од овие листови е исечен на по 10 делови, а потоа некои од добиените делови повторно се исечени на по 10 делови итн. На крајот Илија пребројал дека се добиени 2018 листови. Докажи дека Илија погрешил при броењето.

Решение. Кога еден лист ќе поделиме на 10 дела, бројот на деловите се зголемува за 9. Значи, со секое ново сечење вкупниот број листови се зголемува за 9. Последното значи дека ако од вкупниот број листови ги одземеме почетните 10 листови, тогаш бројот на листовите треба да е делив со 9. Но, бројот $2018 - 10 = 2008$ не е делив со 9, што значи дека Илија погрешил при броењето на листовите.

82. Од точката O истовремено и со една иста брзина тргнала Ана по триаголната, Бојан по квадратната, Виолета по



петаголната и Горјан по шестаголната патека. Секој ја обиколувал својата патека се до моментот кога четворицата за првпат повторно се сретнале во точката O . Колку пати точно двајца или точно тројца од нив поминале истовремено низ точката O ? (Сите отсечки на црежот се со еднаква должина.)

Решение. За прв пат сите четворица ќе се сретнат во точката O откако секој од нив ќе помине $NZS(3, 4, 5, 6) = 60$ должини на отсечките (30-што?). Понатаму, низ точката O поминува:

- Ана кога таа ќе помине 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57 и 60 отсечки,
- Бојан кога тој ќе помине 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56 и 60 отсечки,
- Виолета кога таа ќе помине 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 и 60 отсечки,
- Горјан кога тој ќе помине 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 и 60 отсечки.

Според тоа, треба да определиме колку пати еден ист број во горните четири низи се повторува два пати или три пати, но не се повторува четири пати. Со непосредна проверка добиваме дека тоа се броевите: 6, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 45, 48 и 54, што значи дека точно две или точно три деца низ точката O ќе поминат 13 пати.

83. Бројот 333 запиши го како производ на два броја така што секој од множителите е помал од 10.

Решение. Од $333 = 3 \cdot 3 \cdot 37$ следува дека бројот 333 како производ на два броја помали од 10 може да се запише на следниве начини:

$$-333 \cdot (-1), \quad -111 \cdot (-3), \quad -37 \cdot (-9).$$

84. Вредностите на дробките $\frac{32 \cdot 60}{56}$ и $\frac{42 \cdot 4}{72}$ се природни броеви. Која од овие дробки е поголема?

Решение. Бројот $42 \cdot 4$ е делив со 72, што значи дека е делив со 9 и со 8. Според тоа, неговиот збир на цифри е делив со 9, а неговиот трицифрен завршеток е делив со 8. Од овие два услови ги наоѓаме броевите 42048 и 42840. Според тоа, втората дробка има вредност 584 или 595. Бројот $32 \cdot 60$ е делив со 56, што значи дека е делив со 7 и со 8. Од деливоста со 8 следува дека трицифрениот завршеток $\cdot 60$ е делив со 8, од каде ги добиваме броевите 32160, 32360, 32560, 32760 и

32960, од кои само бројот 32760 е делив со 7. Значи, вредноста на правата дробка е 585. Во првиот случај првата дробка е за 1 поголема од втората дробка, а во вториот случај втората дробка е за 10 поголема од првата дробка.

85. Дадени се дропките $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$. Определи го најмалиот број таков што количникот на тој број и секоја од дадените дропки е природен број.

Решение. Јасно, бараниот број е позитивен и нека тоа е бројот $\frac{a}{b}$.

Имаме, $\frac{a}{b} : \frac{35}{396} = \frac{396a}{35b}$ и овој број ќе биде природен број ако a е делив со 35 и 396 е делив со b . Слично, $\frac{a}{b} : \frac{28}{297} = \frac{297a}{28b}$ и овој број ќе биде природен број ако a е делив со 28 и 297 е делив со b . Двата услови ќе бидат исполнети ако $a = \text{NZS}(28, 35) = 140$ и $b = \text{NZD}(396, 297) = 99$.

Конечно, бараниот број е $\frac{140}{99}$.

Навистина, $\frac{140}{99} : \frac{35}{396} = 16$ и $\frac{140}{99} : \frac{28}{297} = 15$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Определи ги сите двоцифрени броеви кои се четири пари поголеми од збирот на нивните цифри.

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Од условот на задачата следува $10a + b = 4(a + b)$, па затоа $6a = 3b$, т.е. $b = 2a$. Конечно, за $a = 1, 2, 3, 4$, добиваме $b = 2, 4, 6, 8$, соодветно, т.е. бараните броеви се 12, 24, 36 и 48.

2. Во една улица куќите од едната страна се нумерирани со парни броеви, а од другата страна се нумерирани со непарни броеви. Притоа се искористени непарните броеви од 1 до 169 и парните броеви од 2 до 114. Колку цифри се искористени за нумерирање на сите куќе во оваа улица?

Решение. При нумерирање со непарните броеви се употребени $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 5 + 90 + 105 = 200$ цифри, а при нумерирање со парните броеви се употребени $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 4 + 90 + 24 = 118$ цифри. Според тоа, за нумерирање на сите куќе во оваа улица се употребени $200 + 118 = 318$ цифри.

3. Ако еден број се подели со 7, а потоа тој број се собере со делителот и количникот се добива бројот 63. Определи го почетниот број.

Решение. Количникот од делењето да го означиме со k . Од условот на задачата следува $7k + 7 + k = 63$, од каде наоѓаме $k = 7$. Според тоа, почетниот број е $7 \cdot 7 = 49$.

4. Определи ги сите четирицифрени броеви кои се помали од 2000 и чиј производ на цифри е еднаков на 105.

Решение. Имаме, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, па затоа четирицифрените броеви чиј производ на цифри е 105 мора да се запишани со цифрите 1, 3, 5 и 7. Понатаму, бидејќи се бараат броевите помали од 2000 решение на задачата се броевите: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735 и 1753.

5. За да се нумерираат сите страници на една книга биле употребени 1068 цифри. Колку страници имала оваа книга?

Решение. За нумерирање на првите 9 страници се употребени 9 цифри, а за нумерирање на следните 90 страници се употребени

$2 \cdot 90 = 180$ цифри. Според тоа, за нумерирање со трицифрени броеви остануваат $1068 - (9 + 180) = 879$ цифри, т.е. имаме $879 : 3 = 293$ страници нумерирани со трицифрени броеви. Конечно, книгата имала $9 + 90 + 293 = 392$ страници.

6. Мирко требало некој број да го помножи со бројот 408, но тој направил грешка и тој број го помножил со 48, па така направил грешка од 270000. Определи го производот кој требало да го добие Мирко.

Решение. Нека непознатиот број е x . Мирко требало да го добие производот $408x$, но тој го добил производот $48x$. Значи,

$$408x - 48x = 270000,$$

од каде добиваме $x = 750$ и бараниот производ е $408 \cdot 750 = 306000$.

7. При множењето на два броја Илија цифрата на единиците 4 на едниот број ја заменил со цифрата 1, па така добил производ 525 наместо 600. Кои броеви требало да ги помножи Илија?

Решение. Настанатата разлика $600 - 525 = 75$ е трипати поголема од едниот множител, Затоа едниот множител е еднаков на $75 : 3 = 25$, а вториот множител е еднаков на $600 : 25 = 24$. Според тоа, Илија требало да ги помножи броевите 24 и 25.

8. Количникот на два броја е еднаков на 72. Ако деленикот се намали за 2000, а делителот остане непроменет се добива количник 32. Кои се тие броеви?

Решение. Нека делителот е a . Тогаш деленикот е еднаков на $72a$. Кога од деленикот ќе одземеме 2000, добиваме количник 32, што значи дека разликата $72a - 32a = 40a$ е еднаква на 2000. Според тоа, $40a = 2000$, т.е. $a = 50$. Значи, делителот е еднаков на 50, а деленикот е еднаков на $72a = 72 \cdot 50 = 3600$.

9. Збирот на четири броја е 208. Ако на првиот број му додадеме 3, од вториот број одземеме 3, третиот број го помножине со 3 и четвртиот број го поделиме со 3, добиваме ист резултат. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x, y, z и t . Тогаш

$$x + 3 = y - 3 = 3z = \frac{t}{3} = k,$$

па затоа

$$x = k - 3, y = k + 3, z = \frac{k}{3}, t = 3k.$$

Но, збирот на броевите е 208, што значи

$$k - 3 + k + 3 + \frac{k}{3} + 3k = 208,$$

од каде добиваме $16k = 624$, т.е. $k = 39$. Според тоа, бараните броеви се $x = 36$, $y = 42$, $z = 13$, $t = 117$.

10. Две семејства имаат по 3 деца и во секое семејство има по 2 близнаци. Производот на бројот на годините на децата во секое од семејствата е 36, а збиравите на годините на децата во секое од семејствата се еднакви. Годините на децата од едното семејство се разликуваат од годините на децата од другото семејство. Колку години имаат децата во секое од семејствата?

Решение. Производот на годините е 36 и затоа

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

Близнаци се јавуваат во четири случаи и тоа: (1,1,36), (2,2,9), (1,6,6) и (3,3,4). Збирот на годините во овие случаи е:

$$1 + 1 + 36 = 38, \quad 2 + 2 + 9 = 13, \quad 1 + 6 + 6 = 13 \quad \text{и} \quad 3 + 3 + 4 = 10.$$

Бидејќи збиравите на годините на децата во двете семејства се еднакви, заклучуваме дека годините се: (2,2,9) и (1,6,6).

11. Збиравите на секои два од броевите a, b и c се еднакви на 332, 408 и 466. Определи ги броевите a, b и c .

Решение. Нека претпоставиме дека $a \leq b \leq c$. Тогаш според условот $a + b = 332$, $a + c = 408$ и $b + c = 466$. Ако ги собреме сите три равенки, тогаш на десната страна секој од броевите a, b и c ќе се појави двапати, па затоа $2a + 2b + 2c = 332 + 408 + 466$, од каде добиваме $a + b + c = 603$. Конечно,

$$a = a + b + c - (b + c) = 603 - 466 = 137,$$

$$b = a + b + c - (a + c) = 603 - 408 = 195,$$

$$c = a + b + c - (a + b) = 603 - 332 = 271.$$

12. Аритметичката средина на два броја е 2019. Еден од броевите е 2021. Кој е другиот број?

Решение. Нека x е бројот кој се бара. Тогаш од условот на задачата следува $\frac{x+2021}{2} = 2019$, па затоа $x = 2 \cdot 2019 - 2021 = 2017$.

13. Збирот на трицифрените броеви $\overline{ABC}, \overline{CAB}, \overline{BCA}$ е трицифрен број. Определи ги броевите $\overline{ABC}, \overline{CAB}, \overline{BCA}$, ако A, B, C се различни цифри.

Решение. Имаме:

$$\overline{ABC} + \overline{CAB} + \overline{BCA} = 100A + 10B + C + 100C + 10A + B + 100B + 10C + A \\ = 111A + 111B + 111C = 111(A + B + C).$$

Бидејќи збирот е трицифрен број, важи $A + B + C \leq 9$. Но, цифрите A, B, C се различни, па затоа $A + B + C \geq 6$. Можни се следниве случаи:

- ако $A + B + C = 6$, тогаш за $A=1, B=2, C=3$ ги добиваме броевите 123, 312 и 231, а за $A=1, B=3, C=2$ ги добиваме броевите 132, 213 и 321,
- ако $A + B + C = 7$, тогаш за $A=1, B=2, C=4$ ги добиваме броевите 124, 412 и 241, а за $A=1, B=4, C=2$ ги добиваме броевите 142, 214 и 421,
- ако $A + B + C = 8$, тогаш за $A=1, B=2, C=5$ ги добиваме броевите 125, 512 и 251, за $A=1, B=5, C=2$ ги добиваме броевите 152, 215 и 521, за $A=1, B=3, C=4$ ги добиваме броевите 134, 413 и 341, а за $A=1, B=4, C=3$ ги добиваме броевите 143, 314 и 431,
- ако $A + B + C = 9$, тогаш за $A=1, B=2, C=6$ ги добиваме броевите 126, 612 и 261, за $A=1, B=6, C=2$ ги добиваме броевите 162, 216 и 621, за $A=1, B=3, C=5$ ги добиваме броевите 135, 513 и 351, за $A=1, B=5, C=3$ ги добиваме броевите 153, 315 и 531, за $A=2, B=3, C=4$ ги добиваме броевите 234, 423 и 342, а за $A=2, B=4, C=3$ ги добиваме броевите 243, 324 и 432.

14. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{5}{4}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 63.

Решение. Бараната дробка е од видот $\frac{5k}{4k}$ и важи $5k + 4k = 63$, односно $k = 7$. Конечно решение на задачата е дробката $\frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{35}{28}$.

15. Збирот на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ од некој број е за 9 помал од половината на истиот тој број. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот на задачата следува

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x + 9 = \frac{x}{2} \\ \frac{8x}{15} + 9 = \frac{x}{2} \\ x = -270.$$

Значи, бараниот број е -270 .

16. Збирот на половината, третината и седмината на некој број е за 1 помал од самиот број. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е x . Тогаш $x - (\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7}) = 1$, од каде добиваме $\frac{x}{42} = 1$, т.е. $x = 42$.

17. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{43}{90}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 1995.

Решение. Бараната дробка е од видот $\frac{43x}{90x}$ и збирот на броителот и именителот на истата е еднаков на 1995, па затоа $43x + 90x = 1995$. Од последната равенка наоѓаме $x = 15$, што значи дека бараната дробка е $\frac{43 \cdot 15}{90 \cdot 15} = \frac{645}{1350}$.

18. Определи ја дробката која е еднаква на $\frac{7}{13}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 140.

Решение. Нека бараната дробка е $\frac{7k}{13k}$. Тогаш $7k + 13k = 140$, од каде добиваме $k = 7$. Конечно, бараната дробка е $\frac{7 \cdot 7}{13 \cdot 7} = \frac{49}{91}$.

19. Дробката $\frac{999}{1994}$ запиши ја како збир на две дробки со едноцифрени броители.

Решение. Од $1994 = 1 \cdot 1994 = 2 \cdot 997$ следува

$$\frac{999}{1994} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1994} = \frac{c}{2} + \frac{d}{997}.$$

Првото претставување не е можно бидејќи ако $a = 1$ добиваме $1 + \frac{b}{1994} > 1 > \frac{999}{1994}$. На потполно ист начин заклучуваме дека во второто претставување мора да важи $c \leq 1$, па затоа $\frac{999}{1994} = \frac{1}{2} + \frac{d}{997}$, од каде добиваме $997 + 2d = 999$, т.е. $d = 1$. Конечно, бараното претставување е $\frac{999}{1994} = \frac{1}{2} + \frac{1}{997}$.

20. Збирот на две позитивни дробки со едноцифрени именители е еднаков на $\frac{11}{18}$. Кои се тие дробки?

Решение. Бидејќи именителите на дробките се едноцифрени броеви, можни се следниве случаи:

1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{9} = \frac{11}{18}$, од каде добиваме $9x + 2y = 11$. Во множеството природни броеви последната равенка има решение $x=1, y=1$, па бараните дробки се $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{9}$.

2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{11}{18}$, од каде добиваме $6x + 3y = 11$. Во множеството природни броеви последната равенка нема решение бидејќи нејзината лева страна е делива со 3, а 3 не е делител на 11.

3) $\frac{x}{6} + \frac{y}{9} = \frac{11}{18}$, од каде добиваме $3x + 2y = 11$. Во множеството природни броеви последната равенка има решенија $x=1, y=4$ и $x=3, y=1$. За $x=1, y=4$ ги добиваме дробките $\frac{1}{6}$ и $\frac{4}{9}$, а за $x=3, y=1$ го добиваме решението од првиот случај.

Конечно, задачата има две решенија и тоа: $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$ и $\frac{1}{6} + \frac{4}{9} = \frac{11}{18}$.

21. Збирот на $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ од некој број е за 48 помал од $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$ на истиот тој број. Кој е тој број?

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот на задачата следува

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)x + 48 = \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{7}{12}\right)x$$

$$\frac{9}{12}x + 48 = \frac{13}{12}x$$

$$\frac{4}{12}x = 48$$

$$x = 144.$$

Според тоа, бараниот број е 144.

22. Марко почнал од бројот 2 да ги одзема дробките $\frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, \frac{3}{2011}, \dots$.

Која е последната дробка која Марко може да ја одземе, а резултатот од одземањето да е поголем од нула?

Решение. Нека последната дробка која Марко ја одзел е $\frac{n}{2011}$. Тогаш

$$\frac{1}{2011} + \frac{2}{2011} + \frac{3}{2011} + \dots + \frac{n}{2011} < 2 = \frac{4022}{2011}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < 4022$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < 4022$$

$$n(n+1) < 8044.$$

Броевите n и $n+1$ се два последователни природни броја и како

$$90 \cdot 90 = 8100 > 8044, \text{ а } 89 \cdot 90 = 8010 < 8044$$

заклучуваме дека $n = 89$. Според тоа, последната дробка која Марко може да ја одземе е $\frac{89}{2011}$.

23. Пабло почнал да ги пишува дробките $\frac{1}{2012}, \frac{2}{2012}, \frac{3}{2012}, \dots$. Колку дробки може да запише Пабло такашто нивниот збир е помал од 3.

Решение. Нека последната дробка која Марко ја одзел е $\frac{n}{2012}$. Тогаш

$$\frac{1}{2012} + \frac{2}{2012} + \frac{3}{2012} + \dots + \frac{n}{2012} < 3 = \frac{6036}{2012}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < 6036$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < 6036$$

$$n(n+1) < 12072.$$

Броевите n и $n+1$ се два последователни природни броја и како $110 \cdot 110 = 12100 > 12072$, а $109 \cdot 110 = 11990 < 12072$ заклучуваме дека $n = 109$. Според тоа, последната дробка која Пабло може да ја запише е $\frac{109}{2012}$, т.е. тој може да започне 109 дробки.

24. Горјан замислил некој број. Од замислениот број тој одзел 1,05, добиената разлика ја помножил со 0,8, на добиениот производ му додал 2,84 и добиениот збир го поделил со 0,01. Така Горјан го добил бројот 700. Кој број го замислил Горјан?

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Добиениот збир е еднаков на $700 \cdot 0,01 = 7$, што значи дека добиениот производ е еднаков на $7 - 2,84 = 4,16$. Според тоа, добиената разлика е $4,16 : 0,8 = 5,2$ и на крајот замислениот број е $5,2 + 1,05 = 6,25$.

Втор начин. Нека замислениот број е x . Од условот на задачата следува равенката $((x - 1,05) \cdot 0,8 + 2,84) : 0,01 = 700$ чие решение е $x = 6,25$.

25. Кога од еден број ќе одземеме $\frac{5}{8}$ од неговата вредност, а потоа од остатокот ќе одземеме $\frac{5}{6}$ од остатокот, а потоа од новиот остаток ќе одземеме 6 се добива 0. Определи го непознатиот број?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи однапред-наазад. По второто одземање се добива бројот 6, кој е еднаков на $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ од остатокот

по првото одземање. Значи, остатокот по првото одземање е еднаков на $6 \cdot 6 = 36$. Но, остатокот по првото одземање е еднаков на $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

од почетниот број, што значи дека почетниот број е $36 \cdot \frac{8}{3} = 96$.

26. Цифрата на единиците на еден број е 0 и ако истата ја избришеме, тогаш тој број се намалува за 27405. Кој е почетниот број?

Решение. Нека непознатиот број е $10x$, Со бришење на цифрата 0 бројот се намалува 10 пати, т.е. се добива бројот x . Значи, $10x - x = 27405$, од каде наоѓаме $x = 3045$. Конечно, почетниот број е $10x = 30450$.

27. Дамјан замислил некој број на кој прво му додал 25, а потоа добиениот број го помножил со 25 и добил 2025. Кој број го замислил Дамјан?

Решение. Нека Дамјан го замислил бројот x . Од условот на задачата следува равенката $25(x + 25) = 2025$, чие решение е $x = 56$. Според тоа, Дамјан го замислил бројот 56.

28. Ако на некој број n од десно му допишеме нула, па овој број го поделиме со 15, а потоа на добиениот количник од десно му допишеме 3 и така добиениот број го поделиме со 13, ќе го добиеме бројот 11. Определи го бројот n .

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназада нанапред. Пред да поделиме со 13 добиен е бројот $11 \cdot 13 = 143$. Понатаму, пред оддесно да ја допишеме цифрата 3, добиен е количникот 14. Пред да поделиме со 15 добиен е бројот $14 \cdot 15 = 210$, што значи дека почетниот број е $n = 21$.

Втор начин. Од условот на задачата следува равенката

$$((10n : 15) \cdot 10 + 3) : 13 = 11,$$

чие решение е $n = 21$.

29. Мирјана замислила еден број. Потоа на замислениот број му додала 6, па добиениот број го помножила со 5. Добиеениот производ го намалила за 40, па добиената разлика ја поделила со 7, по што го добила бројот 25. Кој број го замислила Мирјана?

Решение. *Прв начин.* Нека Мирјана го замислила бројот x . Од условот на задачата следува равенката

$$((x + 6) \cdot 5 - 40) : 7 = 25.$$

Решението на последната равенка е $x = 37$, што значи дека Мирјана го замислила бројот 37.

Втор начин. Пред да подели со 7 Мирјана го добила бројот $25 \cdot 7 = 175$. Според тоа, пред да одземе 40, таа го добила бројот $175 + 40 = 215$. Значи, пред да помножи со 5, Мирјана го добила бројот $215 : 5 = 43$, од каде следува дека замислениот број е $43 - 6 = 37$.

30. Цифрата на единиците на еден број е 2 и ако истата ја избришеме се добива број кој е за 31061 помал од почетниот број. Кој е почетниот број?

Решение. Нека со x го означиме бројот кој се добива со бришење на цифрата на единците. Тогаш почетниот број е $10x + 2$, па од условот на задачата следува $10x + 2 - x = 31061$, од каде добиваме $x = 3451$. Конечно, почетниот број е $10x + 2 = 34512$.

31. Наместо даден број да го подели со 3 и на добиениот количник додаде 8, Илија дадениот број го помножил со 3 и од добиениот производ одзел 8. Но, Илија повторно добил точен резултат. Кој е бројот кој Илија требало да го подели?

Решение. Нека бараниот број е x . Од условот на задачата следува $\frac{x}{3} + 8 = 3x - 8$, од каде добиваме $x = 6$.

32. Ако на двоцифрен број му се допише и од лево и од десно цифрата 1, се добива број кој е 21 пат поголем од почетниот број. Определи го двоцифрениот број.

Решение. Нека $x = \overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Според условот на задачата ваши $\overline{1ab1} = 21 \cdot \overline{ab}$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $1000 + 10 \cdot \overline{ab} + 1 = 21 \cdot \overline{ab}$, од каде добиваме $\overline{ab} = 91$.

33. Збирот на пет последователни цели броеви е еднаков на 0. Кои се тие броеви?

Решение. Ако најмалиот број го означиме со x , тогаш

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 0,$$

од каде добиваме $x = -2$. Конечно, бараните броеви се $-2, -1, 0, 1$ и 2 .

34. Збирот на пет последователни цели броеви е еднаков на -40 . Кои се тие броеви?

Решение. Ако најмалиот број го означиме со x , тогаш

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = -40,$$

од каде добиваме $x = -10$. Конечно, бараните броеви се $-10, -9, -8, -7$ и -6 .

35. Ако на некој број оддесно му допишем 9, добиениот број го поделиме со 13, потоа на добиениот количник оддесно му допишеме 1 и добиениот број го поделиме со 11, се добива бројот 21. Определи го почетниот број.

Решение. *Прв начин.* Нека почетниот број е x . Со допишување оддесно на 9 се добива бројот $10x + 9$. Понатаму, по делењето со 13 и допишување оддесно на 1 се добива бројот $((10x + 9):13) \cdot 10 + 1$. Затоа

$$(((10x + 9):13) \cdot 10 + 1):11 = 21,$$

од каде наоѓаме $x = 29$.

Втор начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Пред делењето со 11 го имаме бројот $11 \cdot 21 = 231$. Сега, пред допишувањето оддесно на цифрата 1 го имаме бројот 23. Значи, пред делењето со 13 го имаме бројот $23 \cdot 13 = 299$, па затоа пред допишувањето од десно го имаме бројот 29 и тоа е почетниот број.

36. Определи ја дробката која е еднаква на дробката $\frac{19}{34}$ и кај која збирот на броителот и именителот е еднаков на 2014.

Решение. Бараната дробка е од видот $\frac{19k}{34k}$, $k \in \mathbb{N}$. Според условот на задачата $19k + 34k = 2014$, од каде следува $53k = 2014$, т.е. $k = 38$. Конечно, бараната дробка е $\frac{19}{34} = \frac{19 \cdot 38}{34 \cdot 38} = \frac{722}{1292}$.

37. Дадена е дробката $\frac{17}{63}$. Кој број треба да се одземе од броителот и да се додаде на именителот за да се добие дробката $\frac{3}{17}$?

Решение. Нека бараниот број е x . Според условот на задачата имаме $\frac{17-x}{63+x} = \frac{3}{17}$, од каде добиваме $289 - 17x = 189 + 3x$, односно $x = 5$.

38. Збирот на две броја е $\frac{2}{3}$, а нивната разлика е $\frac{1}{3}$. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека бараните броеви се x и y . Од условот на задачата следува $x + y = \frac{2}{3}$ и $x - y = \frac{1}{3}$. Добиените равенки ги собираме и добиваме $2x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, од каде наоѓаме $x = \frac{1}{2}$. Сега, $y = \frac{2}{3} - x = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

39. Ако не еден природен број му ја додадеме неговата четирикратна реципрочна вредност, ќе го добиеме производот на тој број и неговата четирикратна реципрочна вредност. Кој е тој број?

Решение. Од условот на задачата следува равенката $a + \frac{4}{a} = a \cdot \frac{4}{a}$, т.е. равенката $a + \frac{4}{a} = 4$. Според тоа, $a \mid 4$. Делители на 4 се 1, 2 и 4 и со непосредна проверка се добива дека $a = 2$ е решение на задачата.

40. Збирот на два броја од првиот број е поголем за 245, а од вториот број е поголем за 67. Определи го збирот на овие броеви.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a + b = a + 245 \text{ и } a + b = b + 67.$$

Затоа $a + b + a + b = a + 245 + b + 67$, односно $a + b = 312$.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

41. Марија во продавница купува чоколади од ист вид. Ако купи 20 чоколади и преостануваат 60 денари од парите кои ги има, а за да купи 25 чоколади и недостасуваат 40 денари. Колку пати има Марија?

Решение. За да купи $25 - 20 = 5$ чоколади повеќе Марија треба да доплати $60 + 40 = 100$ денари. Според тоа, едно чоколадо чини $100 : 5 = 20$ денари. Значи, Марија имала $20 \cdot 20 + 60 = 460$ денари.

42. На Павел му недостасуваат 140 денари, а на Томи му недостасуваат 40 денари за да секој од нив купи иста збирка задачи по математика. Затоа одлучиле заеднички да купат само една збирка, но и тогаш им недостасувале 20 денари. Определи ја цената на оваа збирка задачи.

Решение. Ако Павел и Томи купат две збирки, тогаш ќе им недостасуваат $140 + 40 = 180$ денари. Бидејќи кога сакале заедно да купат една збирка им недостасувале 20 денари, заклучуваме дека збирката чини $180 - 20 = 160$ денари.

43. За 4 kg сливи и 6 kg праски Илија платил 126 денари. Цените на сливите и праските се однесуваат како 3:5. Определи ги цените на сливите и праските.

Решение. Од услвот на задачата следува дека цената на 1 kg сливи е $3x$, а цената на 1 kg праски е $5x$. Значи, $4 \cdot 3x + 6 \cdot 5x = 126$, од каде

добиваме $x = 3$. Според тоа, цената на 1 kg сливи е $3 \cdot 3 = 9$ денари, а цената на 1 kg праски е $5 \cdot 3 = 15$ денари.

44. Матеј, Кирил и Павел добиле на лотарија премија од 100000 денари. Како ќе ја поделат премијата, ако при купување на лозот Матеј дал 5 денари, Кирил дал 6 денари и Павел дал 9 денари?

Решение. Лозот чини $5 + 6 + 9 = 20$ денари. Тоа значи дека за секој вложен денар се добиени $100000 : 20 = 5000$ денари. Оттука следува Матеј треба да добие $5 \cdot 5000 = 25000$ денари, Кирил треба да добие $6 \cdot 5000 = 30000$ денари и Павел треба да добие $9 \cdot 5000 = 45000$ денари.

45. Горјан отишол во книжара и сакал да купи 11 тетратки од ист вид, при што забележал дека од парите кои ги имал му преостануваат 70 денари. Кога сакал да купи 15 тетратки од овој вид, тој забележал дека му недостасуваат 50 денари. Колку чини една тетратка? Колку пари имал Горјан?

Решение. Разликата од $15 - 11 = 4$ тетратки чини $70 + 50 = 120$ денари. Значи, една тетратка чини $120 : 4 = 30$ денари, а Горјан имал $11 \cdot 30 + 70 = 400$ денари.

46. Али Баба и 40-те разбојници подеднакво поделиле 42 идентични вреќи полни со златници. Секој од нив добил една цела вреќа и два златника. Колку златници добил секој разбојник? Колку златници вкупно се поделени?



Решение. Дружината на Али Баба вкупно има $40 + 1 = 41$ луѓе. Секој од нив добил по една вреќа златници, а од четириесет и втората вреќа секој добил по 2 златника. Според тоа, во последната вреќа имало $41 \cdot 2 = 82$ златника. Значи, секој разбојник добил по $82 + 2 = 84$ златници, а вкупно се поделени $84 \cdot 41 = 3444$

47. Девет исти тетратки чинат 11 евра и извесен број евроценти, а 13 такви тетратки чинат 15 евра и извесен број евроценти. Колку пари чини една тетратка?

Решение. Цената на една тетратка е 1 евро и неколку евроценти. Бројот на евроцентите помножен со 9 дава износ меѓу 2 и 3 евра, т.е. меѓу 200 и 300 евроценти, а помножен со 13 исто така дава износ меѓу 2 и 3 евра. Од првиот услов следува дека бројот на евроцентите може да биде 23, 24, ..., 33, а од вториот услов следува дека бројот на евроцентите може да биде 17, 18, 19, ..., 23. Бидејќи бараниот број

евроценти го задоволува и првиот и вториот услов, заклучуваме дека тој број е 23, па цената на една тетратка е 1 евро и 23 евроценти.

48. Марија за 5 kg круши платила колку и за 8 kg јаболка. Определи ги цената на јаболката и цената на крушите ако се знае дека 1 kg круши чини 15 денари повеќе од 1 kg јаболка.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи 1 kg круши е 15 денари поскап од 1 kg јаболка, Марија за 5 kg круши платила $15 \cdot 5 = 75$ денари повеќе отколку за 5 kg јаболка. Тоа значи дека 3 kg јаболка чинат 75 денари, па затоа 1 kg јаболка чини 25 денари, а 1 kg круши чини 40 денари.

Втор начин. Ако цената на 1 kg е x денари, тогаш цената на 1 kg круши е $x + 15$ денари. Имаме, $5(x + 15) = 8x$, од каде добиваме $x = 25$. Значи, 1 kg јаболка чини 25 денари, а 1 kg круши чини 40 денари.

49. Марко за 370 денари купил книга, тетратка, молив и хемиско пенкало. Тетратката, моливот и хемиското пенкало ги платил вкупно 190 денари. Книгата, хемиското пенкало и моливот заедно чинат 350 денари, а тетратката и моливот заедно чинат 50 денари. Колку пари чини секој предмет одделено?

Решение. Бидејќи сите четири предмети заедно чинат 370 денари, а тетратката, хемиското пенкало и моливот заедно чинар 190 денари заклучуваме дека книгата чини $370 - 190 = 180$ денари. На сличен начин заклучуваме дека тетратката чини $370 - 350 = 20$ денари, моливот чини $50 - 20 = 30$ денари и хемиското пенкало чини $190 - 50 = 140$ денари.

50. Илија купил 4 книги. Првата, втората и третата книга заедно чинат 360 денари, првата, третата и четвртата книга заедно чинат 400 денари, првата, втората и четвртата книга заедно чинат 380 денари и втората, третата и четвртата книга заедно чинат 420 денари. Определи ја цената на секоја од купените книги.

Упатство. Прво определи колку чинеле заедно четирите книги, а потоа постапи аналогно како во претходната задача. Цената на првата книга е 100 денари, на втората цената е 120 денари, на третата е 140 денари и на четвртата книга е 160 денари.

51. За 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 1 kg портокали Елена платила 320 денари. За 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 2 kg портокали Марија платила

420 денари и за 1 kg јаболка, 2 kg лимони и 2 kg портокали Петра платила 380 денари. Определи ја цената на 1 kg од секој вид овошје.

Решение. Бидејќи 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 1 kg портокали чинат 320 денари, а 3 kg јаболка, 2 kg лимони и 2 kg портокали чинат 420 денари, заклучуваме дека 1 kg портокали чини $420 - 320 = 100$ денари. Од вториот и третиот услов следува дека 2 kg јаболка чинат 40 денари, што значи дека 1 kg јаболка чини 20 денари. Конечно, 2 kg лимони чинат $320 - 3 \cdot 20 - 100 = 160$ денари, што значи дека 1 kg чини 80 денари.

52. Во две продавници за овошје имало 365 kg јаболка и тие се продавале по иста цена. Кога првата продавница продала определено количество јаболка и за тоа добила 4340 денари, а втората продавица продала определено количество јаболка и за тоа добила 8750 денари, во првата продавница останале 102 , а во втората останале 76 kg јаболка. По колку килограми јаболка имало во секоја продавница на почетокот?

Решение. Двете продавници продале $365 - (102 + 76) = 187$ kg јаболка за што добиле $4340 + 8750 = 13090$ денари. Според тоа, цената на 1 kg јаболка е $13090 : 187 = 70$ денари. Значи, во првата продавница на почетокот имало $4340 : 70 + 102 = 164$ kg јаболка, а во втората продавница имало $365 - 164 = 201$ kg јаболка.

53. Неколку пријатели отишле во слаткарница и се договориле секој да даде по 160 денари. Кога требала да се плати сметката се покажало дека се потребни уште 40 денари. Тогаш решиле да дадат по 180 денари, за да можат да остават и бакшиш кој изнесувал $\frac{1}{10}$ од целата сметка. Колку пријатели биле во слаткарницата и колку изнесувала сметката?

Решение. Нека x е бројот на пријателите. Тогаш од условот на задачата следува равенката

$$\frac{11}{10}(160x + 40) = 180x,$$

од каде добиваме $x = 11$. Според тоа, во слаткарницата биле 11 пријателии сметката изнесувала

$$11 \cdot 160 + 40 = 1800 \text{ денари.}$$

54. Ванчо и Михаил меѓу себе поделиле 816 денари. Кога Ванчо потрошил $\frac{3}{5}$ од својот дел, а Михаил потрошил $\frac{3}{7}$ од својот дел, им останале еднакви суми пари. Колку пари добил секој од нив при поделбата?

Решение. Кога Ванчо потроил $\frac{3}{5}$ од своите пари, му останале $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ од неговиот дел. Слично, кога Михаил потрошил $\frac{3}{7}$ од своите пари, му останале $\frac{4}{7}$ од неговиот дел. Бидејќи овие суми се еднакви заклучуваме дека Ванчо добил 10 делови, а Михаил добил 7 делови од целата сума. Еден дел од сумата изнесува $816:17 = 48$ денари, што значи дека Ванчо добил $48 \cdot 10 = 480$ денари, а Михаил добил $7 \cdot 48 = 336$ денари.

55. Владимир, Натка и Јасна заедно имале 2450 денари. Кога Владимир потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Натка потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари и Јасна потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари, им останале еднакви суми пари.

Колку пари имал секој од нив?

Решение. Нека Владимир, Натка и Јасна имале x, y и z денари соодветно. Тогаш

$$x + y + z = 2450 \text{ и } \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z.$$

Решавајќи го последниот систем добиваме $x = 900, y = 800$ и $z = 750$.

56. Иван во книжарница за книги потрошил $\frac{3}{5}$ од парите кои ги имал, потоа $\frac{5}{9}$ од парите кои му останале потрошил за тетратки, потоа $\frac{3}{8}$ од парите кои му останале потрошил за прибор за цртање и пишување и му останале 800 денари. Колку пари имал Иван на почетокот?

Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред.

Пред да му останат 800 денари, Иван потрошил $\frac{3}{8}$ од парите што му останале, па овие 800 денари се $\frac{5}{8}$ од парите кои Иван ги имал пред купувањето на приборот. Значи, пред купувањето на приборот Иван имал $800 \cdot \frac{8}{5} = 1280$ денари. Аналогно, овие 1280 денари се еднакви на $\frac{4}{9}$ од парите кои Иван ги имал пред купувањето на тетратките, што значи дека пред купувањето на тетратките Иван имал $1280 \cdot \frac{9}{4} = 2880$

денари. Конечно, овие 2880 денари се еднакви на $\frac{2}{5}$ од парите кои Иван ги имал на почетокот, што значи дека на почетокот тој имал $2880 \cdot \frac{5}{2} = 7200$ денари.

Втор начин. Кога потрошил $\frac{3}{5}$ од парите на Иван му останале $\frac{2}{5}$ од парите кои ги имал на почетокот. Потоа потрошил $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9}$ од целата сума, што значи дека до сега потрошил $\frac{3}{5} + \frac{2}{9} = \frac{37}{45}$ од целата сума, па му останале $\frac{8}{45}$ од парите кои ги имал на почетокот. Од нив потрошил $\frac{3}{8}$, односно $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{45} = \frac{1}{15}$ од целата сума. Значи, Иван потрошил $\frac{37}{45} + \frac{1}{15} = \frac{8}{9}$ од целата сума, па му останале $\frac{1}{9}$ од парите кои ги имал на почетокот. Конечно, Иван на почетокот имал $9 \cdot 800 = 7200$ денари.

57. Четири другари заеднички купиле фудбалска топка. Првиот дал половина од парите колку што чинела топката, вториот дал третина од сумата која ја дале останатите тројца, а третиот дал четвртина од сумата која ја дале останатите тројца. Четвртиот дал 500 денари. Определи ја цената на топката.

Решение. Второто дете дало третина од парите кои ги дале останатите, што значи дека тоа дало четвртина од целокупната сума, а останатите дале три четвртини. Третото дете дало четвртина од парите кои ги дале останатите, што значи дека тоа дало петтина од целокупната сума, а останатите дале четири петтини. Според тоа, првите три деца дале $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ од цената на топката, што значи дека четвртото дете дало $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ од цената на топката. Но, тоа дало 500 денари, што значи дека топката чинела $20 \cdot 500 = 10000$ денари.

58. Павел купил книга за која платил 100 денари и уште $\frac{1}{3}$ од вредноста на книгата. Колку чинела книгата која ја купил Павел?

Решение. Нека цената на книгата е x денари. Од условот на задачата следува равенката

$$x = \frac{1}{3}x + 100,$$

од каде добиваме $x = 150$. Според тоа, книгата чинела 150 денари.

59. Иван, Милан и Јане имаат вкупно 360 денари. Иван и Милан заедно имаат 40 денари повеќе од Јане, а Иван има три пати повеќе пари од Милан. Колку пари има секој од нив?

Решение. Нека Милан има x денари. Тогаш Иван има $3x$ денари, а Јане има $x + 3x - 40 = 4x - 40$ денари. Значи,

$$x + 3x + 4x - 40 = 360,$$

од каде наоѓаме $x = 50$. Значи, Милан има 50 денари, Иван има 150 денари и Јане има 160 денари.

60. Лидија донела на пазар четири пилиња со иста маса. Кога ја прашале колкава е масата на секое пиле, таа одговорила: „Секое пиле има маса 1 kg и уште петтина од својата маса“. Колку пари заработила Лидија со продажбата на сите пилиња, ако 1 kg го продавала по 300 денари?

Решение. Нека масата на едно пиле е x . Од условот на задачата следува $x = 1 + \frac{1}{5}x$, што значи дека $x = 1,25\text{ kg}$. Четирите пилиња имаат маса $4 \cdot 1,25 = 5\text{ kg}$, што значи дека Лидија со нивната продажба заработила $5 \cdot 300 = 1500$ денари.

61. Еден трговец купил стока за 212100 денари. Две третини од стоката ја продал со $\frac{1}{20}$ заработувачка, а останата стока ја продал со загуба $\frac{1}{70}$. Колку пари заработил трговецот?

Решение. Трговецот продал роба во вредност од $\frac{2}{3} \cdot 212100 = 141400$ денари со добивка $\frac{1}{20}$, што значи дека остварил добивка од $\frac{1}{20} \cdot 141400 = 7070$ денари. Понатаму, тој продал роба во вредност од $\frac{1}{3} \cdot 212100 = 70700$ со загуба од $\frac{1}{70}$, што значи дека остварил загуба од $\frac{1}{70} \cdot 70700 = 1010$ денари. Конечно, при продажбата на целата роба трговецот заработил $7070 - 1010 = 6060$ денари.

62. Максим потрошил $\frac{3}{5}$ од парите кои ги имал, потоа потрошил $\frac{5}{9}$ од остатокот, а потоа уште $\frac{3}{8}$ од новиот остаток. На крајот му останале 200 денари. Колку пари имал Максим на почетокот?

Решение. Кога Максим потрошил $\frac{3}{5}$ од парите му останале $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ од парите. Потоа потрошил $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9}$ од целата сума, па затоа новиот

остаток е $1 - (\frac{3}{5} + \frac{2}{9}) = \frac{8}{45}$ од целата сума. Од тоа потрошил $\frac{3}{8}$, т.е. потрошил $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{45} = \frac{1}{15}$ од целата сума. Значи, Максим потрошил $\frac{3}{5} + \frac{2}{9} + \frac{1}{15} = \frac{8}{9}$ од целата сума и му останала $\frac{1}{9}$ од целата сума, што е еднакво на 200 денари. Конечно, Максим имал $9 \cdot 200 = 1800$ денари.

63. За купување на таблет Марко планирал да потроши $\frac{3}{4}$ од парите кои ги имал. При купувањето дозна дека таблетот поевтинил за 10%. По купувањето на таблетот му останале 6500 денари од парите кои ги имал. Колку пари имал на почетокот Марко?

Решение. За купување на таблетот Марко планирал да потроши 75% од парите. Бидејќи таблетот поевтинил 10%, Марко потрошил 7,5% помалку пари од планираните. Значи, наместо 75%, тој потрошил 67,5%, па му преостанале 32,5% од парите кои ги имал. Овие 32,5% се еднакви на 6500 денари, што значи дека на почетокот Марко имал $\frac{6500 \cdot 100}{32,5} = 20000$ денари.

64. По намалувањето на цената за 20%, за 800 денари може да се купи 1 m платно повеќе отколку што пред намалувањето можело да се купи за 900 денари. Определи ја цената на платното пред намалувањето.

Решение. Ако пред намалувањето на цената 1 m чинел x денари, тогаш за 900 денари можело да се купат $\frac{900}{x}$ m платно. По намалувањето на цената, цената на 1 m изнесува 80% од првобитната цена, т.е. таа е $0,8x$ денари, па за 800 денари може да се купат $\frac{800}{0,8x} = \frac{1000}{x}$ m платно. Бидејќи $\frac{1000}{x}$ и за 1 поголемо од $\frac{900}{x}$, добиваме $\frac{1000}{x} - \frac{900}{x} = 1$, т.е. $x = 100$. Конечно, цената на платното пред намалувањето е 100 денари.

65. Иван и Лазар заработиле определена сума пари која требало да ја поделат во размер 5:3. Благајникот згрешил и сумата ја поделил во размер 2:3 и така Лазар добил 3600 денари повеќе отколку што требало. Определи ја вкупната сума и вистинските делови кои требало да ги добијат Иван и Лазар.

Решение. Нека сумата која требало да ја поделат е x денари. Лазар наместо $\frac{3}{8}x$ денари добил $\frac{3}{5}x$ денари, што значи $\frac{3}{5}x - \frac{3}{8}x = 3600$.

Решението на последната равенка е $x = 16000$ денари. Значи, Лазар требало да добие $\frac{3}{8} \cdot 16000 = 6000$ денари, а Иван требало да добие $\frac{5}{8} \cdot 16000 = 10000$ денари.

66. Петар и Марко заедно имале 900 денари. Кога Петар потрошил $\frac{3}{8}$ од неговите пари, а Марко потрошил $\frac{3}{10}$ од неговите пари, тие заклучиле дека потрошиле $\frac{1}{3}$ од вкупната сума. Колку пари имал секој од нив на почетокот?

Решение. Нека Марко имал x денари. Тогаш Петар имал $900 - x$ денари. Петар потрошил $\frac{3}{8}x$ денари, Марко потрошил $\frac{3}{10}(900 - x)$ денари, а заедно потрошиле $\frac{1}{3} \cdot 900 = 300$ денари. Тоа значи дека $\frac{3}{8}x + \frac{3}{10}(900 - x) = 300$, од каде добиваме $x = 500$. Значи, Петар имал 500 денари, а Марко имал $900 - 500 = 400$ денари.

67. Елена, Даница и Мирјана биле на пазар. Тие заедно потрошиле 5280 денари. Елена потрошила 340 денари повеќе од Даница, но трипати помалку од вкупната сума која ја потрошиле Даница и Мирјана. Колку пари потрошила секоја од нив?

Решение. Ако Елена потрошила x денари, тогаш Даница и Мирјана потрошиле $3x$ денари, па затоа $4x = 5280$. Според тоа, Елена потрошила $x = 1320$ денари, Даница потрошила $1320 - 340 = 980$ денари и Мирјана потрошила $5280 - (1320 + 980) = 2980$ денари.

68. Раде, Томе и Зоран имаат определени суми пари. Томе има трипати повеќе пари од Зоран, а трипати помалку од Раде. Зоран и Раде заедно имаат 1000 денари. Колку пари има секое од децата?

Решение. Нека Зоран има x денари. Тогаш Томе има $3x$ денари и Раде има $9x$ денари. Затоа $x + 9x = 1000$, од каде добиваме $x = 100$ денари. Според тоа, Зоран има 100 денари, Томе има 300 денари и Раде има 900 денари.

69. Марко, Дејан и Никола на екскурзија вкупно понеле 2220 денари. Марко потрошил $\frac{1}{3}$ од своите пари, Дејан потрошил $\frac{1}{5}$ од своите пари и Никола потрошил $\frac{7}{15}$ од своите пари. Потоа на секој од нив му

останала иста сума пари. Колку денари секој од нив понел на екскурзија?

Решение. Бидејќи $\frac{2}{3}$ од сумата на Марко е еднаква на $\frac{4}{5}$ од сумата на Дејан, а тоа е еднакво на $\frac{8}{15}$ од сумата на Никола, заклучуваме дека $\frac{8}{12}$ од сумата на Марко е еднаква на $\frac{8}{10}$ од сумата на Дејан е еднаква на $\frac{8}{15}$ од сумата на Никола. Последното значи дека дванаесеттина од сумата на Марко е еднаква на десеттина од сумата на Дејан е еднаква на петнаесеттина од сумата на Никола. Ако со x го означиме овој еднаков дел, добиваме дека сумите на Марко, Дејан и Никола се $12x, 10x$ и $15x$, па затоа $12x + 10x + 15x = 2220$, од каде добиваме $x = 60$ денари. Според тоа, Марко понел $12 \cdot 60 = 720$ денари, Дејан понел $10 \cdot 60 = 600$ денари и Никола понел $15 \cdot 60 = 900$ денари.

70. Од некоја сума прво се одбиени 5% за трошоци, потоа 90 денари за заеднички потреби, а остатокот е поделен на три лица подеднакво. Колку изнесува целата сума ако секое лице добило по 160 денари?

Решение. Секое лице добило по 160 денари, па значи пред поделбата имало $160 \cdot 3 = 480$ денари. Ако на оваа сума се додадат 90 денари, се добива сума од 570 денари. Бидејќи 5% се одбиени од целата сума, следува дека 570 е 95% од целата сума. Значи, почетната сума е $570 \cdot 100 : 95 = 600$ денари.

71. Петнаесет другари собирале пари за посета на театарска претстава. Колку пари собрале ако по купувањето на 11 карти им остануваат 50 денари, а за да купат 15 карти им се потребни уште 700 денари?

Решение. Нека x е цената на една карта, а y се собраните пари. Тогаш од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} 11x + 50 = y \\ 15x - 700 = y. \end{cases}$$

Според тоа, $11x + 50 = 15x - 700$, па затоа $4x = 750$, т.е. $x = 187,5$ денари. Конечно, $y = 11 \cdot 187,5 + 50 = 2112,50$.

72. Павел, Марко и Шана влегле во книжарница. Павел си купил: едно пенкало, еден молив и една гума. Шана си купила: две пекала и една гума, а Марко си купил: два молива и три гуми. Марко платил 80 евроценти повеќе од Шана, а Шана и Павел платиле еднаква сума

пари за работите што ги купиле. Една гума е за 10 евроценти поскапа од еден молив.

а) Колку пари платил Марко?

б) Ако Павел располага со монети од 50, 20, 5 и 1 евроцент, но со нив не може да ги плати работите што ги купил без продавачот да му врати кусур, колку најмногу пари може да има Павел?

Решение. а) Нека x, y и z се цените на пенкалото, моливот и гумата, соодветно. Шана и Павел платиле еднакви суми пари, што значи дека $x + y + z = 2x + z$, т.е. $x = y$. Марко платил 80 евроценти повеќе од Шана, па затоа $2y + 3z = 2x + z + 80$ и како $x = y$ добиваме $2z = 80$, т.е. $z = 40$, т.е. гумата чини 40 евроценти. Сега гумата е 10 евроценти поскапа од моливот, па затоа $x = y = 40 - 10 = 30$, што значи дека пенкалото и моливот чинат по 30 евроценти.

б) Павел купил гума, молив и пенкало, што значи дека тој платил $40 + 30 + 30 = 100$ евроценти. Павел има една монета од 50 евроценти, бидејќи ако има повеќе монети од 50 евроценти, со 2 од нив ќе плати без продавачот да му враќа кусур. Монетите од 20 евроценти се четири, бидејќи ако се повеќе, тогаш со 5 од нив ќе ја плати набавката без продавачот да му враќа кусур. Тој има една монета од 5 евроценти, бидејќи ако се повеќе тогаш од $50 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 100$ следува дека набавката може да се плати без кусур, а ако има повеќе од една монета од 5 евроценти, тогаш ќе има само една монета од 20 евроценти и може да има најмногу 5 монети од 5 евроценти. Јасно, монети од 1 евроцент се најмногу 4. Според тоа, Павел може да има најмногу

$$1 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 99 \text{ или } 1 \cdot 50 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 139$$

евроценти. Во првиот случај тој не може да ја плати набавката, што значи дека Павел може најмногу да има 139 евроценти.

III.3. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

73. На една работа работи група од 9 работници и според планот работата треба да ја завршат за 46 дена. По 6 дена од почетокот на работата менаџерот одлучил да го забрза завршувањето на работата и затоа почнувајќи од седмиот ден во работата биле вклучени уште 6 работници. За колку дена е завршена целата работа?

Решение. По првите 6 дена 9 работници требало да работат уште 40 дена, што значи за завршување на работата биле потребни сште

$9 \cdot 40 = 360$ работни дена. Но, по седмиот ден имаме 6 работници повеќе, т.е. вкупно $9 + 6 = 15$ работници и тие работата ќе ја довршат за $360 : 15 = 24$ дена. Значи, целата работа ќе биде завршена за $6 + 24 = 30$ дена.

74. Триесет сидари сидаат еден сид за 28 дена. За да сидот биде завршен побрзо по 10 дена се вработени уште 6 сидари. За колку дена е изсидан целиот сид, ако секој сидар работи со иста брзина?

Решение. Остатокот од работата која 30 сидари ќе го завршат за 18 дена, еден сидар го завршува за $30 \cdot 18 = 540$ дена. Истата оваа работа $30 + 6 = 36$ сидари ќе ја завршат за $540 : 36 = 15$ дена. Конечно, сидот ќе биде изсидан за $10 + 15 = 25$ дена.

75. Еден базен може да се полни од две цевки и да се празни од една цевка. Од првата цевка базенот се полни за 6 часа, а од втората за 8 часа. Полн базен од одводната цевка се празни за 4 часа. Истовремено се отворени вентилите на сите три цевки. Колкав дел од базенот ќе биде полн по 2 часа.

Решение. За 1 час првата цевка полни $\frac{1}{6}$ од базенот, втората полни $\frac{1}{8}$ од базенот и третата празни $\frac{1}{4}$ од базенот. Според тоа, по 2 часа ќе биде полна $2 \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$ од базенот.

76. Ласко и Ратко завршуваат една работа за 495 часа, Ласко и Жарко ја завршуваат истата работа за 440 часа, а Ратко и Жарко за 792 часа. За колку часови оваа работа ќе биде завршена ако сите тројца заедно работат?

Решение. Ласко и Ратко за 1 час завршуваат $\frac{1}{495}$ дел од работата, Ласко и Жарко за 1 час завршуваат $\frac{1}{440}$ дел од работата и Ратко и Жарко за 1 час завршуваат $\frac{1}{792}$ дел од работата. Тројцата заедно за 1 час ќе завршат $(\frac{1}{495} + \frac{1}{440} + \frac{1}{792}) : 2 = \frac{8+9+5}{11 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} : 2 = \frac{1}{360}$ дел од работата, што значи дека целата работа ќе ја завршат за 360 часа.

77. Иван може една работа да ја заврши за 18 дена. Ако на истата работа со него заедно работи и Лазар, тогаш работата ќе биде завршена за 12 дена. Колку денови му се потребни на Лазар сам да ја заврши оваа работа?

Решение. Иван сам целата работа ја завршува за 18 дена, што значи дека за еден ден сам завршува $\frac{1}{18}$ од работата. Аналогно Иван и Лазар за еден ден заедно завршуваат $\frac{1}{12}$ од работата. Според тоа, Лазар за еден ден сам завршува $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$ од работата. Конечно, Лазар сам ќе ја заврши работата за 36 дена.

78. Базен за вода може да се полни со помош на три славини. Првата славина сама го полни базенот за 8 часа, втората сама го полни за 10 часа, а третата сама го полни за 12 часа. Докажи дека ако сите три славини истовремено се пуштата да го полнат базенот, тогаш за 1 час ќе се наполни повеќе од четвртина, а помалку од третина од базенот.

Решение. За еден час првата славина полни $\frac{1}{8}$ од базенот, втората $\frac{1}{10}$ и третата $\frac{1}{12}$ од базенот. Според тоа, за 1 час ќе се наполни $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{37}{120}$ од базенот. Сега тврдењето на задачата следува од неравенствата

$$\frac{1}{4} = \frac{30}{120} < \frac{37}{120} < \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

79. Киро една работа ја завршува за 12 дена, Стојан истата работа ја завршува за 15 дена, а Марко оваа работа ја завршува за 20 дена. Колкав дел од работата ќе остане незавршен ако на оваа работа сите тројца заедно работат 4 дена?

Решение. Киро за 1 ден завршува $\frac{1}{12}$ од работата, Стојан за 1 ден завршува $\frac{1}{15}$ од работата и Марко за 1 ден завршува $\frac{1}{20}$ од работата. Ако сите тројца 4 дена заедно работат на оваа работа, тогаш тие ќе завршат $4 \cdot (\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}) = \frac{4}{5}$ од работата. Според тоа, незавршена ќе остане $\frac{1}{5}$ од работата.

80. Еден човек може да испие буре пиво за 21 ден. Човекот и неговата сопруга истото буре пиво може да го испијат за 14 дена. Колку дена и се потребни на сопругата за сама да го испие бурето пиво?

Решение. Човекот за еден ден пие $\frac{1}{21}$ од пивото, а заедно со сопругата за еден ден пијат $\frac{1}{14}$ од пивото. Според тоа, сопругата за еден ден

пие $\frac{1}{14} - \frac{1}{21} = \frac{1}{42}$ од пивото, што значи дека целото пиво мже да го испие за 42 дена.

81. Семејството на Тина се состои од нејзините мајка, татко, брат и Тина. Тина ги собрала годините на сите од семејството и тој збир е 88. Колку години се потребни да поминат за да збирот на годините на членовите на нејзиното семејство биде 100?

Решение. Бидејќи семејството на Тина е четиричлено (вклучувајќи ја и неа), за секоја помината година, збирот на годините на нејзиното семејство ќе се зголеми за 4. Значи за да збирот на нивните години биде 100, потребно е да поминат $(100 - 88) : 4 = 12 : 4 = 3$ години.

82. Кога синот имал 8 години, таткото имал 31 година. Сега таткото е двапати постар од синот. Колку години има синот?

Решение. Со x да ги означиме годините до моментот кога таткото ќе биде двапати постар од синот. Тогаш синот ќе има $x + 8$ години, а таткото ќе има $31 + x$ години. Значи, $31 + x = 2(x + 8)$, од каде добиваме $x = 15$. Значи, по 15 години таткото ќе биде двапати постар од синот, а синот тогаш, односно денес ќе има $8 + 15 = 23$ години.

83. Таткото е постар од синот 24 години и по 5 години таткото ќе биде четири пати постар од синот. Определи ги годините на таткото и синот.

Решение. Нека годините на синот ги означиме со x . Тогаш таткото има $x + 24$ години. По 5 години синот и таткото ќе имаат $x + 5$ и $x + 29$ години и таткото ќе биде четири пати постар од синот. Затоа $4(x + 5) = x + 29$, од каде добиваме $x = 3$. Според тоа, синот има 3 години, а таткото има $24 + 3 = 27$ години.

84. Група ученици засадило 6006 садници багрем, даб и бор така што на секоја багремова садница имало 26 дабови и 12 борови садници. Колку работни часови имал групата, ако за засадување на багремова садница се потребни 15, за дабова 18 и за борова 20 минути?

Решение. Бидејќи на секоја багремова садница има 26 дабови и 12 борови садници имаме групи од по $1 + 26 + 12 = 39$ садници. Според тоа, групата засадила $6006 : 39 = 154$ багремови, $154 \cdot 26 = 4004$ дабови и $154 \cdot 12 = 1848$ борови садници. Групата вкупно работела

$$154 \cdot 15 + 4004 \cdot 18 + 1848 \cdot 20 = 111342 \text{ min} = 1855 \text{ h } 42 \text{ min} .$$

85. Елена имала 28 години кога го родила синот Горјан. Колку години ќе има Елена во 2026 година, ако во 2016 година Горјан бил четири и пол пати помлад од Елена?

Решение. Нека во 2016 година Горјан има x години. Тогаш во 2016 година Елена има $4,5x$, па затоа $4,5x - x = 28$, од каде следува $x = 8$. Значи, Горјан во 2016 година имал 8 години. Според тоа, Горјан во 2026 година ќе има 18 години, а Елена ќе има $18 + 28 = 46$ години.

86. Дедо Ристо сега има 62 години, неговиот син Самоил има 35 години, а внукот Горјан има 5 години. По колку години збирот на годините на Самоил и Горјан ќе биде еднаков на годините на Ристо?

Решение. Нека со x го означиме бројот на годините по кои збирот на годините на Самоил и Горјан ќе биде еднаков на збирот на годините на Ристо, тогаш од условот на задачата следува

$$62 + x = 5 + x + 35 + x,$$

од каде добиваме $x = 21$.

87. Илина има три сина. Најстариот е три пати постар од најмладиот, а производот на годините на трите сина е 864. Колку години има секој син на Илина?

Решение. Со a да го означиме бројот на годините на најмалиот син, а со b бројот на годините на средниот по возраст син.на Илина. Најстариот син има $2a$ години, па затоа $a \cdot b \cdot 3a = 864$, т.е. $a \cdot a \cdot b = 288$. Според тоа, бројот 288 треба да го запишеме во видот $a \cdot a \cdot b$, при што треба да важи $a < b < 3a$. Го разложуваме 288 на прости множители:

$$288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Производи од видот $a \cdot a \cdot b$ се четири и тоа: $2 \cdot 2 \cdot 72$, $3 \cdot 3 \cdot 32$, $4 \cdot 4 \cdot 18$ и $6 \cdot 6 \cdot 8$. Само во последниот случај е исполнето неравенството $a < b < 3a$, па затоа синовите на Илина имаат 6, 8 и 18 години.

88. Три гуски за три дена несат три јајца. Колку јајца ќе снесат 9 гуски за 12 дена?

Решение. Ако 3 гуски за 3 дена несат 3 јајца, тогаш 9 гуски за 3 дена несат 3 пати повеќе јајца, т.е. 9 јајца. Понатаму, 9 гуски за 12 дена несат 4 пати повеќе јајца отколку 9 гуски за 3 дена, т.е. несат $4 \cdot 9 = 36$ јајца.

III.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

89. Две тела се движат истовремено во ист правец и во иста насока, но едното од нив на стартот било 5 m поблиску до целта и се движи со константна брзина од 3 m во секунда. Второто тело се движи со постојана брзина од 5 m во секунда. После колку секунди второто тело ќе го стигне првото и колкав пат ќе помине до моментот на стигнување?

Решение. Второто тело се движи со брзина од 5 метри во секунда и секоја секунда го намалува растојанието за 2 m , па затоа по 2,5 секунди ќе го стигне првото тело. За тоа време второто тело ќе помине пат од $5 \cdot 2,5 = 12,5\text{ m}$.

90. Периметарот на предното тркало на велосипедот на Горјан изнесува 3 m , а на задното тркало 4 m . Колкав пат поминал Горјан ако предното тркало направило 752 завртувања повеќе од задното?

Решение. Додека задното тркало се завртува 3 пати, предното тркало се завртува 4 пати. Тоа значи дека предното тркало на секое 4 завртувања прави едно завртување повеќе. Според тоа, предното тркало направило $4 \cdot 752 = 3008$ завртувања. Конечно, Горјан поминал пат од $3008 \cdot 3 = 9024\text{ m}$.

91. На картата растојанието меѓу местата A и B е еднакво на 4 cm . Определи го во километри растојанието меѓу A и B , ако на 1 mm на картата соодветствуваат 3000 m во природата.

Решение. *Прв начин.* Имаме $4\text{ cm} = 40\text{ mm}$ и како на 1 mm на картата соодветствуваат 3000 m во природата добиваме дека растојанието меѓу местата A и B е еднакво на $40 \cdot 3000\text{ m} = 120000 = 120\text{ km}$.

Втор начин. Бидејќи на 1 mm на картата соодветствуваат 3000 m во природата во природата, заклучуваме дека картата е нацртана во размер $1:3000000$. На картата растојанието меѓу местата A и B е еднакво на 4 cm , па затоа тоа во природата е еднакво на

$$4 \cdot 3000000\text{ cm} = 12000000\text{ cm} = 120000\text{ m} = 120\text{ km}.$$

92. Растојанието меѓу две места е 270 km . Два велосипедиста тргнуваат истовремено еден кон друг во пресрет. Секој велосипедист вози со

постојана брзи и тоа првиот вози со брзина 24 km/h , а вториот со брзина која е за една осмина помала од брзината на првиот велосипедист. Колку километри поминал секој од нив до средбата?

Решение. Вториот велосипедист вози со брзина $24 - \frac{1}{8} \cdot 24 = 21 \text{ km/h}$.

Во текот на 1 час велосипедистите заедно поминуваат $24 + 21 = 45 \text{ km}$, па затоа до средбата тие возеле $270 : 45 = 6$ часа. Конечно, до средбата првиот велосипедист поминал $6 \cdot 24 = 144 \text{ km}$, а вториот велосипедист поминал $6 \cdot 21 = 126 \text{ km}$.

93. Гумена топка која слободно паѓа, секој пат отскокнува од земјата до висина за $\frac{1}{4}$ помала од висината од која паднала. Пресметај од која висина е пуштена топката ако во третото отскокнување достигнала висина 432 cm . Која висина ќе ја достигне топката во петтото отскокнување?

Решение. При секое отскокнување топката достигнува $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ од висината од која паднала. Бидејќи 432 cm изнесува $\frac{3}{4}$ од висината која топката ја достигнала во второто отскокнување, добиваме дека во второто отскокнување топката се наоѓала на висина $432 \cdot \frac{4}{3} = 576 \text{ cm}$. На ист начин заклучуваме дека во првото отскокнување топката е на висина $576 \cdot \frac{4}{3} = 768 \text{ cm}$ и почетната висина е $768 \cdot \frac{4}{3} = 1024 \text{ cm}$. Висината на топката во петтото отскокнување е $(432 \cdot \frac{3}{4}) \cdot \frac{3}{4} = 243 \text{ cm}$.

94. Ангел со велосипед патува од местото A до местото B . Кога поминал четвртина од патот и уште 5 km , до крајот на патот му останале третина од патот и уште 10 km . Колку е долг патот од A до B ?

Решение. Должината на целиот пат изнесува $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ од патот и уште $5 + 10 = 15 \text{ km}$. Според тоа, $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ од патот изнесува 15 km , па затоа $\frac{1}{12}$ од патот изнесува 3 km . Конечно, патот од A до B е долг $3 \cdot 12 = 36 \text{ km}$.

95. Од местата A и B истовремено тргнале еден кон друг двајца велосипедисти. Првиот вози со брзина 13 km на час, а вториот со брзина

15,5 km на час. Велосипедистите се сретнале на 5 km од средината на патот меѓу местата A и B . Определи ја должината на патот од A до B .

Решение. Вториот велосипедист до местото на средбата поминал 5 km повеќе од половината од патот, што значи дека тој поминал 10 km повеќе од првиот велосипедист. Но, вториот велосипедист за 1 час поминува $15,5 - 13 = 2,5$ km повеќе од првиот, па затоа до средбата изминале $10 : 2,5 = 4$ часа. За тоа време првиот велосипедист поминал $4 \cdot 13 = 52$ km, а вториот поминал $4 \cdot 15,5 = 62$ km. Конечно, патот меѓу местата A и B е долг $52 + 62 = 114$ km.

96. Турист планирал патот меѓу местата A и B да го помине за три дена. Првиот ден поминал половина од патот, вториот ден половина од остатокот, а третиот ден ги поминал преостанатите 40 km. Определи го растојанието меѓу местата A и B .

Решение. Туристот првиот ден поминал $\frac{1}{2}$ од патот, вториот ден поминал $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ од патот, што значи дека му преостанале $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ од патот. Оваа $\frac{1}{4}$ од патот е еднаква на 40 km, што значи дека целиот пат е еднаков на $4 \cdot 40 = 160$ km.

97. Турист предвидениот пат го поминал за четири дена. Првиот ден поминал $\frac{1}{3}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{1}{5}$ од целиот пат и третиот ден туристот поминал 68 km. Туристот првите три дена поминал шест пати повеќе пат од остатокот на патот. Колку бил долг патот кој што туристот планирал да го помине?

Решение. Со x да го означиме патот кој што туристот планирал да го помине. Првите три дена туристот поминал

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 68 = \frac{8}{15}x + 68$$

од патот и му останало

$$x - (\frac{8}{15}x + 68) = \frac{7}{15}x - 68$$

од патот. Според тоа,

$$\frac{8}{15}x + 68 = 6(\frac{7}{15}x - 68),$$

од каде добиваме $x = 210$ km.

98. Атанас за три дена со автомобил го поминал патот меѓу градовите A и B . Првиот ден поминал $\frac{3}{8}$ од целиот пат, вториот ден поминал $\frac{5}{12}$ од целиот пат и третиот ден поминал $\frac{1}{6}$ од целиот пат и уште 45 km .

Колку е долг патот од A до B ?

Решение. Нека должината на патот е x . Од условот на задачата ја добиваме равенката $\frac{3}{8}x + \frac{5}{12}x + \frac{1}{6}x + 45 = x$. Решението на последната равенка е $x = 1080 \text{ km}$, што значи дека должината на патот меѓу A и B е 1080 km .

99. Воз за 14 часа треба да помине пат долг 630 km . Откако поминал $\frac{2}{3}$ од патот, непредвидено стоел на сигнал 1 час и 10 минути. Со која брзина треба да продолжи возот за да стигне на целта во предвиденото време?

Решение. Возот поминал $\frac{2}{3} \cdot 630 = 420 \text{ km}$ за $\frac{2}{3} \cdot 14$ часови. Му останало да помине $\frac{1}{3} \cdot 630 = 210 \text{ km}$ и ова растојание треба да го помине за $\frac{1}{3} \cdot 14 - 1\frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}$ часа. Според тоа, за да возот стигне на целта во предвиденото време тој треба да се движи со брзина $210 : 3\frac{1}{2} = 60 \text{ km/h}$.

100. Три автомобили истовремено тргнале од местото A во местото B . По извесно време првиот автомобил поминал $0,625$, вториот поминал $\frac{7}{9}$, а третиот поминал $\frac{4}{5}$ од растојанието меѓу овие две места. Определи го растојанието меѓу овие две места, ако автомобилот кој е најблиску до местото B во тој момент од местото B бил оддалечен 36 km .

Решение. Бидејќи $0,625 < \frac{7}{9} < \frac{4}{5}$ заклучуваме дека до местото B најблиску е третиот автомобил. Овој автомобил поминал $\frac{4}{5}$ од патот, што значи дека му останало да помине $\frac{1}{5}$ од патот, која според условот на задачата е еднаква на 36 km . Конечно, целиот пат е долг $5 \cdot 36 = 180 \text{ km}$.

101. Растојанието меѓу местата A и B е 300 km . Местата C и D се наоѓаат меѓу местата A и B така што растојанието меѓу B и C е три

пати поголемо од растојанието меѓу A и C . Растојанието меѓу местата B и D е четири пати поголемо од растојанието меѓу местата A и D . Колкаво е растојанието меѓу местата D и C на карта со размер 1:500000?

Решение. Бидејќи растојанието меѓу B и C е трипати поголемо



од растојанието меѓу A и C заклучуваме дека $\overline{AC} = 300 : 4 = 75 \text{ km}$. Бидејќи растојанието меѓу B и D е четири пати поголемо од растојанието меѓу местата A и D заклучуваме дека

$$\overline{AD} = 300 : 5 = 60 \text{ km}.$$

Според тоа, $\overline{CD} = 15 \text{ km}$. Картата е работена во размер 1:500000, па затоа 1 cm на картата претставува 5 km во природата, што значи дека на картата растојанието меѓу местата D и C е еднакво на 3 cm.

102. Градовите A и B се оддалечени еден од друг 590 km. Еден дел од патот е нагорница, другиот е хоризонтален, а третиот е надолница. Нагорницата е четири пати пократка од хоризонталниот дел и за 110 km е пократка од надолницата. Определи ја должината на секој дел од патот.

Решение. Нека нагорницата е долга $x \text{ km}$. Тогаш должината на хоризонталниот дел е $4x \text{ km}$, а должината на надолницата е $(x + 110) \text{ km}$. Затоа $x + 4x + x + 110 = 590$, од каде добиваме $x = 80 \text{ km}$. Конечно, нагорницата е долга 80 km, хоризонталниот дел од патот е долг 320 km и надолницата е долга 190 km.

103. Мотоциклист тргнал од местото A во местото B , во кое планирал да стигне за определено време. Ако вози со брзина 35 km/h тој ќе патува 2 часа повеќе, а ако вози со брзина 50 km/h, тој ќе патува 1 час помалку. Определи ја должината на патот од местото A до местото B , како и времето за кое мотоциклистот планирал да патува.

Решение. Нека x е времето изразено во часови за кое мотоциклистот планирал да патува од A до B . Ако мотоциклистот вози со брзина 35 km/h, тој за предвидениот пат ќе потроши $x + 2$ часа, а ако вози со брзина 50 km/h, тој за предвидениот пат ќе потроши $x - 1$ час.

Затоа $35(x+2)=50(x-1)$ од каде добиваме $x=8$ часа. Патот од A до B е долг $35 \cdot 10 = 350 \text{ km}$.

104. Еден патник првиот ден поминал $\frac{3}{8}$ од предвидениот пат, вториот ден поминал $\frac{5}{12}$ од предвидениот пат, а третиот ден поминал 45 km повеќе од $\frac{1}{6}$ од предвидениот пат и стигнал до целта. Колкава е должината на патот кој го поминал патникот?

Решение. *Прв начин.* Патникот првите два дена поминал $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{19}{24}$ од патот, што значи дека третиот ден поминал $\frac{5}{24}$ од патот. Бидејќи $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$, добиваме дека $\frac{1}{24}$ од патот е еднаква на 45 km , па затоа целиот пат е еднаков на $24 \cdot 45 = 1080 \text{ km}$.

Втор начин. Должината на патот да ја означиме со x . Тогаш од условот на задачата следува равенката

$$\frac{3x}{8} + \frac{5x}{12} + \frac{x}{6} + 45 = x,$$

од каде добиваме $x = 1080 \text{ km}$.

105. Експресен воз тргнал од местото A до местото B . По 8 часа возење поминатиот пат бил за 400 km подолг од преостанатиот пат. Ако возот ја зголеми брзината за 16 km/h , преостанатиот дел од патот ќе го помине за 4 часа. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B .

Решение. Со x да ја означиме брзината на возот на првиот дел од патот. Тогаш брзината на возот на вториот дел од патот ќе е $x+16$. Првиот дел од патот е за 400 km подолг, па затоа точна е равенката

$$8x - 4(x+16) = 400,$$

чие решение е $x = 116 \text{ km/h}$. Според тоа, должината на првиот дел од патот е еднаква на $8 \cdot 116 = 928 \text{ km}$, а должината на вториот дел од патот е еднаква на $4 \cdot 132 = 528 \text{ km}$. Должината на патот од A до B е еднаква на $928 + 528 = 1456 \text{ km}$.

106. Вкупната должина на три јажиња е 29 m . Ако од првото јаже се отсеке $\frac{1}{4}$ од неговата должина, од второто јаже се отсеке $\frac{1}{3}$ од

неговата должина и од третото јаже се отсеке $\frac{1}{2}$ од неговата должина, тогаш преостанатите делови ќе бидат со еднакви должини. Определи ги почетните должини на трите јажиња.

Решение. Нека почетните должини на јажињата се a, b и c , а должината по скратувањето е еднаква на x . Имаме $\frac{3}{4}a = \frac{2}{3}b = \frac{1}{2}c = x$, од каде добиваме $a = \frac{4}{3}x$, $b = \frac{3}{2}x$ и $c = 2x$. Значи, $\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}x + 2x = 29$, па затоа $x = 6\text{ m}$. Конечно, должините на јажињата се $a = 8\text{ m}$, $b = 9\text{ m}$ и $c = 12\text{ m}$.

107. При излегувањето од своето дувло верверицата донесува орев од ореовото стебло за 2 минути. Определи го растојанието од ореовото стебло до дувлото на верверицата, ако се знае дека верверицата без орев поминува 5 метри во секунда, а со орев поминува 3 метри во секунда. (За земањето на орев верверицата не губи време и таа по пат не застанува.)

Решение. Нека x е растојанието од стеблото до дувлото на верверицата, изразено во метри. Верверицата по орев оди за $\frac{x}{5}$ секунди, а со оревот се враќа за $\frac{x}{3}$ секунди. Во 2 минути имаме $2 \cdot 60 = 120$ секунди, па затоа $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 120$, од каде наоѓаме $x = 225\text{ m}$

108. Два трактора изорале парцела од 296 ha . Првиот дневно орал 10 ha , а вториот 12 ha . Последниот ден орал само првиот трактор. За колку дена е изорана парцелата?

Решение. Парцелата ќе биде изорана за $(296 - 10) : (10 + 12) + 1 = 14$ дена.

109. Фармерот Стојан изорал една земјишна парцела за три дена. Првиот ден Стојан изорал $\frac{3}{8}$ од парцелата, вториот ден изорал $\frac{3}{7}$ од остатокот, а третиот ден го изорал остатокот од парцелата. Третиот ден Стојан изорал 5 ha повеќе отколку вториот ден. Определи ја плоштината на парцелата. Колку хектари орал Стојан секој ден?

Решение. Вториот ден Стојан изорал $\frac{3}{7}(1 - \frac{3}{8}) = \frac{15}{56}$ од парцелата, а третиот ден тој изорал $1 - \frac{3}{8} - \frac{15}{56} = \frac{20}{56}$ од парцелата. Третиот ден се

изорани се изорани $\frac{20}{56} - \frac{15}{56} = \frac{5}{56}$ повеќе од вториот ден и тоа се 5 ha .

Според тоа, $\frac{1}{56}$ од парцелата е еднаква на 1 ha , па затоа плоштината на целата парцела е 56 ha , Стојан првиот ден изорал $\frac{3}{8} \cdot 56 = 21 \text{ ha}$, вториот ден изорал $\frac{15}{56} \cdot 56 = 15 \text{ ha}$ и третиот ден изорал $15 + 5 = 20 \text{ ha}$.

110. Карпа со должина на раб 10 m е исечена на еднакви коцки со должина на раб 1 dm . Потоа со редување една до друга на малите коцки е направена патека со ширина 1 m . Пешак се движи по патеката со брзина од 5 km на час. Колку време му е потребно на пешакот да ја помине патеката?

Решение. Од $10 \text{ m} = 100 \text{ dm}$, заклучуваме дека вкупно се исечени $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1000000$ коцки. Патеката е широка $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, што значи дека во еден ред ставаме по 10 коцки. Значи патеката има $1000000 : 10 = 100000$ реда, т.е. таа е долга $100000 \text{ dm} = 10 \text{ km}$. Бидејќи пешакот се движи со брзина 5 km на час, за да ја изоди патеката му се потребни $10 : 5 = 2$ часа.

111. Два базени со еднакви волумени се полни со вода и треба да се испразнат. Во исто време се отворени славините за истекување на водата од двата базени. Во текот на првиот час од првиот базен истекле 184 m^3 вода, а од вториот базен истекле 346 m^3 , па така во вториот базен останало четири пати помалку вода отколку во првиот базен. Определи го волуменот на базените.

Решение. Во текот на првиот час од вториот базен истекле $346 - 184 = 162 \text{ m}^3$ вода повеќе отколку од првиот базен. Преостанатото количество вода x во вториот базен е четири пати поголемо од преостанатото количество вода во вториот базен, т.е. во вториот базен останало $4x$ вода. Значи, $x + 162 = 4x$, односно $x = 54 \text{ m}^3$. Конечно, волуменот на секој од базените е еднаков на $346 + 54 = 400 \text{ m}^3$.

112. Во два сада има вода. Кога од првиот сад ќе се прелеат во вториот сад $3,75 \text{ l}$, тогаш во вториот сад ќе има $2,5 \text{ l}$ вода помалку отколку во првиот сад. На почетокот во првиот сад имало 20 l вода. Колку литри вода имало на почетокот во вториот сад?

Решение. Пред прелевањето во вториот сад имало $2,5 + 2 \cdot 3,75 = 10\text{ l}$ вода помалку отколку во првиот сад. Во првиот сад на почетокот имало 20 l , па значи во вториот сад на почетокот имало $20 - 10 = 10\text{ l}$ вода.

113. Во два сада вкупно има $78\frac{2}{3}\text{ l}$ вода. Ако од првиот сад се прелеат $5\frac{5}{6}\text{ l}$ вода во вториот сад, тогаш во вториот сад ќе има 8 l вода помалку отколку во првиот сад. Колку литри вода имало на почетокот во вториот сад?

Решение. По претурањето во вториот сад ќе има $(78\frac{2}{3} - 8) : 2 = 35\frac{1}{3}\text{ l}$ вода. Во вториот сад се дотурени $5\frac{5}{6}\text{ l}$ вода, па значи на почетокот во вториот сад имало $35\frac{1}{3} - 5\frac{5}{6} = 30\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = 29\frac{1}{2}\text{ l}$ вода.

114. Имаме две корпи со јаболка. Во првата корпа има 9 kg јаболка повеќе отколку во втората. Кога од првата корпа ќе се префрлат 12 kg јаболка, тогаш во втората корпа ќе има двапати повеќе јаболка отколку во првата корпа. Колку килограми јаболка имало на почетокот во секоја корпа?

Решение. Нека во првата корпа има $x\text{ kg}$ јаболка. Тогаш во втората корпа има $x - 9\text{ kg}$ јаболка. Од условот на задачата следува дека $2(x - 12) = x - 9 + 12$, од каде добиваме $x = 27\text{ kg}$. Значи, во првата корпа има 27 kg , а во втората корпа има 18 kg јаболка.

115. Во еден магацин има 120 исти големи и 40 исти мали конзерви, кои вкупно имаат маса од 108 kg . Масата на 3 големи конзерви е еднаква на масата на 8 мали конзерви. Определи ги масите на конзервите

Решение. Имаме 120 големи конзерви, а тоа се $120 : 3 = 40$ групи од по 3 големи конзерви. Бидејќи масата на 3 големи конзерви е еднаква на масата на 8 мали конзерви, заклучуваме дека масата на 120 големи конзерви е еднаква на масата на $40 \cdot 8 = 320$ мали конзерви. Значи, масата на една мала конзерва е еднаква на $108\text{ kg} : (40 + 320) = 300\text{ g}$, а масата на една голема конзерва е еднаква на $8 \cdot 300 : 3 = 800\text{ g}$.

116. Тројца рибари вкупно уловиле 135 kg риба. Првиот рибар продал 22 kg , вториот продал 9 kg , а третиот продал 14 kg , по што на секој

рибар му останало еднакво количество риба. Колку килограми риба уловил секој од рибарите?

Решение. Откако секој од рибарите продал дел од рибите вкупно останале $135 - 22 - 9 - 14 = 90 \text{ kg}$ риба. Значи, на секој рибар му останале по $90 : 3 = 30 \text{ kg}$ риба. Според тоа, првиот рибар уловил 52 kg , вториот рибар уловил 39 kg и третиот рибар уловил 44 kg риба.

117. Од својата овошна градина лешниците кои ги набрал Самоил ги ставал во вреќи кои собираат 45 kg и забележал дека му останале 31 kg лешници. Неговиот син Горјан пресметал дека ако лешниците се стават во еднаков број вреќи кои собираат 50 kg , тогаш во една вреќа ќе има само 21 kg лешници. Колку килограми лешници се набрани?

Решение. Кога се користат помалите вреќи преостануваат 31 kg лешници, а кога се користат големите вреќе недостасуваат 29 kg лешници. Разликата на лешниците која може да се стави во полни вреќе од 50 kg и полни вреќи од 45 kg е еднаква на $31 + 29 = 60 \text{ kg}$. Бидејќи разликата во една вреќа од двата вида е $50 - 45 = 5 \text{ kg}$ заклучуваме дека разликата од 60 kg се става во $60 : 5 = 12$ вреќи. Конечно, Самоил набрал $12 \cdot 45 + 31 = 571 \text{ kg}$ лешници.

118. Сад наполнет со вода тежи 1 kg . Ако се одлее $\frac{2}{7}$ од водата во садот, вкупната тежина ќе се намали за $\frac{1}{4} \text{ kg}$. Определи ја тежината на празниот сад.

Решение. Бидејќи $\frac{2}{7}$ од водата е тешка $\frac{1}{4} \text{ kg}$, заклучуваме дека водата е тешка $\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4} \text{ kg} = \frac{7}{8} \text{ kg}$. Конечно, празниот сад е тежок $\frac{1}{8} \text{ kg} = 125 \text{ g}$.

119. Ако на едниот тас на вагата ставиме една цигла, а на другиот ставиме $\frac{3}{4}$ цигла и $\frac{3}{4} \text{ kg}$, тогаш вагата е во рамнотежа. Колкава е масата на една цигла?

Решение. Нека масата на една цигла е $x \text{ kg}$. Од условот на задачата следува $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, од каде добиваме $x = 3$. Значи, масата на една цигла е 3 kg .

120. Во една вреќа има 100 kg компири кои содржат 96% вода. По извесно време количеството на водата во компирит се намалило на 95%. Колку килограми компири има сега во вреќата?

Решение. Ако компирите содржат 96% вода, тогаш на останатите состојки отпаѓаат 4%, што значи од 100 kg на останатите состојки отпаѓаат 4 kg . Со стоењето количеството на останатите состојки не се менува, но сега овие 4 kg претставуваат 5% од компирите. Последното значи дека сега во вреќата има $\frac{4 \cdot 100}{5} = 80\text{ kg}$ компири.

121. При ископувањето на камениот јаглен е констатирано дека тој содржи 2% влага. Ископани се 2210 t камен јаглен. На стовариштето овој јаглен впил уште вода, па по извесно време содржел 15% влага. За колку тони се зголемила тежината на јагленот?

Решение. Сувата материја изнесува 98% од целокупната тежина, што значи $\frac{98 \cdot 2210}{100} = 2165,8\text{ t}$. Со стоењето сувата материја и нејзиното количество не се менуваат, па бидејќи по стоењето на стовариштето влагата во јагленот се зголемила на 15%, заклучуваме дека сувата материја претставува 85% од тежината. Според тоа, по стоењето тежината на јагленот е $\frac{2165,8 \cdot 100}{85} = 2548\text{ t}$. Конечно, тежината на јагленот се зголемила за $2548 - 2210 = 338\text{ t}$.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

122. На две полица има вкупно 90 книги. Ако шест книги се преместат од првата на втората полица, тогаш на првата полица ќе има двапати повеќе книги отколку на втората полица. Колку книги има на секоја полица?

Решение. Вкупниот број книги по преместувањето е еднаков на вкупниот број книги пред преместувањето. Бидејќи по преместувањето на првата полица има два пати повеќе книги отколку на втората полица, а има вкупно 90 книги, заклучуваме дека на втората полица има $90 : 3 = 30$ книги. Значи, на првата полица има $2 \cdot 30 = 60$ книги. Според тоа, пред преместувањето на првата полица имало $60 + 6 = 66$ книги, а на втората полица имало $30 - 6 = 24$ книги.

123. Секој ученик од едно одделение учествува во една од секциите: литературна, драмска и математичка. Познато е дека во секоја од овие секции членува ист број ученици од ова одделение. Освен тоа бројот на учениците кои членуваат во сите три секции е еднаков на бројот на учениците кои членуваат точно во две секции и е еднаков на бројот на учениците кои членуваат само во една секција. Бројот на учениците во ова одделение е поголем од 30 и е помал од 35. Колку ученици учат во ова одделение?

Решение. Бидејќи бројот на учениците кои членуваат во сите три секции е еднаков на бројот на учениците кои членуваат точно во две секции и е еднаков на бројот на учениците кои членуваат само во една секција, заклучуваме дека бројот на учениците е делив со 3. Единствен број кој е поголем од 30 и е помал од 35, а е делив со 3 е бројот 33. Значи, во одделението учат 33 ученици.

124. Во три корпи вкупно има 141 јаболко. Ако од првата корпа се преместат 5 јаболка во втората и 11 јаболка во третата, тогаш во сите три корпи ќе има еднаков број јаболка. Колку јаболка имало во секоја корпа на почетокот?

Решение. По преместувањето во секоја корпа ќе има по $141:3=47$ јаболка. На почетокот во првата корпа имало $47+5+11=63$ јаболка, во втората $47-5=42$ јаболка и во третата $47-11=36$ јаболка.

125. Во една кутија има 15 црни, бели и црвени топчиња, од секоја боја најмалку по едно топче. Бројот на црвените топчиња е седум пати помал од бројот на белите топчиња. По колку топчиња има во кутијата од секоја боја?

Решение. Бројот на црвените топчиња не може да биде поголем од 1, бидејќи во тој случај вкупниот број на топчиња ќе биде поголем од $2+7\cdot 2=16>15$. Значи, во кутијата има 1 црвено, 7 бели и 7 црни топчиња.

126. Во три есенски дена температурата се движела вака: од 6 часот наутро, па во текот на денот температурата се зголемува двојно, а преку ноќта до 6 часот наутро опаѓа за 8°C . Колку изнесувала температурата првиот ден во 6 часот наутро, ако третиот ден во 6 часот наутро таа изнесувала 0°C .

Решение. Вториот ден вечерта температурата изнесувала $0+8=8^{\circ}\text{C}$, што значи дека вториот ден во 6 часот наутро температурата изне-

сувала $8:2=4^{\circ}\text{C}$. Според тоа, првиот ден навечер температурата изнесувала $4+8=12^{\circ}\text{C}$, што значи дека првиот ден во 6 часот температурата изнесувала $12:2=6^{\circ}\text{C}$.

127. Должината на чекорот на Самоил е 75 cm , а должината на чекорот на неговиот син Горјан е 45 cm . Колку чекори треба да направи Горјан за да го помине истиот пат кој Самоил го поминува со 900 чекори.

Решение. Со 900 чекори Самоил поминува $900 \cdot 75 = 67500\text{ cm}$. За да помине 67500 cm Горјан треба да направи $67500:45 = 1500$ чекори.

128. Во училишната трпезарија се наоѓаат определен број маси. Некои маси имаат по 3, а некои по 4 ногарки. Освен тоа, околу секоја маса има по четири столици и секоја столица има по 4 ногарки. Сите столици вкупно имаат 176 ногарки, а сите маси вкупно имаат 39 ногарки. Колку маси имаат по 3, а колку по 4 ногарки?

Решение. Во трпезаријата има $176:4 = 44$ столици. Бидејќи околу секоја маса има по 4 столици, во трпезаријата има $44:4 = 11$ маси. Ако сите маси имаат по 3 ногарки, тогаш масите вкупно ќе имаат $3 \cdot 11 = 33$ ногарки, т.е. $39 - 33 = 6$ ногарки помалку. Бидејќи маса со 4 ногарки има 1 ногарка повеќе од маса со 3 ногарки, во трпезаријата има $6:1 = 6$ маси со 4 ногарки. Конечно, бројот на масите со 3 ногарки е $11 - 6 = 5$.

129. Во една продавница има 800 тетратки и таа работи од понеделник до петок. Во една седмица биле продадени сите тетратки така што во секој ден биле продадени по 40 тетратки повеќе од претходниот ден. По колку тетратки биле продадени секој ден од таа недела?

Решение. Нека во понеделник биле продадени x тетратки. Тогаш, во вторник биле продадени $x + 40$ тетратки, во среда $x + 80$, во четврток $x + 120$ и во петок $x + 160$ тетратки. Биле продадени сите тетратки, па затоа

$$x + x + 40 + x + 80 + x + 120 + x + 160 = 800.$$

Оттука, следува $5x + 400 = 800$, односно $x = 80$. Значи, во понеделник биле продадени 80 тетратки, во вторник 120, во среда 160, во четврток 200 и во петок 240 тетратки.

130. Учениците од едно училиште тргнале на екскурзија. Сообраќајното претпријатие за превоз на учениците испратило определен број авто-

буси. Ако во секој автобус се сместат по 40 ученици, тогаш ќе недостасуваат 5 автобуси, а ако во секој автобус се сместат по 50 ученици, тогаш два автобуси ќе останат празни. Колку ученици тргнале на екскурзија и колку автобуси испратило сообраќајното претпријатие?

Решение. Ако во секој автобус седнат по 40 ученици, ќе недостасуваат 5 автобуси, што значи дека $40 \cdot 5 = 200$ ученици не се сместени. Ако во секој автобус седнат по 50 ученици, тогаш ќе останат 2 автобуси празни, што значи дека во автобусите ќе има $50 \cdot 2 = 100$ места повеќе отколку што е потребно. Ова значи дека кога секој автобус примил по 10 ученици повеќе капацитетот се зголемува за $200 + 100 = 300$ од што следува дека претпријатието испратило $300 : 10 = 30$ автобуси. Конечно, на екскурзијата тргнале $30 \cdot 40 + 200 = 1400$ ученици.

131. Зајакот се наоѓа на 60 свои скокови пред кучето, кое го пристигнува. Додека зајакот прави 9 скока, кучето прави 6 скока, но 4 скока на кучето се еднакви на 7 скока на зајакот. Колку скока треба да направи кучето за да го стигне зајакот?

Решение. Додека зајакот прави 18 скока, кучето прави 12 скока. Но, кучето со своите 12 скока минува пат кој е еднаков на патот што зајакот го минува со своите 21 скок. Тоа значи, дека со секои 12 свои скока кучето се приближува до зајакот за 3 скока на зајакот. За да кучето надополни 60 скока на зајакот треба да направи $60 : 3 = 20$ групи од по свои 12 скока. Значи, за да го стигне зајакот, кучето треба да направи $20 \cdot 12 = 240$ скока.

132. Алекса отпил $\frac{1}{6}$ од полна чаша црно кафе и чашата ја дополнител со млеко, правејќи бело кафе. Потоа отпил $\frac{1}{3}$ од белото кафе и чашата ја дополнител со млеко, а потоа отпил $\frac{1}{2}$ од белото кафе и чашата ја дополнител со млеко. На крајот Алекса го испил последното добиено бело кафе. Што испил повеќе Алекса, кафе или млеко.

Решение. Јасно Алекса испил 1 чаша кафе. Понатаму, во трите дополнувања Алекса турил $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$, т.е. цела чаша млеко. Значи, тој испил 1 чаша кафе и 1 чаша млеко, т.е. испил исто количество кафе и млеко.

133. Компанија за производство на чевли, од вкупното месечно производство, произведува $\frac{3}{8}$ парови женски чевли, $\frac{1}{4}$ парови машки чевли

и 6000 парови детски чевли. Определи го месечното производство на оваа компанија.

Решение. Од вкупното производство на компанијата $1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ се детски парови чевли, што изнесува 6000 парови. Според тоа, $\frac{1}{8}$ од вкупното производство изнесува $6000 : 3 = 2000$ парови чевли, па затоа вкупното производство е $2000 \cdot 8 = 16000$ парови чевли.

134. Горјан прочитал една книга за три дена. Првиот ден прочитал $\frac{3}{8}$ од книгата, вториот ден прочитал $\frac{5}{12}$ од книгата, а третиот ден прочитал $\frac{1}{6}$ од книгата и уште 10 страници. Колку страници имала книгата?

Решение. Горјан за три дена прочитал $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{9+10+4}{24} = \frac{23}{24}$ делови од книгата и уште 10 страници, со што ја прочитал целата книга. Значи, $1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$ делови од книгата се 10 страници, па затоа книгата имала $24 \cdot 10 = 240$ страници.

135. Матеј прочитал една книга за 3 дена. Првиот ден прочитал $\frac{1}{5}$ од целата книга и уште 16 страници, вториот ден прочитал $\frac{3}{10}$ од остатокот и уште 20 страници, а третиот ден прочитал $\frac{3}{4}$ од новиот остаток и последните 30 страници. Колку страници имала книгата?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи едназада-нанапред. Последните 30 страници претставуваат $\frac{1}{4}$ од бројот на страниците кои на Матеј му останале по вториот ден. Значи, по вториот ден Матеј прочитал $4 \cdot 30 = 120$ страници. Понатаму, $120 + 20 = 140$ претставува $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ од бројот на страниците кои на Матеј му останале по првиот ден, што значи дека по првиот ден му останале $140 \cdot \frac{10}{7} = 200$ страници. Конечно, $200 + 16 = 216$ претставува $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ од вкупниот број страници на книгата, што значи дека книгата имала $216 \cdot \frac{5}{4} = 270$ страници.

136. Горјан читал книга. Тој првиот ден прочитал $\frac{3}{8}$ од книгата, а вториот ден прочитал $\frac{1}{5}$ од книгата, со што во текот на двата дена прочитал 12 страници повеќе од половината книга. Колку страници имала книгата?

Решение. Нека книгата имала x страници. Од условот на задачата ја добиваме равенката $\frac{3}{8}x + \frac{1}{5}x = \frac{1}{2}x + 12$, од каде добиваме $\frac{3}{40}x = 12$, т.е. $x = 160$. Според тоа, книгата имала 160 страници.

137. На една училишна прослава присуствувале ученици, наставници и родители. На прославата имало 16 ученици и 4 наставници, а $\frac{5}{12}$ од присутните биле татковци и $\frac{1}{4}$ од присутните биле мајки. Колку луѓе присуствувале на прославата?

Решение. Татковците и мајките претставуваат $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ од присутните на прославата. Според тоа, $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ од присутните се ученици и наставници. На прославата присуствувале $16 + 4 = 20$ ученици и наставници, што значи дека вкупно присуствувале $3 \cdot 20 = 60$ луѓе.

138. Наставникот Илија на општинскиот натпревар по математика довел 40 свои ученици. Еден од членовите на комисијата го праша: „На колку ученици им предаваш, кога толку многу учебици си довел на наторевар?“ Илија одговорил: „Доведов две третини од третина од вкупниот број ученици на кој им предавам. Пресметај!“ Определи го бројот на учениците на кои им предава наставникот Илија?

Решение. Нека Илија предава на x ученици. Бидејќи 40 ученици се $\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{3}$ од вкупниот број ученици на кои Илија им предава добиваме $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}x = 40$, од каде наоѓаме $x = 180$. Значи, Илија предава на 180 ученици.

139. Во едно училиште има 760 ученици и наставници. Бројот на момчињата е осум пати поголем од бројот на наставниците, а бројот на девојчињата спрема бројот на момчињата се однесува како 5:4. Колку наставници има во ова училиште, а колку момчиња и колку девојчиња?

Решение. На еден наставник има 8 момчиња, а бидејќи на 4 момчиња има 5 девојчиња, заклучуваме дека на 8 момчиња има 10 девојчиња. Последното значи дека имаме групи од 1 наставник, 8 момчиња и 10 девојчиња, т.е. групи од 19 лица. Вакви групи има $760 : 19 = 40$, што значи дека во училиштето има 40 наставници, 320 момчиња и 400 девојчиња.

140. Група ученици решиле да одат на излет. Од нив 25% биле девојчиња. Меѓутоа, едно девојче се откажало и наместо неа отишол нејзиниот брат, па така на излетот имало 20% девојчиња. Колку момчиња и колку девојчиња имало на излетот?

Решение. Едно девојче претставува $25 - 20 = 5\%$ од вкупниот број излетници. Според тоа, на излетот имало $100 : 5 = 20$ ученици. Од тоа 20%, односно 4 биле девојчиња, а $20 - 4 = 16$ биле момчиња.

141. Мајката месила колачи за своите деца: Кате, Маја и Владо. Требало секој да добие еднаков број колачи. Меѓутоа, Кате стигнала дома прва, зела третина од сите колачи и отишла да си игра, Потоа дошла Маја и мислејќи дека дошла прва, зела третина од преостанатите колачи и отишла да си игра. На крајот дошол Владо и зел третина од преостанатите колачи, по што останале 8 колачи. Колку колачи месила мајката?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Кога Владо зел третина од преостанатите колачи, останале 8 колачи, а тоа е $\frac{2}{3}$ од затекнатите колачи. Значи, Владо затекнал $\frac{3}{2} \cdot 8 = 12$ колачи. Слично, Маја затекнала $\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$ колачи, а Кате затекнала $\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$ колачи. Значи, мајката месила 27 колачи.

142. Марија, Кате и Јана купиле јајца, помалку од 100. Марија зела третина од јајцата, Кате зела третина од преостанатите јајца, Јана зела третина од преостанатите јајца и јајцата кои останале ги поделиле на три еднакви дела. Колку јајца вкупно купиле Марија, Кате и Јана и колку јајца добила секоја од нив?

Решение. Марија зела $\frac{1}{3}$ од вкупниот број јајца. Кате зела $\frac{1}{3}$ од преостанатите јајца, што е $\frac{2}{9}$ од вкупниот број јајца и Јана зела $\frac{1}{3}$ од преостанатите јајца, што е $\frac{1}{3}$ од $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ односно $\frac{4}{27}$ од вкупниот број јајца. Остатокот, т.е. $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$ од вкупниот број јајца го поделиле на три еднакви делови, па затоа вкупниот број јајца треба да е делив со $3 \cdot 27 = 81$. Единствен број помал од 100 кој е делив со 81 е бројот 81, што значи дека вкупно купиле 81 јајце. Сега, лесно се добива дека Марија зела 35 јајца, Кате зела 26 јајца и Јана зела 20 јајца.

143. Мајката купила чоколадни бомбони. Владимир изел $\frac{1}{3}$ од купените бомбони и уште 2 бомбони, Мајда изела $\frac{1}{4}$ од купените бомбони и уште 1 бомбона, а Катерина изела $\frac{1}{2}$ од бомбоните кои останале по Владимир и Мајда. Потоа останале само $\frac{1}{6}$ од почетното количество бомбони. Колку бомбони купила мајката?

Решение. Нека x е бројот на купените бомбони. Владимир изел $\frac{x}{3} + 2$ бомбона, Мајда изела $\frac{x}{4} + 1$ бомбон. По Катерина останале $\frac{x}{6}$ од бомбоните, па бидејќи таа изела половина од бомбоните кои останале по Владимир и Мајда заклучуваме дека по Владимир и Мајда останале $2 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{3}$ бомбони. Според тоа, $\frac{x}{3} + 2 + \frac{x}{4} + 1 + \frac{x}{3} = x$, од каде добиваме $x = 36$. Значи, мајката купила 36 бомбони.

144. Ана решавала математички задачи од понеделник до сабота. Таа вкупно решила 246 задачи и тоа така што секој следен ден решавала 4 задачи повеќе отколку што решила претдховниот ден. Колку задачи решила Ана во среда?

Решение. Ако Ана во понеделникот решила n задачи, тогаш таа во вторникот, средата, четвртокот, петокот и саботата решила $n + 4$, $n + 8$, $n + 12$, $n + 16$ и $n + 20$ задачи, соодветно. Тоа значи, дека $n + n + 4 + n + 8 + n + 12 + n + 16 + n + 20 = 246$, т.е. $6n + 60 = 246$, од каде добиваме $n = 31$. Значи, Ана во понеделникот решила 31 задача, а во средата таа решила $n + 8 = 39$ задачи.

145. На еден натпревар по математика 14 ученици ги решиле сите задачи, 32% од учениците решиле некои од задачите, а 12% од учениците не решиле ниту една задача. Колку ученици учествувале на овој натпревар?

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$100\% - (32\% + 12\%) = 56\%$$

ги решиле сите задачи. Според тоа, на натпреварот учествувале $\frac{14 \cdot 100}{56} = 25$ ученици.

146. Два работника работат иста работа. Првиот работник ја натфрлил нормата за 50%, а вториот за 20%.

а) Ако се земе дека норма е работата која ја завршил вториот работник, определи за колку проценти ја натфрлил нормата првиот работник.

б) Ако се земе дека норма е работата која ја завршил првиот работник, определи за колку проценти вториот работни ја потфрлил нормата.

Решение. Првиот работник сработил 150% или 1,5 норми, а вториот работник сработил 120% или 1,2 норми.

а) Ако нормата е работата која ја сработил вториот работник, тогаш првиот работник ја исполнил нормата со учинок $1,5:1,2=1,25$, што значи дека нормата ја натфрлил за 25%.

б) Во овој случај од $1,2:1,5=0,8$ заклучуваме дека вториот работник ја потфрлил нормата за 20%.

147. Буре се полни со вода со помош на една славина. Ако славината делимично се затвори, протокот на водата низ неа се намалува за 10%. За колку проценти се зголемува времето на полнење на бурето при вака намален проток на вода?

Решение. При делимичното затворање на славината имаме

$$100 - 10 = 90\% = \frac{9}{10}$$

од првобитниот проток на вода. Од $1:\frac{9}{10}=\frac{10}{9}$ следува дека времето на полнење на бурето е $\frac{10}{9}$ пати поголемо од првобитното време. Тоа значи дека времето на полнење на бурето се зголемува за $\frac{1}{9}$ во однос на првобитното време, односно за $\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}\%$.

148. При мрзнењето на водата волуменот се зголемува за $9\frac{1}{11}\%$. За колку проценти се намалува волуменот на парче мраз кога тоа ќе се стопи?

Решение. Ако на почетокот волуменот на водата е 100, тогаш волуменот на мразот е $109\frac{1}{11}=\frac{1200}{11}$. Од $100:\frac{1200}{11}=\frac{1100}{1200}=\frac{11}{12}$ следува дека

волуменот на мразот по топењето се намалува за $\frac{1}{12}$, односно за $\frac{1}{12}\cdot 100=8\frac{1}{3}\%$.

149. Ов вкупниот број ученици запишани во едно училиште на почетокот на учебната година 43% биле девојчиња. Во текот на учебната година од училиштето се опишале 14 девојчиња и 36 момчиња, па на крајот на учебната година 44% од вкупниот број ученици биле девојчиња.

Колку ученици биле запишани на почетокот на учебната година и колку момчиња имало во ова училиште на крајот на учебната година?

Решение. Со x да го означиме вкупниот број ученици на почетокот на учебната година. Значи, на почетокот бројот на девојчињата бил $0,43x$, а бројот на момчињата бил $0,57x$. На крајот на учебната година имало $0,57x - 36$ момчиња. Од друга страна, бројот на момчињата на крајот на учебната година бил $0,56(x - 14 - 36)$. Така ја добиваме равенката $0,57x - 36 = 0,56(x - 14 - 36)$, од каде наоѓаме $x = 800$. Според тоа, на почетокот на учебната година во училиштето имало 800 ученици. На крајот на учебната година во училиштето имало 750 ученици, од кои $\frac{56 \cdot 750}{100} = 420$ биле момчиња.

150. На примениот испит за упис во Математичкото училиште требало да се решат 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 4 бода, а за секоја нерешена или неточно решена задача се одземаат 3 бода. Горјан усвоил 28 бода. Колку задачи точно решил Горјан?

Решение. Нека со x го означиме бројот на точно решените задачи. Тогаш бројот на нерешените или неточно решените задачи е $20 - x$. Од условот на задачата ја добиваме равенката $4x - 3(20 - x) = 38$. Решението на последната равенка е $x = 14$, што значи дека Горјан точно решил 14 задачи.

151. За превоз на 528 ученици автопревозникот упатил автобуси со по 36 седишта и автобуси со по 24 седишта. Вкупниот број автобуси бил 18. Колку автобуси биле со по 36 седишта?

Решение. Нека x е бројот на автобусите со по 36 седишта. Тогаш бројот на автобусите со по 24 седишта е $18 - x$. Од условот на задачата ја добиваме равенката $36x + 24(18 - x) = 528$. Решението на последната равенка е $x = 8$, што значи дека автопревозникот испратил 8 автобуси со по 36 седишта и 10 автобуси со по 24 седишта.

152. Воз се состои од 11 вагони и во нив има 350 патници. Во било кои три последователни вагони, има вкупно 99 патници. Колку патници има во шестиот вагон?

Решение. Бидејќи во секои три последователни вагони има вкупно по 99 патници, заклучуваме дека почнувајќи од првиот вагон во еднаесетте вагони последователно има по $a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b$ патници. Според тоа, $a + b + c = 99$ и $4a + 4b + 3c = 350$. Ако првото равен-

ство го помножине со 4 и го одземеме второто равенство добиваме $c = 46$. Според тоа, во шестиот вагон има 46 патници.

153. Автобус на градски сообраќај тргнал од почетната станица со определен број патници. На првата станица се симнале $\frac{1}{9}$ од патниците, на втората станица бројот на патниците во автобусот се зголемил за $\frac{3}{4}$ од бројот на патниците кои во тој момент биле во автобусот, а на трета станица излегле $\frac{6}{7}$ од патниците кои со автобусот стигнале на станицата. Потоа во автобусот останале 16 патници. Колку патници имало во автобусот кога тој тргнал од почетната станица?

Решение. Нека на почетокот во автобусот имало x патници. На првата станица се симнале $\frac{1}{9}x$ патници, а останале $\frac{8}{9}x$ патници. Бројот на патниците кои тргнале од втората станица е еднаков на

$$\frac{8}{9}x + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}x = \frac{14}{9}x.$$

По третата станица бројот на патниците во автобусот е еднаков на $\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{9}x = \frac{2}{9}x$. Значи, $\frac{2}{9}x = 16$, од каде наоѓаме $x = 72$.

154. Од сите ученици на едно училиште 174 не отишле на излет, а останатите отпатувале во 18 исти автобуси, при што во секој автобус имало по 5 ученици повеќе отколку што бил бројот на седиштата во автобусот. Ако во секој автобус влегле онолку ученици колку што имало седишта во автобусот, тогаш ќе биле потребни уште 3 автобуси, но во еден од автобусите ќе останале 6 празни седишта. Колку ученици учеле во ова училиште?

Решение. Ако со x го означиме бројот на седиштата во еден автобус, тогаш од условот на задачата ја добиваме равенката $18(x + 5) = 21x - 6$ од каде наоѓаме $x = 32$. На излетот отшле $18 \cdot 37 = 666$ ученици, што значи дека во училиштето учеле $666 + 174 = 840$ ученици.

155. Во три скопски населби живеат вкупно 36000 жители. Колку жители има во секоја населба, ако е познато дека $\frac{2}{3}$ од бројот на жителите во првата населба е еднаков на 0,5 од бројот на жителите во втората населба и на $\frac{2}{5}$ од бројот на жителите во третата населба?

Решение. Со a, b и c да го означиме бројот на жителите во првата, втората и третата населба соодветно. Од условот на задачата следува

$\frac{2}{3}a = \frac{1}{2}b = \frac{2}{5}c$, односно $b = \frac{4}{3}a$ и $c = \frac{5}{3}a$. Но, $a + b + c = 36000$, па затоа $a + \frac{4}{3}a + \frac{5}{3}a = 36000$, од каде добиваме $a = 9000$. Конечно, во првата населба има 9000 жители, во втората 12000 жители и во третата 15000 жители.

156. Во еден овоштарник дрвјата се засадени по 20 во ред. Ако во овоштарникот биле засадени три реда помалки и во секој ред по 25 дрвја, тогаш во овоштарникот ќе имало 40 овошки повеќе. Колку редови дрвја биле засадени во овој овоштарник?

Решение. Со x да го означиме бројот на редовите во овоштарникот. Во него има $20x$ овошки. Ако се $x - 3$ реда со по 25 овошки, тогаш ќе бидат 40 овошки повеќе, па затоа $25(x - 3) - 20x = 40$, од каде добиваме $x = 23$. Значи, овоштарникот има 23 реда со по 20 овошки.

157. Климе поседува 10 чамци за изнајмување. Некои чамци имаат 6 седишта, а некои по 4 седишта. Вкупниот број седишта во чамците е еднаков на 46. Колку чамци се со по 6, а колку со по 4 седишта?

Решение. *Прв начин.* Ако сите чамци се со по 4 седишта, тогаш вкупниот број седишта ќе биде $10 \cdot 4 = 40$. Но, имаме $46 - 40 = 6$ седишта повеќе, што значи дека Климе поседува $6 : 2 = 3$ чамци со по 6 седишта и $10 - 3 = 7$ чамци со по 4 седишта.

Втор начин. Нека се x чамци со по 6 седишта. Тогаш $10 - x$ чамци се со по 4 седишта и затоа $6x + 4(10 - x) = 46$, од каде наоѓаме $x = 3$. Значи, Климе поседува 3 чамци со по 6 седишта и 7 чамци со по 4 седишта.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Колку елементи може да има множеството A ако $A \cup B$ има 9 елементи и $A \cap B$ има 3 елементи.

Решение. Од $A \subseteq A \cup B$ следува дека множеството A може да има најмногу 9 елементи, а од $A \cap B \subseteq A$ следува дека множеството A мора да има најмалку 3 елементи.

2. Дадени се множествата $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Запиши ги сите подредени парови (x, y) такви што $x \in A, y \in B$ и $x \leq y$.

Решение. Имаме, $(x, y) \in \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 4)\}$.

3. Определи ги сите елементи на множеството A ако

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 7, |x| > 2, x > -7\}.$$

Решение. Множеството A се состои од сите броеви кои се помали или еднакви на 7, чија апсолутна вредност е поголема од 2 и кои се поголеми од -7 . Според тоа, $A = \{-6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

4. Кои од следните тврдења се вистинити:

а) $\{100 - 50 : 2, 32 \cdot 16\} \not\subseteq \{8 \cdot 64, 25, (11 - 11) : 11\},$

б) $\{(6 - 6) : 1, (7 - 7) \cdot 1, 12 \cdot 12 \cdot (12 - 12)\} \subseteq \emptyset,$

в) $\{(111 - 11) : (28 - 3), 4\} \subseteq \{4\}.$

Решение. а) Имаме $\{75, 512\} \not\subseteq \{512, 25, 0\}$ и даденото тврдење е точно.

б) Имаме $\{0\} \subseteq \emptyset$ и даденото тврдење не е точно.

в) Имаме $\{4\} \subseteq \{4\}$ и даденото тврдење е точно.

5. Дадени се множествата $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -5, x \leq 1\}$ и $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}$. Определи го множеството

$$(A \cup B) \setminus (C \cap B).$$

Решение. Дадените множества се:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \text{ и } C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Според тоа, $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ и $C \cap B = \{-2, -1, 0, 1\}$, па затоа $(A \cup B) \setminus (C \cap B) = \{-4, -3, 2, 3\}$.

6. Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x - 1 \in A\}$, $C = \{x \mid x - 1 \in B\}$. Определи ги множествата $A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus A$.

Решение. Имаме, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, па затоа

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, B \cap C = \{3, 4\} \text{ и } C \setminus A = \{4, 5\}.$$

7. Дадени се множествата

$$A = \{1, 8, 9, 10\}, B = \{x \mid x - 3 \in A\} \text{ и } C = \{x \mid x + 2 \in B\}.$$

Определи ги множествата $A \cap B$, $(C \setminus A) \cup (A \setminus C)$. Докажи дека важи

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (A \cap C).$$

Решение. Множествата се

$$A = \{1, 8, 9, 10\}, B = \{4, 11, 12, 13\} \text{ и } C = \{2, 9, 10, 11\}.$$

Затоа,

$$A \cap B = \{1, 8, 9, 10\} \cap \{2, 8, 10, 11\} = \emptyset,$$

$$(C \setminus A) \cup (A \setminus C) = \{2, 11\} \cup \{1, 8\} = \{1, 2, 8, 11\},$$

$$(A \setminus B) \setminus C = \{1, 8, 9, 10\} \setminus \{2, 9, 10, 11\} = \{1, 8\}$$

$$A \setminus (A \cap C) = \{1, 8, 9, 10\} \setminus \{9, 10\} = \{1, 8\},$$

што значи дека $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (A \cap C)$.

8. Определи го множеството B , ако за множествата A, B и C важи

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\}, A \cap C = \emptyset, A \setminus B = \{e, m\} \text{ и}$$

$$C \setminus B = \{c, p\}.$$

Решение. Од $A \cap C = \emptyset$, $A \setminus B = \{e, m\}$ и $C \setminus B = \{c, p\}$ следува

$$(A \cup B \cup C) \setminus B = (A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B) = \{c, e, m, p\},$$

и како $B \subseteq A \cup B \cup C$ добиваме $B = \{a, b, d, n, q\}$.

9. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$. Определи го множеството X за кое важи $A \cup X = A$ и $B \cap X = A \setminus (A \setminus B)$.

Решение. Имаме $A \cup X = \{1, 2, 3\}$, па затоа $X \subseteq \{1, 2, 3\}$. Понатаму, од $B \cap X = \{3\}$ следува $3 \in X$. Според тоа, задачата има четири решенија и тоа: $X = \{3\}$, $X = \{1, 3\}$, $X = \{2, 3\}$ и $X = \{1, 2, 3\}$.

10. Дадени се множествата $A = \{a \mid a \in \mathbb{N}, a \leq 7\}$ и $B = \{b \mid b \in \mathbb{N}, 4 \leq b < 9\}$.

Определи го множеството C за кое важи

$$C = \{c \mid c \in \mathbb{N}, c = a - b, a \in A, b \in B\}.$$

Решение. Имаме, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Според тоа,

$$\{d \mid d = a - b, a \in A, b \in B\} = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

па затоа $C = \{c \mid c \in \mathbb{N}, c = a - b, a \in A, b \in B\} = \{1, 2, 3\}$.

11. Определи ги сите множества X за кои важи

$$X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 5\}.$$

Решение. Од $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 5\}$ следува дека $3 \notin X$ и $6 \notin X$ и $\{4, 5\} \subseteq X$. Сега, бидејќи $X \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заклучуваме дека X е било кое од множествата: $\{4, 5\}; \{2, 4, 5\}; \{4, 5, 7\}; \{4, 5, 8\}; \{2, 4, 5, 7\}; \{2, 4, 5, 8\}; \{4, 5, 7, 8\}$ и $\{2, 4, 5, 7, 8\}$.

12. Определи ги сите множества X за кои важи $\{1, 2, 5, 8\} \cup X = \{1, 2, 5, 8\}$.

Решение. Од равенството $\{1, 2, 5, 8\} \cup X = \{1, 2, 5, 8\}$ следува дека $X \subseteq \{1, 2, 5, 8\}$. Според тоа, X е било кое од множествата:

$$\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{5\}; \{8\}; \{1, 2\}; \{1, 5\}; \{1, 8\}; \{2, 5\}; \{2, 8\}; \\ \{5, 8\}; \{1, 2, 5\}; \{1, 2, 8\}; \{1, 5, 8\}; \{2, 5, 8\}; \{1, 2, 5, 8\}.$$

13. Определи го множеството P , ако за множествата M, N и P важи

$$M \cup N \cup P = \{1, 2, 3, 4, 5\}, M \cap N \cap P = \{1, 4\}, N \setminus P = \{2, 5\} \text{ и } P \setminus M \neq \emptyset.$$

Решение. Од $M \cap N \cap P = \{1, 4\}$ следува дека $1, 4 \in P$. Понатаму, од $N \setminus P = \{2, 5\}$ следува дека $2, 5 \notin P$. Заради $P \setminus M \neq \emptyset$ во множеството P мора да биде елементот 3 и $3 \notin M$. Конечно, $P = \{1, 3, 4\}$.

14. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. Определи го множеството X за кое се исполнети равенствата $A \cap X = \{3, 4\}$ и $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Решение. Од равенството $A \cap X = \{3, 4\}$ и $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ следува $\{3, 4\} \subseteq X$ и $1, 2, 5, 6, 8 \notin X$. Понатаму, од $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ следува дека $5, 7 \in X$ (нацртај Венов дијаграм). Според тоа, $X = \{3, 4, 5, 7\}$.

15. Определи го множеството C , ако за множествата A, B и C важи

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B \cap C = \{1, 4\}, \\ B \setminus C = \{2, 5, 6\} \text{ и } C \setminus A \neq \emptyset.$$

Решение. Од $A \cap B \cap C = \{1, 4\}$ следува дека $1, 4 \in C$. Понатаму, од $B \setminus C = \{2, 5, 6\}$ следува дека $2, 5, 6 \notin C$. Од друга страна имаме

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, па затоа $C = \{1, 4\}$ или $C = \{1, 3, 4\}$. Но, $1, 4 \in A$ и како $C \setminus A \neq \emptyset$, заклучуваме дека $C = \{1, 3, 4\}$.

16. Дадени се множествата $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d, f\}$, $C = \{b, e, f, g\}$ и $D = \{a, f, g, h\}$. Определи го множеството S за кое важи

$$S \subseteq A, S \cap (B \cup D) = \emptyset, (A \cap C) \setminus S = \emptyset \text{ и } \{c\} \setminus S = \{c\}.$$

Решение. Имаме $B \cup D = \{a, d, f, g, h\}$ и $A \cap C = \{b, e\}$. Од $S \subseteq A$ и $S \cap (B \cup D) = \emptyset$ следува дека $S \subseteq \{b, c, e\}$. Понатаму, од $A \cap C = \{b, e\}$ и $(A \cap C) \setminus S = \emptyset$ следува $b, e \in S$, а од $\{c\} \setminus S = \{c\}$ следува $c \notin S$. Конечно, $S = \{b, e\}$.

17. Определи го множеството N ако:

$$M \cup N \cup P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, M \cap P = \emptyset,$$

$$M \setminus N = \{6, 8\}, P \setminus N = \{3, 2\}.$$

Решение. Имаме, $M \cup N \cup P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и како $M \cap P = \emptyset$. $M \setminus N = \{6, 8\}$ и $P \setminus N = \{3, 2\}$, заклучуваме дека $N = \{1, 4, 5, 7, 9\}$. Направи Венов дијаграм.

18. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 2008, 2009\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ и збирот на елементите на A е еднаков на збирот на елементите на B .

Решение. Имаме

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2008 + 2009 = \frac{2009 \cdot (2009 + 1)}{2} = 1005 \cdot 2009.$$

Значи, збирот на сите елементи на множеството S е непарен и затоа множеството S не може да се подели на две дисјунктни множества со еднаков збир на елементите. Според тоа, не постојат множества A и B со саканите својства.

19. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Определи ги сите множества A, B и C кои ги задоволуваат следниве услови:

$$A \cup B \cup C = S, A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset,$$

множеството A има помалку елементи од множеството B , множеството B има помалку елементи од множеството C и збирот на елементите на множествата A, B и C е еднаков.

Решение. Збирот на елементите на множеството S е 45, па затоа збирот на елементите на секое од множествата A, B и C треба да е

$45:3=15$. Понатаму, бидејќи $9 < 15$ ниту едно множество не може да има еден елемент. Сега ако A има x елементи, тогаш B има $x+1$ и C има $x+2$ елементи. Затоа $x+x+1+x+2=9$, т.е. $x=2$. Според тоа, A има 2, B има 3 и C има 4 елементи. Едно решение на задачата е $A=\{6,9\}$, $B=\{2,5,8\}$, $C=\{1,3,4,7\}$. Задачата има уште пет решенија. Определи ги.

20. На правата p последователно се земени точки A, B, C и D . Определи го множеството $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB)$.

Решение. Бидејќи $AC \setminus BD$ е AB без точката B и $AC \cap AB = AB$, заклучуваме дека $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB)$ е AB без точката B .

21. Во еден хотел престојувале 100 туристи. Десет туристи не знаеле ниту германски ниту француски јазик, 75 туристи знаеле германски, а 83 туристи знаеле француски јазик. Колку туристи ги знаеле двата јазика?

Решение. Бидејќи 10 туристи не знаеле ниту еден јазик, заклучуваме дека $100 - 10 = 90$ туристи знаеле барем еден јазик. Понатаму, ако x туристи ги знаеле двата јазика, тогаш $75 - x$ туристи знаеле само германски јазик, а $83 - x$ туристи знаеле само француски јазик. Значи, $75 - x + 83 - x + x = 90$, па затоа $x = 158 - 90 = 68$. Конечно, двата јазика ги знаеле 68 туристи, само германски јазик знаеле $75 - 68 = 7$ и само француски јазик знаеле $83 - 68 = 15$ туристи.

22. Од 1250 ученици во едно училиште 570 ученици се занимаваат со кошарка, 280 ученици се занимаваат со фудбал, а 542 ученика не се занимаваат со овие спортови. Колку ученици се занимаваат и со двата спорта?

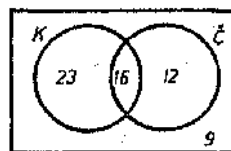
Решение. Со x да го означиме бројот на учениците кои се занимаваат со двата спорта. Тогаш само со кошарка се занимаваат $570 - x$ ученици, а само со фудбал се занимаваат $280 - x$ ученици. Затоа

$$(570 - x) + x + (280 - x) + 542 = 1250, \text{ т.е. } x = 142.$$

Според тоа, со двата спорта се занимаваат 142 ученика.

23. Во едно училиште работат 60 наставници. Од нив 39 пијат кафе, 28 пијат чај и 16 пијат и кафе и чај. Дали во училиштето има наставници кои не пијат ниту чај ниту кафе?

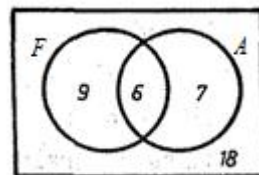
Решение. Решението на задачата е дадено на Веновиот дијаграм прикажан на цртежот



десно. Само кафе пијат $39 - 16 = 23$ наставници, само чај пијат $28 - 16 = 12$ наставници, а ниту кафе ниту чај не пијат $60 - (23 + 16 + 12) = 9$ наставници.

24. Во една група од 40 луѓе 15 знаат француски јазик, 13 знаат англиски јазик и 6 ги знаат и двата јазика. Дали во групата има луѓе кои не знаат ниту еден од двата јазика?

Решение. Аналогно како во претходната задача добиваме дека $15 - 6 = 9$ луѓе знаат само француски јазик, $13 - 6 = 7$ знаат само англиски јазик и $40 - (9 + 6 + 7) = 18$ луѓе не знаат ниту еден од двата јазијка.



25. Во едно училиште има 500 ученици. Баскет играат 325 ученици, фудсал играат 250 ученици, а 35 ученици не се занимаваат ниту со баскет, ниту со фудсал. Колку ученици играат само баскет, а колку само фудсал? Колку се занимаваат и со двата спорта?

Решение. Според условот на задачата $500 - 35 = 465$ ученици се занимаваат барем со еден спорт. Нека x е бројот на учениците кои се занимаваат и со двата спорта. Тогаш само баскет играат $325 - x$ ученици, а само фудсал играат $250 - x$ ученици. Затоа

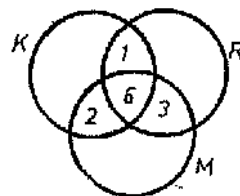
$$(325 - x) + x + (250 - x) = 465,$$

од каде добиваме $x = 110$. Според тоа, 110 ученици се занимаваат и со двата спорта. Само баскет играат $325 - 110 = 215$ ученици, а само фудсал играат $250 - 110 = 140$ ученици.

26. Сите ученици на едно одделение се членови на една од секциите: кошаркарска, рецитаторска и математичка. Само 6 ученици се членови на сите три секции, а 12 ученици се членови на повеќе од една секција. Понатаму, 8 ученици се членови на математичката и кошаркарската секција, а 9 ученици се членови на математичката и рецитаторската секција.

Колку ученици учествуваат во работата на рецитаторската и кошаркарската секција, а не се членови на математичката секција?

Упатство. Од условите на задачата состави го Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Само 1 ученик кој не е член на математичката секција учествува во работата на рецитаторската и кошаркарската секција.

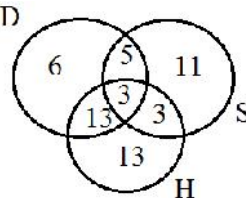


27. Од 70 ученици во шесто одделение 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се занимаваат со спорт. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот пета 6 спортисти, додека 8 спортисти членуваат во драмската секција. Три ученика се членови на сите три секции. Колку ученици не членуваат во ниту една секција, а колку ученици се занимаваат само со спорт?

Решение. Со D, H и S да ги означиме множествата ученици кои членуваат во драмската секција, хорот и спортската секција, соодветно. Имаме: $|D \cap H| = 16$, $|D \cap S| = 8$, $|H \cap S| = 6$ и $|D \cap H \cap S| = 3$. Го конструираме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Според тоа, во секциите вкупно членуваат

$$6 + 5 + 3 + 13 + 13 + 3 + 11 = 54 \text{ ученици.}$$

Значи, $70 - 54 = 16$ ученици не членуваат во ниту една секција, а само со спорт се занимаваат 11 ученици.

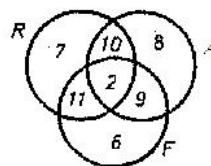


28. Колку учесници биле на конференција на која секој учесник говори најмалку еден од јазиците француски, англиски и руски, ако се знае дека:

- два учесника ги говорат сите три јазици,
- девет учесници говорат само француски и англиски јазик,
- тринаесет учесници говорат француски и руски јазик,
- дванаесет учесници говорат руски и англиски јазик,
- дваесет и девет учесници говорат само англиски јазик,
- шест учесници говорат само француски јазик и
- седум учесници говорат само руски јазик.

Упатство. Од условите на задачата состави го Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. На конференцијата имало

$$7 + 10 + 2 + 11 + 6 + 9 + 8 = 53 \text{ учесници.}$$



29. Во Крушево имало 30 занаетчии (некои имале и по два занаети). Деветмина биле сидари, 22 биле бравари и 11 биле лимари. Ниту еден сидар не бил истовремено и лимар. Сидари кои истовремено биле и бравари биле двапати помалку од лимарите кои биле и бравари. Колку занаетчии има кои имале само по еден занает и тоа од секој вид занает?

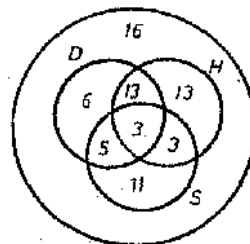
Решение. Ако бројот на оние кои истовремено се сидари и бравари е x , тогаш бројот на оние кои истовремено се бравари и лимари е $2x$. Само сидари има $9 - x$, само бравари има $22 - 3x$, а само лимари се $11 - 2x$. Но, вкупно има 30 занаетчии, па затоа точна е равенката $x + 2x + 9 - x + 11 - 2x + 22 - 3x = 30$, од каде добиваме $x = 4$ (нацртај Венов дијаграм). Значи, само сидари се 5, само бравари се 10 и само лимари се 11.

30. Од 70 ученици во шесто одделение точно 27 се членови на драмската секција, 32 пеат во хор, а 22 се спортисти. Во драмската секција има 16 членови на хорот, а во хорот има 6 спортисти, додека во драмската секција има 8 спортисти. Тројца спортисти се членови и на хорот и на драмската секција.

Колку ученици не членува во ниту една од споменатите секции?

Колку ученици се занимаваат само со спорт?

Упатство. Од условите на задачата го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно, од кој се гледа дека 16 ученици не се во ниту една секција, а 11 ученици се занимаваат само со спорт.

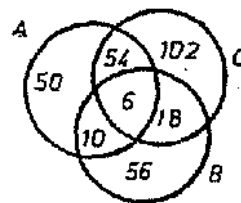


31. Во едно училиште се продаваат три списанија A , B и C . Списанието A го купуваат 120 ученици, списанието B го купуваат 90 ученици и списанието C го купуваат 180 ученици. Списанијата A и C ги купуваат 60 ученици, а списанијата A и B 16 ученици. Точно два ученика не купуваат ниту едно списание.

а) Колку ученици купуваат точно две списанија?

б) Колку ученици учат во ова училиште?

Упатство. Од условите на задачата го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно.



а) Точно две списанија купуваат

$$54 + 10 + 18 = 82 \text{ ученика.}$$

б) Во ова училиште учат

$$50 + 54 + 102 + 10 + 6 + 18 + 56 + 2 = 298 \text{ ученици.}$$

32. Во еден тим од 25 преведувачи 19 говорат англиски јазик, 19 германски, 11 француски, 12 преведувачи говорат англиски и германски, 5

англиски и француски, 5 говорат германски и француски, 2 ги говорат сите тријазика.

а) Колку преведувачи говорат француски, но не говорат и англиски јазик?

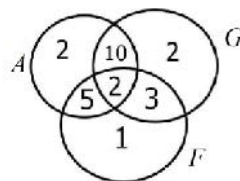
б) Колку преведувачи говорат точно два јазика?

в) Колку преведувачи говорат само еден јазик:

Решение. Нека A, F и G се множествата преведувачи кои говорат англиски, француски и германски јазик, соодветно. Според условот на задачата имаме

$$|A|=19, |F|=11, |G|=17, |A \cap G|=12,$$

$$|A \cap F|=7, |G \cap F|=5 \text{ и } |A \cap F \cap G|=2.$$



Го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на вртежот десно и заклучуваме:

а) Бројот на преведувачите кои говорат француски, но не говорат и англиски јазик е $|F \setminus A|=4$.

б) Точно два јазика говорат $10+5+3=18$ преведувачи.

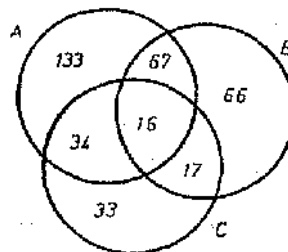
в) Само еден јазик говорат $2+2+1=5$ преведувачи.

33. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 1000 и кои не се деливи ниту со 4, ниту со 6.

Репение. Деливи со 4 се 249 броеви, а со 6 се 166 броја. Еден број е делив со 4 и со 6 ако и само ако е делив со 12, а такви броеви има 83. Според тоа, со 4 и со 6 се вкупно деливи $249+166-83=332$ броја. Конечно, не се деливи ниту со 4 ниту со 6 вкупно $999-332=667$ броеви.

34. Горјан ги запишал сите природни броеви од 1 до 1000. Прво ги пречкртал броевите кои се деливи со 4, па ги пречкртал броевите кои се деливи со 6 и на крајот ги пречкртал броевите кои се деливи со 10. Колку броеви останае непречкртани?

Решение. Со A, B и C да ги означиме множествата броеви кои се деливи со 4, 6 и 10, соодветно. Од $1000=4 \cdot 250$ следува дека меѓу првите 1000 природни броеви деливи со 4 се 250 броеви. Од $1000=6 \cdot 166 + 4$ следува дека меѓу првите 1000 природни броеви деливи со 6 се 166 броеви и слично



деливи со 10 се 100 броеви. Значи, $d(A)=250$, $d(B)=166$ и $d(C)=100$. Меѓу броевите на множеството B има броеви кои се деливи и со 4 и тоа се броевите кои се деливи со $NZS(6,4)=12$. Вакви броеви се 83, па затоа $d(A \cap B)=83$. Понатаму, од $NZS(4,10)=20$ следува дека има 50 броеви кои се деливи со 4 и со 10, па затоа $d(A \cap C)=50$, а од $NZS(6,10)=30$ следува дека има 33 броеви кои се деливи со 6 и со 10, т.е. $d(B \cap C)=33$. На крајот од $NZS(4,6,10)=60$ следува дека има 16 броеви кои се деливи со 4, 6 и 10, па затоа $d(A \cap B \cap C)=16$. Сега, од добиените податоци го составуваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно, од кој добиваме дека Горјан вкупно пречкртал

$$d(A \cup B \cup C) = 133 + 34 + 16 + 67 + 33 + 17 + 66 = 366 \text{ броеви.}$$

Конечно, непречкртани останале $1000 - 366 = 634$ броеви.

35. На училишниот натпревар по математика учествувале 100 ученици и секој од нив решавал по 3 задачи. Само 3 ученици не решиле ниту една задача. Од останатите ученици 65 ја решиле првата или третата задача, а 61 ученик ја решил втората или третата задача. Колку ученици ја решиле првата, колку втората и колку третата задача?

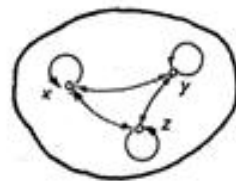
Решение. Најмалку една задача решиле $100 - 3 = 97$ ученици. Ако првата или третата задача ја решиле 65 ученици, втората задача ја решиле $97 - 65 = 32$ ученика. Втората и третата задача ја решил 61 ученик, што значи дека првата задача ја решиле $97 - 61 = 36$ ученици, а третата задача ја решиле $61 - 32 = 29$ ученици.

36. Нека A е множеството од сите правоаголници кај кои мерните броеви изразени во сантиметри се природни броеви и кои имаат плоштина 12 cm^2 .

а) Определи го множеството A .

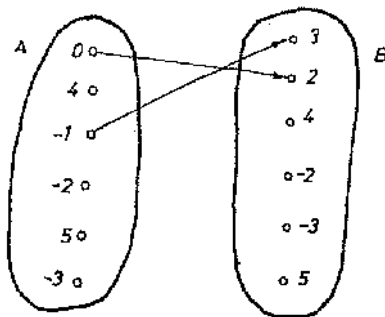
б) Која релација може да се забележи во ова множество? Нацртај го графикот на оваа релација.

Решение. а) Нека страните на правоаголниците се a и b , $a \leq 12$. Имаме $ab = 12$ и како a и b се природни броеви, добиваме $a = 12 \text{ cm}$ и $b = 1 \text{ cm}$, $a = 6 \text{ cm}$ и $b = 2 \text{ cm}$, $a = 4 \text{ cm}$ и $b = 3 \text{ cm}$.



б) Релацијата во множеството A е $R: x$ и y имаат еднаква плоштина. Графикот на релацијата е прикажан на цртежот десно.

37. На цртежот десно е прикажано дел од придружувањето на броевите меѓу множествата A и B , при што според правилото на бројот x му е придружен бројот $f(x) = ax + b$ каде a и b се некои броеви. Определете го правилото и довршите започнатото придружување.



Решение. Од $f(0) = 2$ и $f(-1) = 3$

добиваме $a \cdot 0 + b = 2$ и $-a + b = 3$. Значи, $b = 2$ и $a = 2 - 3 = -1$. Според тоа, правилото е $f(x) = 2 - x$ и притоа важи: $f(4) = -2$, $f(-2) = 4$, $f(5) = -3$ и $f(-3) = 5$.

IV.2. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

38. Колку прадедовци имале заедно сите твои прадедовци?

Решение. Секој има 4 прадедовци. Секој од моите 4 прадедовци имал по 4 прадедовци, па затоа сите заедно вкупно имале $4 \cdot 4 = 16$ прадедовци.

39. Штетните инсекти губари ја нападнаа шумата и секој ден имало двапати повеќе заразени дрвја од претходниот. Целата шума била заразена за 8 дена. За колку дена била заразена половината шума?

Решение. Бидејќи секој ден имало двапати повеќе заразени дрвја од претходниот и $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ заклучуваме дека осмиот ден биле заразени половината дрвја. Тоа значи дека половината дрвја биле заразени претходните денови, односно половината шума била заразена за 7 дена.

40. Четири мачки за 4 дена фатиле 4 глувци. За колку дена 100 мачки ќе фатат 100 глувци?

Решение. Четири мачки за 1 ден уловиле 1 глушец. Значи, 100 мачки за 1 ден уловиле 25 глувци, па затоа 100 мачки за 4 дена уловиле 100 глувци.

41. Дедо Милан во 1996 година го прославил својот 22-ри роденден, а неговиот син Петар го прославил својот 58-ми роденден. На кој датум е роден дедо Милан?

Решение. Бидејќи дедо Милан прославил помалку родендени од својот син, заклучуваме дека тој е роден во престапна година, каква што е и 1996 година. Значи, дедо Милан има $4 \cdot 22 = 88$ години и е роден на 29 февруари, т.е. тој е роден на 29 февруари 1908 година.

42. Во кутија се наоѓаат 10 црвени, 8 сини, 6 зелени и 4 жолти пенкала. Во темница влечеме пенкала едно по едно. Колку најмалку пенкала мораме да извлечеме за да бидеме сигурни дека сме извлекле:

- а) едно црвено пенкало;
- б) едно сино и две жолти пенкала;
- в) не помалку од 4 пенкала иста боја;
- г) барем по едно пенкало од секоја боја;
- д) две пенкала од различни бои?

Решение. а) За да имаме најмалку едно црвено пенкало, мора да се извлечат барем $8 + 6 + 4 + 1 = 19$ пенкала.

б) За да сме сигурни дека имаме барем едно сино и две жолти пенкала, мора да се извлечат $10 + 6 + 8 + 2 = 26$ пенкала.

в) За да имаме не помалку од 4 пенкала иста боја, мора да се извлечат најмалку $3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 13$ пенкала.

г) За да имаме едно пенкало од секоја боја, мораме да извлечеме најмалку $10 + 8 + 6 + 1 = 25$ пенкала.

д) За да бидеме сигурни дека сме извлекле две пенкала од различни бои, мораме да извлечеме барем $10 + 1 = 11$ пенкала.

43. Група од 21 деца треба да поделат 200 ореви. Докажи дека без оглед на тоа што како ќе постапат секогаш ќе се најдат две деца со еднаков број ореви.

Решение. Нека претпоставиме дека сите деца добиле различен број ореви. Тогаш најмалку ореви се поделени ако првиот добил 0 ореви, вториот 1, третиот 2 ореви итн. дваесетиот 19 ореви и дваесетипрвиот 20 ореви. Во тој случај се поделиле вкупно

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = 10 \cdot 21 = 210 \text{ ореви,}$$

што не е можно бидејќи имаме 200 ореви.

44. Во торба има 20 бели и 40 црни ракавици. Колку најмалку ракавици без да се гледа треба да се извадат за сигурно меѓу нив да има:

- а) барем еден пар иста боја ракавици;

- б) барем еден пар бели ракавици;
- в) барем еден пар црни ракавици;
- г) повеќе црни отколку бели ракавици?

Решение. а) Три ракавици и притоа две од нив сигурно се со иста боја.

б) За да бидеме сигурни дека имаме барем еден пар бели ракавици, мораме да извлечеме $40 + 2 = 42$ ракавици.

в) За сигурен пар црни ракавици ни требаат $20 + 2 = 22$ ракавици

г) За повеќе црни отколку бели ракавици треба да извлечеме најмалку $20 + 21 = 41$ ракавици.

45. Во кутија се наоѓаат 5 пара црни и 5 пара кафеави чевли со иста големина и ист изглед. Кој е најмалиот број чевли што треба да го извадиме без гледање за да сме сигурни дека сме извадиле еден пар чевли (лев и десен чевел од иста боја).

Решение. Треба да извадиме најмалку $5 + 5 + 1 = 11$ чевли, така што единаесеттата чевла сигурно ќе биде пар со една од претходните 10 чевли.

46. Во еден рибник има 30 штуки кои се јадат меѓу себе. Една штука се заситува ако изеде 3 штуки (не е важно дали се гладни или сити). Колку најмногу штуки може да се заситат.

Решение. Не може да се заситат 10 штуки, бидејќи тогаш ќе бидат изедени сите 30 штуки. Најмногу може да се заситат 9 штуки. Седум штуки ќе се заситат ако изедат по 3 штуки, а две штуки остануваат гладни. Сега овие две гладни штуки ќе изедат по 3 сити штуки и ќе се заситат.

47. На сите поставени прашања Владимир одговара со „Да!“ или со „Не!“ и секогаш ја говори вистината. Кое прашање треба да му се постави на Владимир двапати последователно почетокот на разговорот за да тој даде два различни одговора?

Решение. Прашањето кое треба на почетокот на разговорот да му се постави на Владимир е: „Дали пред малку нешто те прашав?“ Притоа првиот пат Владимир ќе одговори: „Не!“, а вториот пат ќе одговори: „Да!“.

48. Петар и Љупчо се браќа близнаци кои се разликуваат само по тоа што едниот секогаш лаже, а другиот секогаш ја говори вистината. Не секое поставено прашање тие одговараат со „Да!“ или со „Не!“. Треба на

Петар и Љупчо да им се постави едно исто прашање, така што и двајцата ќе дадат ист одговор. Наведи едно прашање на кое двајцата ќе одговорат со „Да!“ и едно прашање на двајцата ќе одговорат со „Не!“.

Решение. На прашањето „Дали ти секогаш ја говориш вистината?“ двајцата браќа ќе одговорат со „Да!“. На прашањето „Дали ти секогаш лажеш?“ двајцата браќа ќе одговорат со „Не!“. На прашањето „Дали твојот брат лаже?“ двајцата ќе одговорат со „Да!“ итн.

49. Пет другарки седат во еден ред во кино сала на пет седишта едно до друго, нумерирани со броевите од 1 до 5. Ана излегла да купи пуканки, а откако се вратила видела дека Јана се преместила за две седишта во десно, Кате - едно седиште во лево, а Дијана и Наташа си ги замениле местата, така што и останало да седне на седиштето со број 3. На кое седиште седела Ана пред да стане?

Решение. Според тоа што седиштето број три останало празно, заклучуваме дека пред преместувањето, Јана не седела на број 1, а Кате не седела на број 4. Бидејќи Дијана и Наташа само си ги смениле местата, тие би можеле да седат и пред и по преместувањето или на 1 и 2 или на 4 и 5. Ако Дијана и Наташа седеле на 4 и 5, тогаш бидејќи Јана не седела на број 1, или седела на 2, па се преместила на 4 или седела на 3, па се преместила на 5, што не е можно. Останува Дијана и Наташа да седеле на 1 и 2, Кате на 5 (зашто не може да седи на 4), па се преместила на 4, а Јана седела на 3 па се преместила на 5. Значи, за да остане седиштето број 3 празно по преместувањето, мора претходно Ана да седела на седиштето со број 4.

50. Секој од учениците Драган, Зоран и Милан свири само на еден од инструментите: труба, гитара и виолина. Определи кој ученик на кој инструмент свири, ако се знае дека само еден од следниве искази е вистинит:

- 1) Драган свири на труба.
- 2) Зоран не свири на труба.
- 3) Милан не свири на виолина.

Решение. Нека претпоставиме дека исказот 1) е точен. Тогаш исказот 2) не е точен, што значи дека и Зоран свири на труба, што противречи на условот на задачата.

Нека претпоставиме дека исказот 2) е точен. Тогаш исказот 1) не е точен, што значи дека Драган не свири на труба. Понатаму, исказот 3)

не е точен, па затоа Милан свири на виолина. Сега останува дека Драган и Зоран свират на труба и гитара, што противречи на претходно изнесеното.

Нека исказот 3) е точен. Заклучуваме дека Милан свири на виолина. Понатаму, исказот 2) не е точен, па затоа Зоран свири на труба и останува дека Драган свири на гитара, т.е. исказот 1) не е точен.

51. На прошетка биле три наставници: математичар, физичар и хемичар. Нивните презимиња се: Бојкоски, Ристески и Петрески. Меѓу нив математичарот е најмлад и тој нема ниту браќа ниту сестри. Петрески е оженет со сестрата на Бојкоски, а е постар од физичарот. Определи ги презимињата на математичарот, физичарот и хемичарот.

Решение. Бојкоски не е математичар, бидејќи тој има сестра, а математичарот нема ниту браќа ниту сестри. Петрески не е математичар, бидејќи тој е постар од физичарот, а математичарот е најмлад. Според тоа, Ристески е математичарот, Петрески е хемичарот и Бојкоски е физичарот.

52. По натпреварот во маратон на званичниот семафор е одјавено дека првите три места ги освоиле:

- 1) Милан Христовски,
- 2) Јане Средоески и
- 3) Милош Спасовски.

По кратко време спикерот им се извинил на гледачите и објавил дека соопштениот редослед не е точен. Имено, ниту едно име и ниту едно презиме не соодветствува на освојувачите на првите три места, а исто така ниту едно име не соодветствува на напишаното презиме. Спикерот додал дека победил Средоески. Определи го точниот редослед, како и имињата на натпреварувачите.

Решение. Победил Средоески Милош, бидејќи Милан не е прв, а Јане не е Средоески. Второто место го освоил Милан Спасовски, а третото место го освоил Јане Христовски.

53. На училишниот маратон четири ученици A, B, C и D ги освоиле првите четири места. На прашањето кој од нив кое место го освоил, тие дале три различни одговори:

- 1) C беше втор, а D трет.
- 2) C беше прв, а B втор.
- 3) A беше втор, а D четврт.

Во секој од овие одговори еден дел е точен, а другиот не е точен. Определи кое место го освоил секој од четирите ученици.

Решение. Нека претпоставиме дека во 1) делот од одговорот „С беше втор“ е точен. Тогa во 2) делот од одговорот „С беше прв“ е неточен, па затоа точно е дека „В е втор“, што не е можно бидејќи С и В не може и двајцата да се втори. Според тоа, претпоставката дека тврдењето „С беше втор“ не е точно. Последното значи, дека D е трет, па од 2) следува дека С е прв, од 3) следува дека А е втор и останува В да е четврт.

54. На прашањето кој колку години има тројца од учениците А, В, С и D ги дали следниве три одговори:

- 1) В има 13 години, С има 14 години.
- 2) С има 13 години, D има 11 години.
- 3) А има 13 години, D има 10 години.

Сите ученици имаат различен број години и во секој од дадените одговори еден дел е точен, а другиот е неточен. Определи колку години имасекој од учениците А, В, С и D.

Упатство. Постапи аналогно како во претходната задача и ќе добиеш дека А има 13 години, В има 10 години, С има 14 години и D има 11 години.

55. Павел, Борис и Владимир се пријатели и живеат во три различни градови: Пехчево, Битола и Велес. Нивните девојки се Гордана, Даница и Епсимија. Познато е дека:

- 1) Епсимија е девојка на Борис.
- 2) Владимир не е од Велес, а Борис не е од Битола.
- 3) Гордана е девојка на битолчанецот.
- 4) Даница не е девојка на велешанецот.

Во кој градови живее секој од тројцата пријатели?

Решение. Бидејќи Даница не е девојка на велешанецот, а Гордана е девојка на битолчанецот, заклучуваме дека Епсимија е девојка на велешанецот, а Даница е девојка на момчето од Пехчево. Бидејќи Епсимија не е девојка на Борис, а велешанецот не е Владимир, заклучуваме дека Павел е од Велес. Но, Борис не е од Битола, па останува дека Владимир е од Битола, а Борис е од Пехчево.

56. Пиратот Црвена брада нашол четири пергаменти на кои е запишана информација за тоа на кој од четирите острови: Ајланд, Деланд,

Беланд и Целанд се наоѓа некое закопано богатство. Пергаментите се прикажани на долните цртежи. Од четирите пергаменти, само на еден е запишана точна информација. На кој од овие четири острови е закопано богатството?



Решение. Ако богатството е на Ајланд, тогаш првиот и четвртиот пергамент содржат точна информација, што не е можно. Слично, ако богатството е на Беланд, тогаш вториот и четвртиот пергамент содржат точна информација, што повторно не е можно. Понатаму, ако богатството е на Целанд, тогаш третиот и четвртиот пергамент содржат точна информација, што повторно не е можно. Конечно, богатството е на Деланд и во тој случај само првиот пергамент содржи точна информација.

57. Во една група од пет другари, Томе, Диме, Борис, Симе и Петар, некои од другарите секогаш лажат, а некои секогаш ја говорат вистината. Секој од нив има еден плод: круша или јаболко. На прашањето кој што има, тие одговориле:

Томе: Јас имам круша. Петар има јаболко.

Диме: Јас имам круша. Денес е среда.

Борис: Симе и јас имаме јаболка. Петар има круша.

Симе: Томе има круша. Денес е петок.

Петар: Јас имам јаболко. Диме има круша.

Кој каков плод имал?

Решение. Томе и Симе исто тврдат за Томе, па значи или двајцата лажат или двајцата ја говорат вистината. Понатаму, Томе и Петар исто тврдат за Петар, па значи или двајцата се лажливци или двајцата се вистинољупци. Диме и Петар исто тврдат за Диме, или двајцата се

лажливци или двајцата се вистинољупци. Според тоа, Томе, Симе, Петар и Диме или се вистинољупци или се лажливци. Но, Симе и Диме имаат различни искази за денот во седмицата, што значи дека тие се лажливци, т.е. Томе, Симе, Петар и Диме се лажливци.

Понатаму, бидејќи Борис и Петар различно тврдат за Петар, заклучуваме дека Борис е вистинољубец. Конечно, Петар има круша, а Борис, Симе, Томе и Диме имаат јаболка.

58. Три девојчиња: Жанета, Даница и Лилјана имаат по едно домашно милениче – куче, маче и зајаче. Тие ги дале следниве изјави:

Жанета: Даница има зајаче.

Даница: Јас немам куче.

Лилјана: Жанета има куче.

Само едно од трите девојчиња кажало вистина. Определи го домашното милениче на секое од девојчињата.

Решение. Ако тврдењето на Лилјана е точно, тогаш и тврдењето на Даница е точно, што противречи на тоа дека само едно од девојчињата кажало вистина.

Ако тврдењето на Жанета е точно, тогаш и тврдењето на Даница е точно, што повторно е противречност.

Според тоа, тврдењето на Даница е точно, па затоа таа нема куче. Понатаму, тврдењето на Жанета не е точно, па затоа кучето не е кај Даница, што значи дека Даница има маче. Сега тврдењето на Лилјана не е точно, па останува зајачето да е домашното милениче на Жанета и кучето да е домашното милениче на Лилјана.

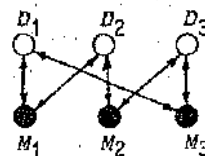
59. Околу тркалезна маса седнале 84 лица, некои од кои се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој од присутните на масата кажал дека од двете негови страни седат витез и лажго. Колку витези седеле на масата?

Решение. Кога изјавата ја дава витез, тогаш таа е точна па затоа до секој витез мора да има и витез и лажго. Но, кога изјавата ја дава лажго, тогаш таа не е точна, па затоа до секој лажго се или два витеза или два лажговци. Бидејќи од 84 лица некои се витези, а останатите се лажговци на масата седи најмалку еден витез. Ако тргнеме од него, тогаш, на пример, лево од него седи витез, а десно седи лажго. Понатаму, лево од новиот витез е лажго, а десно од лажгото е витез. Сега лево од лажгото е витез, а десно од витезот е витез. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека на масата се седнати група од по три лица

витез, витез и лажго и тоа во овој распоред. Вакви групи има $84 : 3 = 28$, што значи дека на масата се седнати $2 \cdot 28 = 56$ витези.

60. Од три девојчиња и три момчиња секое момче познава точно две девојчиња и секое девојче познава точно две момчиња. Докажи дека момчињата и девојчињата може да се поделат, момче и девојче во секој пар, така што во секој пар се наоѓаат познаници. (Познанството е симетрична релација.)

Решение. На цртежот десно во два реда се прикажани девојчињата D_1, D_2, D_3 и момчињата M_1, M_2, M_3 . Наспроти M_1 е неговата познаница D_1 , а десно е другата познаница D_2 . Девојчето



D_2 го познава момчето M_1 и уште момчето M_2 , кое е наспроти девојчето D_2 . Момчето M_2 го познава девојчето D_2 и уште едно девојче. Ова друго девојче не може да биде D_1 , бидејќи во тој случај M_3 и D_3 ќе имаат само по еден познаник, или пак некои од M_1, M_2, D_1 или D_2 би имале по три познаници, што не е можно. Според тоа, втората познаница на M_2 е D_3 . Сега M_1 и M_2 веќе имаат по две познаници, па затоа M_3 мора да ја познава D_3 . Останува уште дека M_3 ја познава D_1 . Сега можеме да ги формираме паровите $(D_1, M_1), (D_2, M_2), (D_3, M_3)$ или паровите $(D_1, M_3), (D_2, M_1), (D_3, M_2)$ со што тврдењето е докажано.

61. Во колона, еден за друг, се наоѓаат учениците A, B, C, D и E . Меѓу учениците A и B , а исто така и меѓу учениците D и E се наоѓаат точно едно момче и едно девојче. На првото и последното место не се наоѓа девојче, а не се ниту учениците A и E . Зад ученикот D се наоѓа само едно девојче.

Како се распоредени учениците A, B, C, D и E ? Со кои букви се означени момчињата, а со кои девојчињата?

Решение. Бидејќи A и E не се ниту на првото, ниту на последното место, овие места им припаѓаат на учениците B и D , па затоа тие не се девојчиња. Бидејќи по D се наоѓа само едно девојче, заклучуваме дека D е прв, B е последен, A мора да е втор, E мора да е четврт и C е трет. Зад ученикот D се наоѓа само едно девојче, што значи дека во групата има само едно девојче. Но, меѓу учениците A и B , а исто

така и меѓу учениците D и E се наоѓаат точно едно девојче, па затоа C е девојче, а останатите ученици се момчиња.

62. На складиште се наоѓаат шајки спакувани во кутии од 16 kg , 17 kg и 40 kg . Како магационерот не растурајќи ги кутиите на купецот му испорачал точно 100 kg шајки?

Решение. Лесно се гледа дека меѓу кутиите со во кои се испорачани шајките нема кутија од 40 kg . Бројот на кутии од 17 kg мора да биде парен и помал од 6, што значи е еднаков на 0, 2 или 4. За 0 и 2 немаме решение, а со 4 кутии од 17 kg треба да се земат уште 2 кутии од по 16 kg . Навистина, $4 \cdot 17 + 2 \cdot 16 = 100$.

63. Семејството Петровски се состои од татко (80 kg), мајка (65 kg), син (50 kg) и ќерка (40 kg). Тоа треба со чамец да ја премине реката. Како тоа ќе го направи, ако чамецот со кој треба да преминат може да пренесе маса од најмногу 100 kg ? (Сите членови на семејството знаат да веслаат.)

Решение. Прво ќе се префрлат децата, па едното од нив ќе се врати назад со чамецот. Сега реката ќе ја премине мајката, па другото дете ќе го врати чамецот назад. Повторно двете деца ќе ја преминат реката и едното дете ќе го врати чамецот назад. Сега реката ќе ја премине таткото, па другото дете ќе го врати чамецот назад и двете деца ќе ја преминат реката.

64. Бранко, Ванчо и Дарко биле на риболов. Масата на рибите кои ги уловил Бранко била 11 пати поголема од масата на рибите кои ги уловил Ванчо. Бранко му ги дал двете свои најлесни риби на Дарко и тогаш масата на преостанатите риби станала 8 пати поголема од масата на рибите уловени од Ванчо. Колку риби уловил Бранко?

Решение. Нека Ванчо уловил $2x\text{ kg}$ риба. Тогаш Бранко уловил $22x\text{ kg}$. Откако дал 2 риби на Дарко, на Бранко му останале $16x\text{ kg}$. Двете риби, кои ги дал на Дарко, имаат маса $22x - 16x = 6x\text{ kg}$. Секоја од преостанатите риби има маса барем $3x\text{ kg}$, бидејќи ако некоја има помала маса од $3x\text{ kg}$, тогаш двете најлесни риби би имале маса помала од $6x\text{ kg}$. Бидејќи $3x \cdot 6 = 18x > 16x$ и $3x \cdot 5 = 15x < 16x$, заклучуваме дека на Бранко му преостанале најмногу 5 риби. Според тоа, Бранко уловил најмногу $2 + 5 = 7$ риби. Задачата има 5 решенија.

Бранко уловил 7 риби: на пример 2 риби од по 150 g и 5 риби од по 160 g .

Бранко уловил 6 риби: 2 риби од по 150 g, една риба со маса 320 g, како и 3 риби од по 160 g.

Бранко уловил 5 риби: 2 риби од по 150 g, една риба со маса 480 g, како и 2 риби од по 160 g.

Бранко уловил 4 риби: 2 риби од по 150 g, една риба со маса 640 g, както и 1 риба со маса 160 g.

Бранко уловил 3 риби: 2 риби од по 150 g и 1 риба со маса 800 g.

Масата на уловените риби од Бранко е 1 kg и 100 g, а масата на уловените риби од Ванчо е 100 g.

65. Горјан има вага со еден тег од 250 g и 9 kg брашно. Како со помош на само три мерења ќе измери точно 2 kg брашно?

Решение. Горјан прво брашното ќе го подели на два еднакви дела кои ќе тежат по $9\text{ kg} : 2 = 4\text{ kg } 500\text{ g}$. Потоа едниот дел повторно ќе го подели на два еднакви дела кои ќе тежат по $4\text{ kg } 250\text{ g} : 2 = 2\text{ kg } 250\text{ g}$. Конечно, со третото мерење користејќи го тегот од едниот дел ќе одземе 250 g и ќе останат $2\text{ kg } 250\text{ g} - 250\text{ g} = 2\text{ kg}$.

66. Со помош на вага треба да ги измериме сите целобројни тежини од 1 kg до 13 kg. Определи го најмалиот број тегови кои ни се потребни и нивните маси.

Решение. Доволни се три тегови со маси 1 kg, 3 kg и 9 kg. Навистина,

$$\begin{array}{ll} 1 = 1, & 8 = 9 - 1, \\ 2 = 3 - 1, & 9 = 9, \\ 3 = 3, & 10 = 9 + 1, \\ 4 = 3 + 1, & 11 = 9 - 3 + 1, \\ 5 = 9 - 3 - 1, & 12 = 9 + 3, \\ 6 = 9 - 3, & 13 = 9 + 3 + 1, \\ 7 = 9 - 3 + 1, & \end{array}$$

67. Имаме канта од 4 литри и канта од 9 литри. Како со нивна помош од чешма ќе донесеш точно 6 литри вода?

Решение. Задачата има повеќе решенија, од кои едно е дадено во следната табела:

4 l	0	4	0	4	0	1	1	4	0
9 l	9	5	5	1	1	0	9	6	6

68. Располагаме со два празни сада, еден со волумен 11 литри, а друг со волумен 7 литри. Како со помош на овие садови најбрзо може во празно буре да се турат точно 6 литри вода?

Решение. Прво го полниме садот од 7 литри и водата ја претураме во садот од 11 литри. Повторно го полниме садот од 7 литри и го дополнуваме садот од 11 литри, по што во садот од 7 литри ќе останат $2 \cdot 7 - 11 = 3$ литри вода. Оваа вода ја претураме во празното буре во кое сега има 3 литри вода. Постапката ја повторуваме уште еднаш, по што во бурето ќе има $2 \cdot 3 = 6$ литри вода.

69. Како со помош на садови од 3l и 5l во буре може да се турат точно 4l вода?

Решение. Прво ќе го наполниме садот од 5l и од него ќе го наполниме садот од 3l. Останатите $5 - 3 = 2l$ ќе ги туриме во бурето. Ако постапката ја повториме уште еднаш, тогаш во бурето ќе имаме $2 + 2 = 4l$ вода.

70. Како со помош на два сада со волумени 3l и 5l од чешма ќе налееш точно 4l?

Решение. Едно од можните решенија на задачата е следново: прво го полниме садот од 3l и водата ја претураме во садот од 5l, па повторно го полниме садот од 3l и го дополнуваме садот од 5l. Во садот од 3l ќе остане $3 - (5 - 3) = 1l$ вода. Ја истураме водата од садот од 5l и добиениот 1l го претураме во него. Конечно, го полниме садот од 3l и водата ја претураме во садот од 5l во кој сега ќе има $1 + 3 = 4l$ вода.

71. Како со помош на садови од 3 литри и 5 литри во канта од 20 литри од чешма ќе налееш:

- 1) 1 литар вода,
- 2) 7 литри вода.

Решение. 1) Бидејќи $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$, за да измериме 1 литар, потребно е во кантата од 20 литри двапати да туриме по 5 литри и трипати да оттуриме по 3 литри.

2) Бидејќи $2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$, за да измериме 7 литри, потребно е во кантата од 20 литри двапати да туриме по 5 литри и еднаш да оттуриме 3 литри.

IV.3. НУМЕРИЧКИ ЗАГАТКИ

72. За колку е збирот на првите 2019 парни броеви поголем од збирот на првите 2019 непарни броеви?

Решение. По секој непарен број следува парен број, кој е за 1 поголем од својот претходник. Според тоа, збирот на првите 2019 парни броеви од збирот на првите 2019 непарни броеви е поголем за 2019.

73. На местата на симболите $\oplus, \otimes, \odot$ треба да се стави по еден знак од основните аритметички операции така што ќе биде точно равенството:

$$1 \oplus 2 \otimes 3 \oplus 4 \oplus 5 \odot 6 \oplus 7 \odot 8 \odot 9 = 1.$$

На исти симболи соодветствуваат исти знаци, а на различни симболи соодветствуваат различни знаци.

Решение. На $\oplus$ му соодветствува множење, на $\otimes$ му соодветствува оземање и на $\odot$ му соодветствува собирање. Имаме,

$$1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 + 9 = 1.$$

74. Во празните полиња на табелата прикажана на цртежот запиши броеви така што збирот на броевите запишани во секои три последователни хоризонтални и секои три последователни вертикални броеви ќе биде еднаков на 12.

	5						
					1		
6							
			2				

Решение. Нека a, b, c, d се било четири последователни броја (хоризонтално или вертикално). Имаме $a + b + c = b + c + d$, па затоа $a = d$. Последното значи

2	5		2	5		2	5
		1			1		
6			6			6	
2	5		2	5		2	5

дека по секои три броја следува првиот број. Оттука следува пополнувањето на некои од полињата прикажано на цртежот десно.

Понатаму, бидејќи збирот на броевите запишани во секои три последователни квадратчиња треба да е 12, во празните полиња на првиот и четвртиот ред треба да е запишан бројот $12 - (5 + 2) = 5$, а во празните полиња на првата, четвртата и седмата колона треба да е запишан бројот $12 - (2 + 6) = 4$.

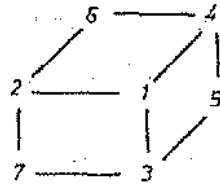
Сега, лесно се пополнуваат останатите празни полиња (цртеж десно).

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

75. Дали може човек да живее два милиони часови?

Решение. Една година има најмногу $24 \cdot 366 = 8784$ часови. Бидејќи $2000000 : 8784 = 227,6867\dots$, заклучуваме дека човек не може да живее 2000000 часови, затоа што не може да живее 227,6867... години.

76. На цртежот десно елементите на множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ се распоредени така што збирот на броевите запишани во темињата на секој четириаголник е еднаков на 13.



Распореди ги елементите на множеството A така што збирот на броевите запишани во темињата на секој четириаголник е еднаков на 16.

Решение. Ако во темињата на паралелограмите ги запишеме броевите a, b, c, d, e, f, g (цртеж десно), тогаш

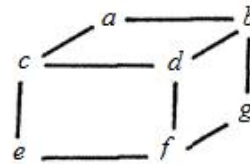
$$a + b + c + d + e + f + g = 28,$$

$$a + b + c + d = 16,$$

$$b + d + f + g = 16,$$

$$c + d + e + f = 16.$$

(1)



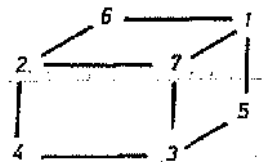
Сега, ако ги собереме последните три равенки и ја одземеме првата равенка во (1), добиваме $b + c + 2d + f = 20$. Понатаму, од последната равенка ги одземеме последните три равенки во (1) и добиваме

$$d + f - a = 4,$$

$$d + b - e = 4,$$

$$d + c - g = 4.$$

(2)

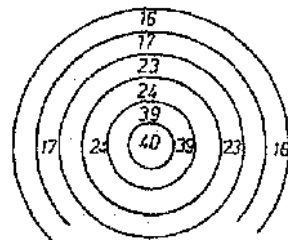


Конечно, од (2) со непосредна проверка се добива

$$d = 7, \{a, e, g\} = \{4, 5, 6\} \text{ и } \{b, c, f\} = \{1, 2, 3\}.$$

Едно од можните решенија е дадено на цртежот десно.

77. На цртежот десно е дадена кружна мета на која се означени поените за соодветните погодоци. Определи го најмалиот број на стрелања и како треба стрелец да ја погодува така што тој ќе освои точно 100 поени.



Решение. Лесно се проверува дека само со погодоците 40, 39, 24 и 23 не може да се добие збир на поени 100. Понатаму, $100 = 6 \cdot 16 + 4$, што значи дека

100 поени може да се освојат со 6 стрелања, при што четири пати ќе се освојат 17 и двапати ќе се освојат 16 поени, т.е. $4 \cdot 17 + 2 \cdot 16 = 100$. За да имаме помал број стрелања и освојување на 100 поени, потребно е некој од изразите

$$17k, k = 2, 3, 4, \quad 16 + 17k, k = 1, 2, 3 \quad \text{или} \quad 2 \cdot 16 + 17k, k = 1, 2$$

да се запише како збир на поените 23, 24, 39 и 40 (Зошто?). Последното не е можно, па решението на задачата е шест стрелања при што два пати се погодува 16 и четири пати се погодува 17.

78. Горјан во книжарницата половина од парите кои ги имал ги потрошил за книга, третина за комплет водени боици и шестина за хемиско пенкало. Колку пари му останале на Горјан?

Решение. Ако Горјан имал x денари, тогаш по купивањето во книжарницата му останале

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{6x - 3x - 2x - x}{6} = 0 \text{ денари.}$$

79. Едно јајце чини 4 денари и половина јајце. Колку пари чинат шест јајца?

Решение. Бидејќи едно јајце чини 4 денари и половина јајце, заклучуваме дека половина јајце чини 4 денари. Според тоа, едно јајце чини $2 \cdot 4 = 8$ денари, па затоа 6 јајца чинат $6 \cdot 8 = 48$ денари.

80. Јован набрал корпа со јаболка. Васко зел половината од јаболката и половина јаболко. Потоа Васка зела половина од преостанатите јаболка и половина јаболко и на крајот Марија зела половина од преостанатите јаболка и половина јаболко, по што во корпата останале 5 јаболка. Колку јаболка набрал Јован?

Решение. Кога Марија зела половина од преостанатите јаболка и половина јаболко, останале 5 јаболка. Тоа значи дека 5 јаболка и половина јаболко е половина од јаболката пред земањето на Марија. Според тоа, пред земањето на Марија во корпата имало $2 \cdot (5 + \frac{1}{2}) = 11$ јаболка. Слично, пред Васка да земе јаболка во корпата имало $2 \cdot (11 + \frac{1}{2}) = 23$ јаболка и пред Васко да земе јаболка во корпата имало $2 \cdot (23 + \frac{1}{2}) = 47$ јаболка. Значи, Јован набрал 47 јаболка.

81. Во три корпи има 12, 14 и 22 јаболка. Со три префрлања треба да се изеднали бројот на јаболката во трите корпи. Префрлањата се вршат

така што од една корпа се префрлаат јаболка во втора корпа онолку јаболка колку што веќе има во втората корпа.

Решение. Во корпите вкупно има

$$12 + 14 + 22 = 48$$

јаболка. Според тоа, на крајот во секоја корпа треба да има по $48:3=16$ јаболка. Трите префрлања се дадени во табелата десно.

	I	II	III
12	12	24	16
14	28	16	16
22	8	8	16

82. На ученичкиот маратон учествувале 2019 ученици, кои ги носат броевите 1, 2, 3, ..., 2019 и во овој редослед истите се наредени во редица. По издадена наредба секој ученик може со било кој ученик да го замени местото или да остане на своето место. Дали е можно по две наредби на учениците да се добие разместувањето 2019, 1, 2, 3, ..., 2018? Ако има 2020 натпреварувачи, дали може по две наредби да се добие разместувањето 2020, 1, 2, ..., 2019?

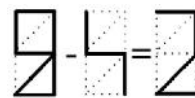
Решение. По првата наредба замена на местата ќе направат учениците 1 и 2019, 2 и 2018, 3 и 2017, ..., 1009 и 1011, а ученикот со број 1010 ќе остане на своето место. Така ќе се добие распоредот 2019, 2018, 2017, ..., 3, 2, 1. По втората наредба ученикот со број 2019 ќе остане на место, а местата ќе ги заменат учениците 2018 и 1, 2017 и 2, 2016 и 3, ..., 1010 и 1009, со што ќе се добие бараниот распоред.

На сличен начин може и 2020 натпреварувачи да се распоредат на барниот начин. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

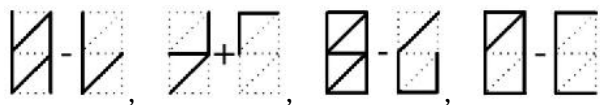
83. За телефонска централа се поврзани 55 телефонски броеви. Дали може овие телефони да се поврзат така што секој телефон директно ќе биде поврзан со точно 11 други телефони?

Решение. Ако секој од дадените 55 телефони има директна врска со 11 други телефони, тогаш бидејќи на секоја линија се приклучени по 2 телефони, т.е. секоја линија се брои двапати, ќе имаме вкупно $\frac{55 \cdot 11}{2}$ линии. Но, бројот на линиите е природен број, па затоа бараното поврзување не е можно.

84. Александар сака да кодира разни броеви со користење на рускиот поштенски код и основните математички операции. На пример, бројот 2 може да го запише како што е прикажано на цртежот десно. Тој одлучил да ја кодира на овој начин, годината во која Република Македонија се оддели од Југословенската федерација, па ги запишал изразите прикажан



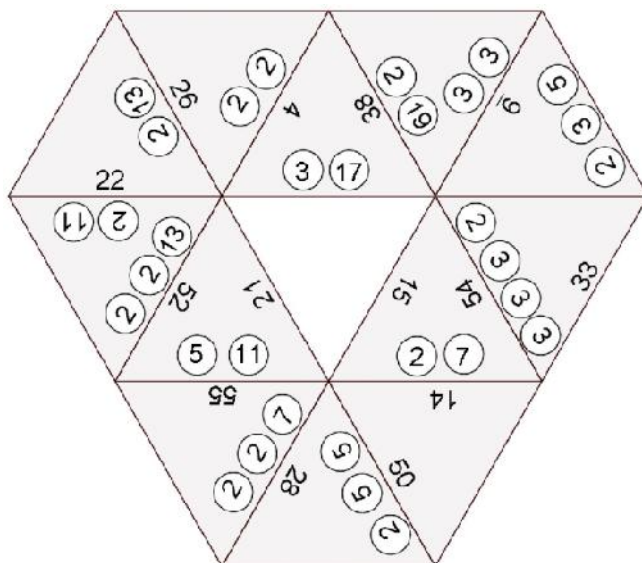
на долниот цртеж:



Која година Република Македонија се оддели од Југословенската федерација?

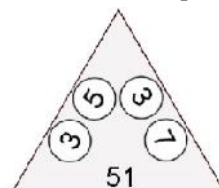
Решение. Првата цифра на годината ја добиваме така што од левата искршена линија ја избришеме десната искршена линија, па се добива цифрата 1. Втората цифра ја добиваме така што на левата искршена линија ја доцртуваме десната искршена линија, па се добива цифрата 9. Сега е јасно дека третата и четвртата цифра се 9 и 1, соодветно. Според тоа, Република Македонија од Југословенската федерација се оддели во 1991 година.

85. На долниот цртеж е прикажана бројна слојувалка.



Откриј го правилото според кое истата е направена, а потоа нацртај го триаголникот кој треба да се постави во средината на слојувалката.

Решение. Забележуваме дека над секоја внатрешна страна на триаголниците во слојувалката се придружени прости броеви запишани во кругчиња чиј производ е еднаков на бројот запишан над истата страна во соседниот триаголник и кој не е во кругче. Според тоа, над едната страна треба да се запише бројот $3 \cdot 17 = 51$, над другата во кругчиња се простите множители на 21, т.е. броевите 3 и 5, а

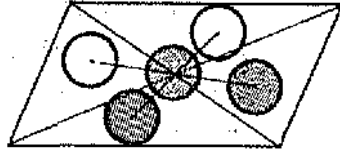


над третата во кругчиња се простите множители на 15, т.е 3 и 5. На цртежот десно е прикажан бараниот триаголник.

IV.4. ГЕОМЕТРИСКИ ЗАГАТКИ

86. Зоран и Дарко ја играат следнава игра. На лист во облик на паралелограм наизменично цртаат еднакви кругови, кои меѓу себе не се преклопуваат и не излегуваат надвор од листот. Победник е играчот кој последен ќе нацрта круг. Докажи дека Зоран, ако го црта првиот круг, може да игра така што ќе победи без разлика како игра Дарко.

Решение. Зоран сигурно победува ако знае дека паралелограмот е централно симетрична фигура, со центар на симетрија во пресекот на неговите дијагонали. Затоа доволно е прво да нацрта круг со центар во пресекот на дијагоналите. Сега, без разлика каде Дарко ќе го нацрта својот круг (ако може), Зоран црта круг симетричен во однос на пресекот на дијагоналите на последниот круг кој го нацртал Дарко (види цртеж). На овој начин Зоран секогаш може да нацрта круг по Дарко, што значи дека тој има победничка стратегија. .



87. Должината на патот од местото A до местото B е еднаква на најдолгата страна на паралелопипедот кој се добива кога сите кубни милиметри на една коцка со страна $1m$ ќе се наредат во права линија. Колку време му е потребно на автомобил кој се движи со брзина од 50 km/h да стигне од местото A во местото B ?

Решение. Од $1m = 1000\text{ mm}$, следува дека $1m^3 = 1000000000\text{ mm}^3$.

Според тоа, патот од местото A до местото B е долг

$$1000000000\text{ mm} = 1000000\text{ m} = 1000\text{ km}.$$

Автомобил кој се движи со брзина 50 km/h овој пат ќе го помине за $1000:50 = 20$ часа.

88. Дрвена коцка со волумен $1m^3$ е обоена со црвена боја, а потоа е расечена на коцки со волумен $1dm^3$.

а) Колку од овие коцки имаат 3 обоени страни, 2 обоени страни, 1 обоена страна и ниту една обоена страна.

б) Определи ја вкупната плоштина на коцките кои се добиени со расекувањето.

Решение. а) Три обоени страни имаат коцките во темињата на големата коцка, т.е. 8 коцки. Две обоени страни имаат коцките кои се на рабовите на големата коцка но не се во нејзините темиња, т.е. $12 \cdot 8 = 96$ коцки. Една обоена страна имаат коцките кои се на страните на големата коцка но не се на нејзините рабови, т.е. $6 \cdot 64 = 384$ коцки. Конечно, ниту една обоена страна имаат

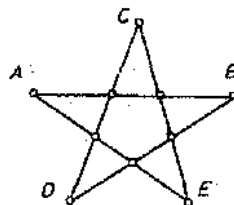
$$1000 - 384 - 96 - 8 = 512 \text{ коцки.}$$

б) Имаме 1000 коцки со должина на страна 1 dm , т.е. со плоштина 6 dm^2 . Според тоа, плоштината на сите коцки добиени со расекувањето на големата коцка е еднаква на

$$1000 \cdot 6 \text{ dm}^2 = 6000 \text{ dm}^2 = 60 \text{ m}^2.$$

89. Распореи 10 точки на 5 отсечки така што на секоја отсечка припаѓаат по 4 точки.

Решение. Решението на задачата е дадено на цртежот десно.

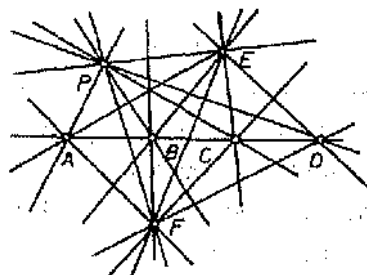


90. Во рамнината се дадени 7 точки такви што точно 4 припаѓаат на една права и не постојат други три точки кои припаѓаат на иста права. Колку прави се определени со воие точки.

Решение. Нека дадените точки се A, B, C, D, E, F и P при што точките A, B, C и D припаѓаат на иста права.

Една права е правата која ги содржи, точките A, B, C и D . Секоја од точките E, F и P со точките A, B, C и D определува по 4 прави и 3 прави се определени со точките E, F и P .

Според тоа, вкупно со дадените точки се определени $1 + 3 \cdot 4 + 3 = 16$ прави.

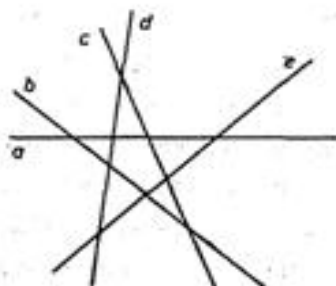


91. Во рамнината се дадени четири отсечки чии крајни точки не се совпаѓаат. Определи го бројот на отсечките кои се определени со нивните крајни точки.

Решение. Четирите отсечки имаат $4 \cdot 2 = 8$ крајни точки. Нека крајните точки на отсечките се A, B, C, D, E, F, G и H . Секоја од осумте точки со останатите седум точки определува седум отсечки, на пример со точката A и останатите точки се определени отсечките: AB, AC, AD, AE, AF, AG и AH . Според тоа, имаме $8 \cdot 7 = 56$ отсечки, при што секоја отсечка е броена двапати, на пример AB и BA . Значи, со крајните точки на дадените отсечки се определени $56 : 2 = 28$ отсечки.

92. Во рамнината се дадени пет прави такви што секои две се сечат и не постојат три прави кои се сечат во една точка. На колку дисјунктни делови е поделена рамнината со овие прави?

Решение. Според условот на задачата правите a, b, c, d и e треба да се распоредени како на цртежот десно. Притоа се добиваат 6 ограничени области и 10 неограничени дисјунктни области. Според тоа, со дадените прави се определени $6 + 10 = 16$ дисјунктни области.

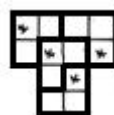
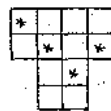


93. Определи го најмалиот број прави кои треба да се повлечат така што рамнината ќе биде поделена на седум дисјунктни области? Колку од овие области се ограничени, а колку се неограничени?

Решение. Една права ја дели рамнината на две дисјунктни области. Ако повлечеме втора права, тогаш во случај кога правите се сечат таа е поделена на 4 области. Сега, ако повлечеме трета права која со секоја од веќе повлечените прави се сече во различна точка, тогаш три од веќе добиените области ќе бидат поделени на по две области, па затоа добиваме $1 + 3 \cdot 2 = 7$ дисјунктни области. Притоа една од добиените области ќе биде ограничена, а шест ќе бидат неограничени.

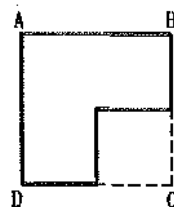
94. Фигурата дадена на цртежот десно подели ја на четири складни делови така што во секој дел да се наоѓа точно по една звезда.

Решение. Дадената фигура е составена од 12 единични квадратчина. Според тоа, секој дел е составен од по 3 единични квадратчиња. Долните две квадратчиња не содржат звезда, па затоа трето квадратче на едниот дел е



квадратчето кое е одма над нив и ја содржи ѕвездата. Со тоа го добивме обликот на делбените делови. Решението на задачата е дадено на цртежот десно.

95. Од квадратот $ABCD$ е исечена една негова четвртина (види цртеж). Подели ја добиената фигура на четири складни делови.



Решение. Секој од деловите на кои треба да се подели добиената фигура треба да има плоштина еднаква на $\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{16}$ од плоштината на квадратот,

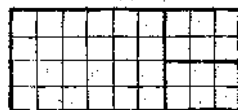
т.е. еднаква на збирот на плоштините на 3 квадрати со должина на страната $\frac{1}{4}$ од должината на страната на квадратот.

Затоа, дадената фигура ја делиме на 12 квадрати со должина на страна $\frac{1}{4}$ од должината на страната на квадратот, а потоа истата ја делиме на четири складни дела секој од кои содржи по 3 квадрати (цртеж десно).

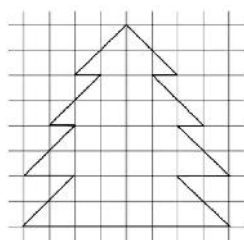


96. Правоаголник со димензии 9 cm и 4 cm расечи го на три правоаголници така што од нив може да се состави квадрат.

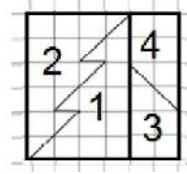
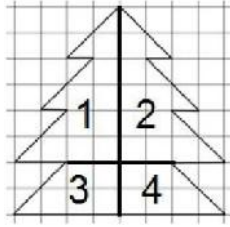
Решение. Плоштината на дадениот правоаголник е еднаква на $4 \cdot 9 = 36\text{ cm}^2$. Според тоа, страната на квадратот кој треба да се добие е еднаква на 6 cm . Бараното расекување е прикажано на цртежот десно.



97. На цртежот десно во квадратна мрежа е нацртана елка. Подели ја елката на четири дела и од добиените делови состави квадрат.



Решение. Елката е составена од 28 квадратчиња и 16 триаголничкиња, секое од кои е еднакво на половина квадратче. Според тоа, плоштината на целата елка е еднаква на плоштината на $28 + 16 : 2 = 36$ квадратчиња. Бидејќи треба од расечените делови да составиме квадрат, на секоја страна од овој квадрат треба да има по 6 квадратчиња. Едно од можните расекувања и составувањето на квадратот се дадени на долните цртежи.

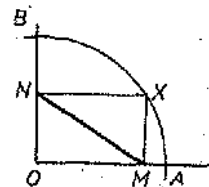


98. Парче картон со правоаголен облик има плоштина 2012 cm^2 , а должините на страните му се изразени со цели броеви во сантиметри. Од овој картон треба да се исечат еднакви квадрати чии должини на страни исто така се изразени со цели броеви. Кој е најголемиот, а кој најмалиот број квадрати кои може да се исечат така што неискористениот дел од картонот има најмала можна плоштина?

Решение. Имаме, $2012 = 2012 \cdot 1 = 4 \cdot 503$ и 503 е прост број. Според тоа, најголемиот број еднакви квадрати чии должини на страни исто така се изразени со цели броеви и кои може да се исечат од дадениот картон е 2012 и тоа се квадрати со должина на страна 1 cm . Сега, бидејќи $503 = 125 \cdot 4 + 3$ најмалиот број еднакви квадрати чии должини на страни исто така се изразени со цели броеви и кои може да се исечат од дадениот квадрат е 125 и тоа се квадрати со должина на страна 4 cm , при што ни останува правоаголник со должина на страни 3 cm и 4 cm и неговата плоштина е еднаква на 12 cm^2 .

99. Околу темето на правиот агол AOB е опишана кружница со радиус 1 cm . Нека X е произволна точка од лакот AB и M и N се проекциите на точката X врз краците OA и OB , соодветно. Определи ја дожината на отсечката MN .

Решение. Од условот на задачата следува дека четириаголникот $OMXN$ е правоаголник со дијагонали OX и MN . Дијагоналите кај правоаголникот се меѓусебно еднакви, па затоа $\overline{MN} = \overline{OX} = 1 \text{ cm}$.



100. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја:

- 1) само со две прави на 6 делови
- 2) на четири исти делови (деловите може да се вртат и превртуваат).

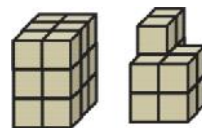


Решение. 1) Бараната поделба е прикажана на долниот лев цртеж.

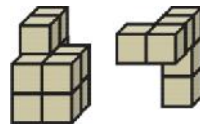
2) Целата фигура содржи 16 исти квадрати, па затоа секој од четирите дела треба да содржи по $16 : 4 = 4$ квадрати. Бараната поделба е прикажана на долниот десен цртеж.



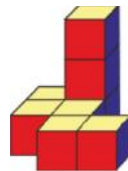
101. Парче направено од дрво како на левиот цртеж, е поделено на две парчиња. Едното од добиените парчиња е прикажано на цртежот десно. Како изгледа второто парче од направената поделба?



Решение. Парчето кое е поделено всушност е составено од три реда коцки и во секој ред има по $2 \cdot 3 = 6$ коцки. Од цртежите е јасно дека во првиот и вториот ред недостасува по една коцка, а додека во третиот ред недостасуваат 4 коцки. Понатаму, коцките кои недостасуваат во првите два реда и една од коцките кои недостасуваат во третиот ред се една над друга и на нив во третиот ред се надоврзуваат уште трите коцки кои недостасуваат. Делбените парчиња се прикажани на цртежите десно.

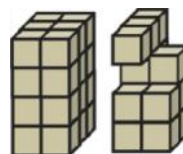


102. Тони почнал да гради голема коцка со помош на идентични мали коцки. Тој веќе наредил неколку мали коцки, како што е прикажано на цртежот десно. Кој е најмалиот број на мали коцки што треба Тони да ги дореди за да направи голема коцка?

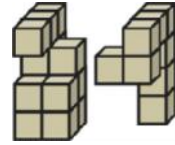


Решение. Во првиот ред Тони направил дел кој има три реда и три колони во кои недостасуваат три коцки. Понатаму, една над друга се поставени три коцки, па затоа најмалата коцка која Тони може да ја направи ќе биде составена од $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ коцки. Во првиот ред недостасуваат 3 коцки, во вториот ред недостасуваат 8 коцки и во третиот ред недостасуваат 8 коцки. Според тоа, најмалиот број мали коцки кои треба Тони да ги дореди е еднаков на $3 + 8 + 8 = 19$.

103. Парче направено од дрво како на левиот цртеж, е поделено на две парчиња. Едното од добиените парчиња е прикажано на цртежот десно. Како изгледа второто парче од направената поделба?



Решение. Парчето кое е поделено всушност е составено од четири реда коцки и во секој ред има по $2 \cdot 3 = 6$ коцки. Од цртежите е јасно дека во првиот и вториот ред недостасува по една коцка, во третиот ред недостасуваат 4 коцки и во четвртиот ред недостасуваат 3 коцки. Понатаму, коцките кои недостасуваат во првите два реда и по една од коцките кои недостасуваат во третиот и четвртиот ред се една над друга и на нив во четвртиот ред се надоврзуваат уште двете коцки кои недостасуваат, а потоа во третиот ред се надоврзуваат уште три коцки кои недостасуваат. Делбените парчиња се прикажани на цртежите десно.



IV.5. ШРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

104. Дадени се пет произволни природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат најмалку два броја такви што нивната разлика е делива со 4.

Решение. Секој природен број при делење со бројот 4 дава остаток 0, 1, 2 или 3. Имаме 5 броја, а четири остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два броја кои при делење со бројот 4 даваат ист остаток. Јасно, разликата на овие броеви е делива со бројот 4.

105. Во едно одделение има 30 ученици и сите решавале ист тест. Еден од нив, Илија, решавајќи го тестот направил 13 грешки, а секој од останатите ученици направил помалку грешки. Докажи дека најмалку три ученици направиле еднаков број грешки.

Решение. Според условот на задачата 29 ученици направиле 0, 1, 2, 3, ..., 12 грешки. Бидејќи $29 = 13 \cdot 2 + 3$, од принципот на Дирихле следува дека најмалку три ученици направиле еднаков број грешки.

106. Во едно одделение учат 40 ученици и сите работеле по три писмени работи. Ниту еден ученик на ниту една писмена не добил оценка помала од 3 и секој ученик добил по три различни оценки. Докажи дека постојат најмалку седум ученици кои на трите писмени работи добиле три исти оценки.

Решение. За секој ученик има шест можности за добиените оценки на писмените работи и тоа: (3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3)

Учениците ги распоредуваме во шест групи и како $40 = 6 \cdot 6 + 4$ од

принципот на Дирихле следува дека во една од групите има најмалку 7 ученици, т.е. најмалку седум ученици на три писмени работи добиле исти оценки.

107. Докажи дека постои природен број кој е делив со 2018, а првите десет цифри му се 1234567890.

Решение. Да ги земеме броевите:

$$a_1 = 1234567890,$$

$$a_2 = 12345678901234567890,$$

.....

$$a_{2018} = 1234567890 \dots 1234567890 \quad (2018 \text{ пати групата } 1234567890)$$

Со делење на броевите $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ со 2018 можеме да ги добиеме остатоците 0, 1, 2, ... или 2017. Ако постои број чиј остаток при делењето со 2018 е 0, тогаш тоа е бараниот број. Ако таков број не постои, тогаш имаме 2018 броеви и 2017 остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека при делењето на два од броевите е добиен ист остаток. Разликата на овие два броја е делива со 2018 и истата започнува со цифрите 1234567890, што значи дека тоа е бараниот број.

108. Докажи дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници.

Решение. Нека претпоставиме дека во групата има n луѓе. Можни се два случаја и тоа, секој член на групата има најмалку еден познаник или постои член на групата кој нема ниту еден познаник.

Во првиот случај, секој од n -те членови на групата има 1, 2, 3, ... или $n-1$ познаник. Ако n -те членови на групата, според бројот на познаниците, ги поделиме во помали $(n-1)$ -на група, од принципот на Дирихле следува дека во една од малите групи има најмалку два члена од големата група и тие имаат еднаков број познаници.

Во вториот случај, секој од n -те членови на групата има 0, 1, 2, ... или $n-2$ познаника. Ако n -те членови на групата, според бројот на познаниците, ги поделиме во помали $(n-1)$ -на група, од принципот на Дирихле следува дека во една од малите групи има најмалку два члена од големата група и тие имаат еднаков број познаници.

109. Докажи дека во одделение со 34 ученици постојат најмалку два ученика чие презиме почнува со иста буква.

110. Во зимската математичка школа учествувале 368 ученици. Докажи дека најмалку два ученика слават роденден во ист ден.

111. Дали меѓу $n+1$ природни броеви постојат два броја чија разлика е делива со n ?

$$an + r - (bn + r) = an + r - bn - r = (a - b)n$$

112. Колку најмалку природни броеви треба да избереме за меѓу нив сигурно да постојат два броја чија разлика е делива со 2006?

113. Докажи дека постои број од видот $111\dots11000\dots00$ (запишан во декаден систем со помош на определен број единици, а потоа определен број на нули) кој е делив со:

- Решение.** а) Набљудуваме низа од осум броеви

Меѓу овие осум броеви постојат два кои при делење со 7 дават ист остаток, т.е. два чија разлика е делива со 7. Нивната разлика е број од видот $1...10...0$, со што тврдењето е докажано.

-
- 225

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots, \underbrace{111\dots111}_{2006}, \underbrace{111\dots111}_{2007},$$

а потоа постапи аналогно на доказот под а).

114. Ако 7 зајаци треба да се сместат во 2 кафеза, тогаш постои кафез во кој се наоѓаат барем 4 зајаци. Докажи.

Решение. Ако во секој од двата кафеза имало помалку од 4 зајаци, тогаш најмногу би имало 6 зајаци, што противречи дека во двата кафеза се сместени 7 зајаци.

115. Во основното училиште „Петар Поп Арсов“ има во секое одделение по 4 (вкупно 20) паралелки од петто до деветто одделение, а во математичката школи одат 22 ученика. Докажи дека барем 5 од тие ученици одат во исто одделение клас и барем 2 ученика одат во иста паралелка.

Решение. Бидејќи $22 = 5 \cdot 4 + 2$, од принципот на Дирихле следува дека постои најмалку едно одделение во кое учат $4 + 1 = 5$ ученици.

Слично, од $22 = 20 \cdot 1 + 2$ следува дека има најмалку една паралелка во која учат $1 + 1 = 2$ ученика.

116. Имаме 25 гајби со три сорти јаболки. Во секоја гајба јаболката се од иста сорта. Докажи дека постојат најмалку 9 гајби со иста сорта јаболка.

Решение. Имаме 25 гајби и три сорти, па како $25 = 3 \cdot 8 + 1$, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 9 гајби со иста сорта јаболка.

117. Во една кутија се наоѓаат 10 црвени, 20 бели, 30 зелени и 40 сини топки. Колку топки треба да извадиме за да бидиме сигурни дека сме извадиле најмалку 5 топки со иста боја?

Решение. Ако извадиме 16 топки, тогаш може да се случи да имаме по 4 топки од секоја од четирите бои. Но, ако извадиме 17 топки, бидејќи $4 \cdot 4 + 1 = 17$, од принципот на Дирихле следува дека мора да има 5 топки со иста боја.

118. Во една шума има 7654321 дрвја, и на секое дрво не повеќе од 1000000 листови. Докажи дека во шумата постојат најмалку 8 дрвја со еднаков број на листови.

Решение. Ги сортираме дрвјата на класи: во првата класа се оние кои имаат 0 листови, во втората оние кои имаат 1 лист, во третата оние кои имаат 2 листа, итн. во милион и првата класа се оние кои имаат

точно милион листови. Значи, 7654321 дрвја ги сортираме во 1000001 класи, па бидејќи $7654321 = 1000001 \cdot 7 + 654314$ од принципот на Дирихле следува дека постои класа во која има најмалку $7 + 1 = 8$ дрвја. Затоа, барем 8 дрвја имаат еднаков број на листови.

119. Во едно основно училиште има 987 ученици. Докажи дека во тоа училиште постојат барем два ученика кои имаат исти иницијали.

Решение. Вкупниот број на можните иницијали се $31 \cdot 31 = 961$. Сите ученици ќе ги распоредиме во класите АА, АБ..., ЦЦ, ШШ. Бидејќи $987 = 961 \cdot 1 + 26$ од принципот на Дирихле следува дека постои класа во која има $1 + 1 = 2$ ученика, т.е. постојат два ученика со исти иницијали.

120. Докажи дека во множество од 2012 произволни природни броеви може да се најдат два броја чија разлика е делива со 2011.

Решение. При делење со 2011 можни остатоци се 0, 1, 2, 3, ..., 2010, што значи дека имаме вкупно 2011 можни остатоци. Но, дадени се 2012 броеви, па од принципот на Дирихле следува дека два од дадените броеви при делење со 2011 даваат ист остаток. Нека тоа се броеви $x = 2011q + r$ и $y = 2011p + r$. Тогаш,

$$x - y = 2011q + r - 2011p - r = 2011(q - p),$$

т.е. $2011 | (x - y)$, што и требаше да се докаже.

IV.6. ПРЕБРОЈУВАЊА

121. Мери ги запишала сите можни парни броеви со четири различни цифри кои се формирани од цифрите на бројот 2019. Колку броеви запишала Мери?

Решение. Броевите кои ги напишала Мери се:

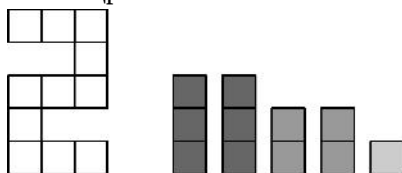
$$2190, 2910, 1920, 1902, 1290, 1092, 9102, 9120, 9210, 9012.$$

Значи, Мери запишала 10 броеви.

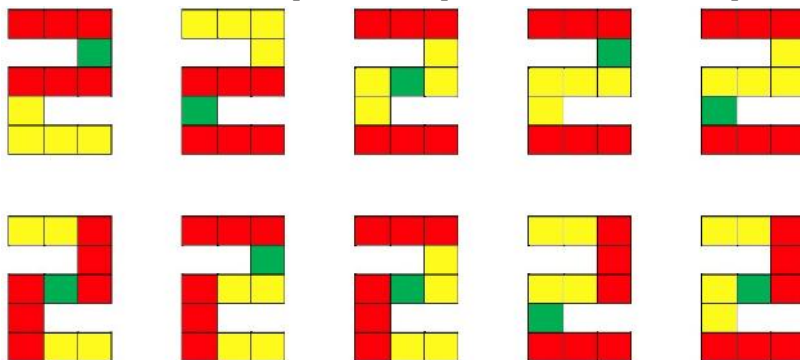
122. На една дрвена прачка Борис означил цртички со кои прачката ја поделил на 9 еднакви делови. По него Милан на прачката означил цртички со кои прачката ја поделил на 12 еднакви делови. На крајот Ангел означил цртички со кои прачката ја поделил на 15 еднакви делови. Колку цртички имало на крајот на прачката?

Решение. Борис прачката ја поделил на 9 еднакви делови, што значи дека тој означил 8 цртички. Милан прачката ја поделил на 12 еднакви делови, што значи дека тој означил 11 цртички. Ангел прачката ја поделил на 15 еднакви делови, што значи дека тој означил 14 цртички. Според тоа, на прачката вкупно се означени $8 + 11 + 14 = 33$ цртички. Меѓутоа, бидејќи $NZD(9,12,15) = 3$, заклучуваме дека 2 од цртичките со кои прачката се дели на 3 еднакви дела ќе се заеднички за тројцата. За да не се бројат овие цртички три пати од 33 треба да извадимо $2 \cdot 2 = 4$. Според тоа, на прачката вкупно се означени $33 - 4 = 29$ цртички.

123. На колку различни начини може да се прекријат полињата на фигурата прикажана на левиот цртеж со плочките кои се десно од неа?



Решение. Сите можни покривања се прикажани на долните цртежи.



Според тоа, бараниот број покривања е еднаков на 10.

124. Определи го бројот на различните рамнокраки триаголници чии мерни броеви на должините на страните се природни броеви и кои имаат периметар еднаков на 60 единици?

Решение. Ако со x и y ги означиме должините на основата и на кракот на рамнокракиот триаголник, соодветно, за неговиот периметар добиваме $x + 2y = 60$, т.е.

$x = 2(30 - y)$. За x и y да се цели и позитивни броеви,

$$(x, y) \in \{(2, 29), (4, 28), (6, 27), (8, 26), (10, 25), \dots, (56, 2), (58, 1)\}.$$



Условот x и y да се страни на триаголник, т.е. збирот од било кои две страни да е поголем од третата страна, е задоволен ако и само ако $2y > x$, односно ако и само ако

$$(x, y) \in \{(2, 29), (4, 28), (6, 27), (8, 26), (10, 25), \dots, (28, 16)\}.$$

Според тоа, постојат 14 рамнокраки триаголници со саканите својства.

125. Конкурсните задачи на списанието Питагора ги решавале 22 ученика од 8 училишта. Тие вкупно решиле 50 задачи. Сите ученици од исто училиште решиле еднаков број задачи, а учениците од различни училишта решиле различен број задачи. Секој ученик решил најмалку една задача. Колку ученици решиле точно една задача?

Решение. Од секое училиште да земе по еден ученик. Нека претпоставиме дека ученикот од првото училиште решил една задача, од второто две задачи, ..., ученикот од осмото училиште решил 8 задачи. Според тоа, овие 8 ученици решиле $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$ задачи, па затоа преостанатите $22 - 8 = 14$ ученици решиле $50 - 36 = 14$ задачи. Бидејќи секој ученик решил барем една задача и бидејќи сите ученици од исто училиште решиле еднаков број задачи, заклучуваме дека овие 14 ученици кои решиле по една задача се од првото училиште. Конечно една задача решиле $14 + 1 = 15$ ученици.

126. Со цифрите 1, 3, 5 и 9 запиши ги сите броеви кои се деливи со 3 и чији цифри се меѓусебно различни.

Решение. Еден број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. Од цифрите 1, 3, 5 и 9 деливи со 3 се следниве збирове на три различни броја: $1 + 3 + 5 = 9$ и $1 + 5 + 9 = 15$, а другите два збира не се деливи со 3. Оттука следува дека со помош на цифрите 1, 3 и 5 може да се запишат следниве броеви деливи со 3: 135, 153, 315, 351, 513 и 531, а со цифрите 1, 5 и 9 може да се запишат следниве броеви деливи со 3: 159, 195, 519, 591, 915 и 951.

127. На кружница означив 2 зелени, 3 црвени, 4 сини и 6 жолти точки. Секои две од овие точки ги поврзав со отсечка. Колку отсечки имаат разнобојни крајни точки?

Решение. Бројот на отсечките кои имаат разнобојни крајни точки е еднаков на:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 6 + 8 + 12 + 12 + 18 + 24 = 80.$$

128. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се деливи со 5 и чиј збир на цифрите на десетките и стотките е еднаков на 12.

Решение. Трицифрениот број $\overline{abc}$ е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците c е 0 или 5, т.е. имаме две можности. Понатаму, бидејќи за цифрите a и b важи $a + b = 12$, заклучуваме дека за секоја од овие две можности за цифрите a и b имаме седум можности кои се дадени во следната табела:

a	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3

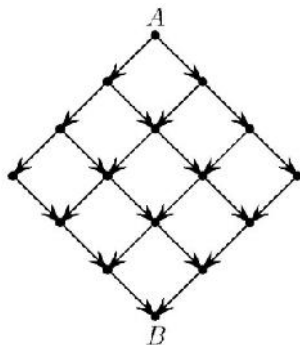
Конечно, постојат $2 \cdot 7 = 14$ трицифрени броеви кои што ги задоволуваат условите на задачата.

129. Четириесет војници носат исти униформи на кои има еднаков број петлици, сошиени една под друга. Петлиците на униформите се или златни или сребрени и секој војник може да ја препознае својата униформа само ако го погледне распоредот на петлиците. Определи го најмалиот број петлици кои може да ги има една униформа.

Упатство. Најмалиот број петлици се достигнува ако имаме еднаков број златни и сребрени петлици. Имено, тогаш за секој распоред на златните петлици имаме единствен распоред на сребрените петлици, па со замена на местата на златните и сребрените петлици добиваме нов распоред на петлиците. Значи, бројот k на златните петлици треба да определува $40 : 2 = 20$ различни распореди кога петлиците ќе ги зашиеме на $2k$ места. Јасно, за $k = 1$ и $k = 2$ тоа не е можно, а додека за $k = 3$ имаме точно 20 избори на 3 од можните 6 места на кои треба да ги сошиеме петлиците (Зошто?). Според тоа, најмалиот број петлици кои може да ги има една униформа е $2k = 6$ петлици.

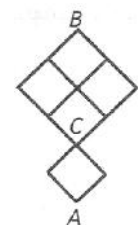
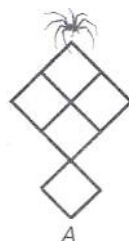
130. По колку различни патишта може на шемата прикажана на цртежот десно, одејќи во насока на стрелките, да се стигне од точката A до точката B ?

Решение. Заради симетрија доволно е само да ги преброиме патиштата кога во првиот чекор од точката A тргнуваме лево. Ако не свртуваме на ниту една една раскрсница, т.е. одиме по работ на шемата имаме 1 пат. Ако свртиме на втората раскрсница имаме 3 патишта. Ако свртиме на првата раскрсница имаме 6 патишта.



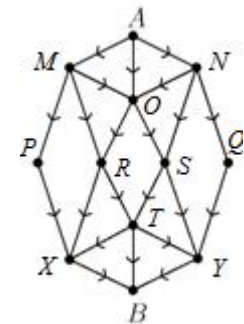
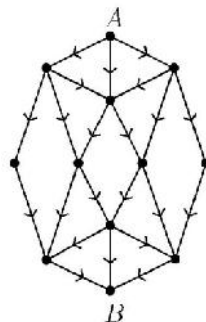
Според тоа, во случајов имаме $1+3+6=10$ патишта, па заради симетрија вкупниот број патишта е еднаков на $2 \cdot 10 = 20$.

131. Пајакот треба по пјажината прикажана на цртежот десно да допозли до точката A . По колку различни патишта може да помине пајакот ако ползи само надолу?



Решение. За да стигне од точката B до точката C пајакот треба да направи 2 чекори налево (л) и 2 чекори надесно (д). Ова може да го направи на шест начини и тоа: (л, л, д, д), (л, д, л, д), (л, д, д, л), (д, л, л, д), (д, л, д, л) и (д, д, л, л). Понатаму, од точката C до точката A може да стигне на 2 начина: (л, д) и (д, л). Конечно, од врвот на пјажината до точката A пајакот може да стигне по $6 \cdot 2 = 12$ различни патишта (секој од шесте патишта од B до C може да се продолжи на два начина).

132. По колку различни маршрути може да се стигне од точката A до точката B на шемата прикажана на цртежот десно, ако се движиме во насока на стрелките?



Решение. При ознаки како на цртежот лево од точката A до точката O може да се стигне по 3 различни маршрути. Затоа од точката A до секоја од точките R и S може да се стигне по 4 различни маршрути. Според тоа, од точката A до точката T може да се стигне по 8 различни маршрути, што значи дека од точката A до секоја од точките X и Y може да се стигне по $8 + 4 + 1 = 13$ различни маршрути. Конечно, од точката A до точката B може да се стигне по $13 + 8 + 13 = 34$ различни маршрути.

133. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои при делење со броевите 5 и 6 даваат исти остатоци.

Решение. Еднаквите остатоци при делење со броевите 5 и 6 можат да бидат 0, 1, 2, 3 или 4. Од $NZS(5,6) = 30$ добиваме дека бараните броеви се од видот $30k + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Притоа, $k = 1, 2, 3$, бидејќи за $k = 0$ добиваме едноцифрени броеви, а за $k > 3$ добиваме три или по-

веќе цифрени броеви. Конечно, за r имаме 5 можности и за k имаме 3 можности, па бараниот број броеви е $3 \cdot 5 = 15$.

134. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис се среќава цифрата 6, но не се среќаваат цифрите 0 и 7?

Решение. Меѓу броевите од 100 до 199 имаме 15 броја во чиј запис се среќава цифрата 6, но не се среќаваат цифрите 0 и 7 и тоа се броевите: 116, 126, 136, 146, 156, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 168, 169, 186 и 196. Слично во секоја група броеви од 200 до 299, од 300 до 399, од 400 до 499, од 500 до 599, од 800 до 899 и од 900 до 999 имаме по 15 броја во чиј запис се среќава цифрата 6, но не се среќаваат цифрите 0 и 7. Јасно, меѓу броевите од 700 до 799 нема ниту еден број со саканото својство, а меѓу броевите од 600 до 699 тоа се броевите: 611, 612, 613, 614, 615, 616, 618, 619, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 628, 629, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 638, 639, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 648, 649, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 658, 659, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 668, 669, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 688, 689, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 698 и 699, што значи дека има 64 такви броеви. Конечно, бројот на трицифрените броеви во чиј запис се среќава цифрата 6, но не се среќаваат цифрите 0 и 7 е еднаков на $64 + 7 \cdot 15 = 169$.

135. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои почнуваат со цифрата 2, завршуваат со цифрата 4 и се деливи со 9.

Решение. Бараните четирицифрени броеви можеме да ги запишеме во видот $\overline{2xy4}$, $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Еден број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри $6 + x + y$ е делив со 9, па затоа можни се следниве случаи:

- 1) $x + y = 3$ и во овој случај тоа се броевите: 2034, 2304, 2124 и 2214, т.е. имаме 4 броја,
- 2) $x + y = 12$ и во овој случај тоа се броевите: 2394, 2934, 2484, 2844, 2574, 2754 и 2664, т.е. имаме 7 броја.

Според тоа, бараниот број броеви е 11.

136. Определи го бројот на шестцифрените природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на 1250.

Решение. Бројот 1250 како производ на шест едноцифрени броеви може да се запише на единствен начин и тоа: $1250 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Сите броеви чиј производ на цифри е еднаков на 1250 ги добиваме со распоредување на цифрите 1 и 2 на две од шесте места, а потоа на

останатите четири места ја запишуваме цифрата 5. Така за цифрата 1 имаме 6 можности и за секоја од нив за цифрата 2 имаме 5 можности. Конечно, имаме $6 \cdot 5 = 30$ шестцифрените броеви чиј производ на цифри е 1250.

137. Определи го бројот на четирицифрените броеви кои се запишани со различни цифри.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број запишан со различни цифри. За цифрата a имаме 9 можности (не може да биде 0), за цифрата b имаме 9 можности, за цифрата c имаме 8 можности и за цифрата d имаме 7 можности. Според тоа, имаме $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ четирицифрени броеви запишани со различни цифри.

138. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2009 и чиј производ на цифри е еднаков на 10.

Решение. Ако производот на цифрите на даден природен број е 10, тогаш две негови цифри се 2 и 5, па затоа ако е три или повеќецифрен, тогаш останатите негови цифри се единици. Затоа, бараните броеви се: двоцифрени 25, 52, трицифрени 125, 152, 215, 512, 251, 521, четирицифрени 1125, 1152, 1215, 1251, 1512 и 1521. Според тоа, имаме $2 + 6 + 6 = 14$ природни броеви кои се помали од 2009 и чиј производ на цифри е еднаков на 10.

139. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2012 и чиј збир на цифри е поголем од 26.

Решение. Ако бројот е четирицифрен, тогаш цифрата на илјадитите мора да биде 1, а збирот на преостанатите три цифри треба да биде поголем од 26, што значи дека тоа може да бидат цифрите 8, 9 и 9, или 9, 9 и 9. Според тоа, во овој случај ги имаме броевите: 1899, 1989, 1998 и 1999. Трицифрен број чиј збир на цифри е поголем од 26 е само бројот 999, а двоцифрени и едноцифрени броеви со ова својство не постојат. Конечно, имаме 5 броеви кои се помали од 2012 и чиј збир на цифри е поголем од 26.

140. Павел, Саво и Зоран имаат планински куќи. Од куќата на Павел до куќата на Саво може да се стигне или директно за што има 3 патеки или ако се помине покрај куќата на Зоран. Од куќата на Павел до куќата на Зоран исто така има 3 патеки, а од куќата на Зоран до куќата на Саво има 2 патеки. Павел сака да го посети Саво точно еднаш и да се врати, но така што иста патека да не користи повеќе од еднаш.

Колку различни маршрути може да избере Павел? (Маршрутите кои се разликуваат по насоката на движењето се сметаат за различни.)

Решение. Ако Павел не минува покрај куќата на Зоран има 3 варијанти при одење и 2 варијанти при враќање, што значи вкупно $3 \cdot 2 = 6$ маршрути. Ако само на одење минува покрај куќата на Зоран, тогаш Павел има $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ маршрути. Ако само на враќање минува покрај куќата на Зоран, Павел повторно има $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ маршрути. На крајот ако во двете насоки минува покрај куќата на Зоран, Павел има $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ маршрути.

Конечно, Павел може да избере

$$6 + 18 + 18 + 12 = 54 \text{ маршрути.}$$

141. На колку различни начини Самоил, Фросина и Вера може да се поделат 4 еднакви јаболка и 5 еднакви круши (без да ги сечат) така што секој од нив ќе има барем едно јаболко и барем една круша? Не е задолжително секој да има еднаков број плодови.

Решение. Прво секој ќе земе по едно јаболко и по една круша. За последното јаболко имаме 3 можности (С,Ф,В). Остануваат двете круши, кои можеме да ги дадеме на едно дете и имаме 3 можности (С,Ф,В), или да ги дадеме на две деца и повторно се 3 можности (СФ,ДВ,ВС), што значи вкупно $3 + 3 = 6$ можности. Според тоа, имаме $3 \cdot 6 = 18$ различни начини на поделба на плодовите.

142. Во првата фудбалска лига играат 10 екипи. Колку натпревари ќе се одиграат во првенството ако секоја екипа игра точно 4 натпревари со секоја друга екипа?

Решение. Имаме 10 екипи и во еден круг секоја од нив ќе одигра по 9 натпревари. Според тоа, во еден круг вкупно ќе се одиграат $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ натпревари (Зошто?). Конечно, во 4 круга вкупно ќе се одиграат $4 \cdot 45 = 180$ натпревари.

143. Дадена е коцка со должина на раб 3 dm . Определи го бројот на сечењата со кои коцката ќе се расече на коцки со должина на раб 1 dm .

Решение. За да коцката се расече на коцки со должина на раб 1 dm , потребно е секој раб да се расече по двапати. Последното може да се направи со 2 хоризонтални и 4 вертикални сечења. Според тоа, вкупниот број сечења е еднаков на $2 \cdot 4 = 8$.

144. Коцка со раб 4 dm е обоена со црвена боја, а потоа е расечена на коцки со раб 1 dm . Колку од добиените коцки имаат обоени три, две, една и ниту една страна?

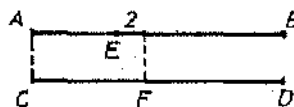
Решение. Мали коцки со три обоени страни се коцките во темињата на големата коцка, со две обоени страни се по 2 на секој раб на големата коцка и со една обоена страна се по 4 на секој сид на големата коцка. Коцката има 8 темиња, 12 рабови и 6 страни, па затоа со три обоени страни имаме 8 коцки, со две обоени страни имаме $12 \cdot 2 = 24$ коцки, со една обоена страна имаме $6 \cdot 4 = 24$ коцки. Големата коцка е расечена на $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ мали коцки, па затоа со ниту една обоена страна имаме $64 - 8 - 24 - 24 = 8$ коцки.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Две отсечки имаат еднакви должини. Ако должината на втората отсечка се намали за 10 cm , тогаш третина од должината на првата отсечка ќе биде за 2 cm пократка од должината на втората отсечка. Определи ги должините на почетните отсечка.

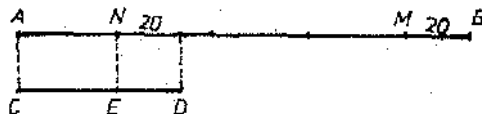
Решение. Нека отсечките се AB и CD (цртеж десно). Тогаш $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. Понатаму, $\overline{FD} = 10\text{ cm}$ и од



условот на задачата следува дека $\overline{CF} = \overline{AE} + 2$. Последното значи дека $\overline{BE} = 2 + \overline{FD}$, па затоа $\frac{2}{3}\overline{AB} = 10 + 2$, од каде добиваме $\overline{AB} = 18\text{ cm}$.

2. Една отсечка е подолга од друга отсечка за 90 cm . Ако двете отсечки се пократки за по 20 cm , тогаш првата отсечка ќе биде четири пати подолга од втората отсечка. Определи ги должините на отсечките.

Решение. Нека првата отсечка е AB , а втората отсечка е CD (цртеж десно). Од условот на задачата следува



$$\overline{AB} = \overline{CD} + 90, \overline{CD} = \overline{CE} + 20, \overline{AB} = \overline{AM} + 20 \text{ и } \overline{AM} = 4\overline{CE}.$$

Спред тоа, $\overline{CD} + 90 = \overline{AM} + 20$, па затоа

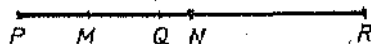
$$\overline{CE} + 20 + 90 = 4\overline{CE} + 20,$$

од каде добиваме $\overline{CE} = 30\text{ cm}$. Значи,

$$\overline{CD} = \overline{CE} + 20 = 50\text{ cm} \text{ и } \overline{AB} = \overline{CD} + 90 = 140\text{ cm}.$$

3. На права p последователни се земени точките P, Q и R . Точката M е средина на отсечката PQ , а точката N е средина на отсечката PR . Докажи дека $\overline{QR} = 2\overline{MN}$.

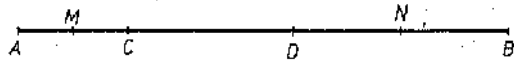
Решение. Од условот на задачата следува дека $\overline{PN} = \overline{NR}$ и $\overline{PQ} = 2\overline{MQ}$ (цртеж десно). Имаме,



$$\begin{aligned}
 \overline{QR} &= \overline{NR} + \overline{QN} = \overline{PN} + \overline{QN} \\
 &= (\overline{PQ} + \overline{QN}) + \overline{QN} = 2\overline{MQ} + 2\overline{QN} \\
 &= 2(\overline{MQ} + \overline{QN}) = 2\overline{MN}.
 \end{aligned}$$

4. Отсечката AB е поделена на три отсечки во однос $2:3:4$. Растојанието меѓу средините на крајните отсечки е еднакво на 6 cm . Определи ја должината на отсечката AB .

Решение. Нека C и D се точките на AB такви што $\overline{AC}:\overline{CD}:\overline{DB}=2:3:4$ и M



и N се средините на AC и DB (цртеж десно). Тогаш $\overline{AC} = 2\overline{AM}$, па затоа $\overline{CD} = 3\overline{AM}$ и $\overline{DB} = 4\overline{AM}$. Но, N е средина на DB , па затоа $\overline{DN} = 2\overline{AN}$. Според тоа,

$$6 = \overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CD} + \overline{DN} = \overline{AM} + 3\overline{AM} + 2\overline{AM} = 6\overline{AM},$$

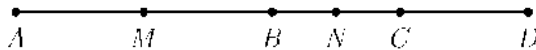
од каде добиваме $\overline{AM} = 1\text{ cm}$. Конечно,

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} + 3\overline{AM} + 4\overline{AM} = 9\overline{AM} = 9\text{ cm}.$$

5. На права се дадени точките A, B, C и D , последователно. Точките M и N се средини на отсечките AB и BC . Определи ја должината на отсечката CD ако $\overline{AD} = 32\text{ cm}$ и $\overline{MN} = 1,5\text{ dm}$.

Решение. Нека $\overline{MB} = a$

и $\overline{BN} = b$. Тогаш



$$\overline{MN} = a + b = 1,5\text{ dm} = 15\text{ cm}.$$

Од $\overline{AB} = 2a$ и $\overline{BC} = 2b$, следува $\overline{AC} = 2a + 2b = 2(a + b) = 30\text{ cm}$. Според тоа, $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = 32 - 30 = 2\text{ cm}$.

6. На права се дадени три точки A, B и C такви што $\overline{AB} = 30\text{ mm}$ и $\overline{AC} = 50\text{ mm}$. Нека точката K е средина на отсечката BC , точката M е средина на отсечката AB и точката N е средина на отсечката AC . Определи ги должините на отсечките BC , AK и MN .

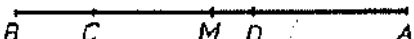
Одговор. Ако точката B е меѓу точките A и C , тогаш

$$\overline{BC} = 20\text{ mm}, \overline{AK} = 40\text{ mm}, \overline{MN} = 10\text{ mm}.$$

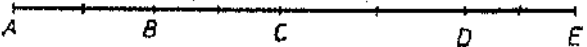
Ако точката A е меѓу точките B и C , тогаш

$$\overline{BC} = 80 \text{ mm}, \overline{AK} = 10 \text{ mm}, \overline{MN} = 40 \text{ mm}.$$

7. Дадена е отсечка AB , $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$. Точката C припаѓа на отсечката AB и е оддалечена од точката B за една петтина од должината на отсечката AB . Точката D е средина на отсечката AC . Определи го растојанието од точката D до средината на отсечката AB ?

Решение. Имаме $\overline{CA} = \frac{4}{5}\overline{AB}$, па  затоа $\overline{CA} = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 \text{ cm}$ (цртеж десно). Точката M е средина на отсечката AB , па затоа $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, т.е. $\overline{AM} = 10 \text{ cm}$. Понатаму, $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, па затоа $\overline{AD} = 8 \text{ cm}$. Конечно, бараното растојание е $\overline{MD} = \overline{AM} - \overline{AD} = 2 \text{ cm}$.

8. Дадена отсечка со три точки е поделена на 4 различни делови. Растојанието меѓу средините на внатрешните делови е еднакво на 6 cm , а растојанието меѓу средините на крајните делови е еднакво на 16 cm . Определи ја должината на дадената отсечка.

Решение. Бидејќи  растојанието меѓу средините на внатрешните делови е 6 cm , збирот на внатрешните делови е $\overline{BC} + \overline{CD} = 12 \text{ cm}$ (цртеж десно). Според тоа, половина од збирот на крајните делови т.е. $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DE})$ е еднаков на $16 - 12 = 4 \text{ cm}$, па затоа збирот на крајните делови е $\overline{AB} + \overline{DE} = 8 \text{ cm}$. Конечно, должината на дадената отсечка е $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = 20 \text{ cm}$

9. Дадена отсечка е поделена со три точки на четири дела така што вториот дел е два пати подолг од првиот, третиот дел е три пати подолг од првиот и четвртиот дел е два пати подолг од вториот. Растојанието меѓу средините на првиот и вториот дел е 3 cm . Определи ја должината на оваа отсечка.

Решение. Нека дадената отсечка е AE и нека делбените точки се  B, C и D . Тогаш $\overline{BC} = 2\overline{AB}$, $\overline{CD} = 3\overline{AB}$ и $\overline{DE} = 2\overline{BC} = 4\overline{AB}$, па затоа отсечка AE се состои од десет делови, секој од кои е со должина

еднаква на $\overline{AB}$. Бидејќи растојанието меѓу средините на AB и BC е 3 cm , заклучуваме дека $\overline{AB} + \overline{BC} = 6\text{ cm}$. Значи, $\overline{AB} + 2\overline{AB} = 6\text{ cm}$, па затоа $\overline{AB} = 2\text{ cm}$. Конечно, $\overline{AE} = 10\overline{AB} = 20\text{ cm}$.

10. Должината на отсечката AB е еднаква на 40 cm . Отсечката AB со три точки е поделена на четири дела. Растојанието меѓу средините на крајните делови е 33 cm . Определи го растојанието меѓу средините на внатрешните делови.

Решение. Нека C, D и E се делбените точки и O и Q се средините на отсечките AC и EB , а T и R се средините на отсечките CD и DE . Имаме, $\overline{OQ} = 33\text{ cm}$, па затоа

$$\overline{AO} + \overline{QB} = \overline{AB} - \overline{OQ} = 7\text{ cm}.$$

Значи,

$$\overline{AC} + \overline{EB} = 2(\overline{AO} + \overline{QB}) = 14\text{ cm},$$

па затоа

$$\overline{CE} = \overline{AB} - (\overline{AC} + \overline{EB}) = 26\text{ cm}.$$

Конечно, $\overline{TR} = \frac{1}{2}\overline{CE} = 13\text{ cm}$.

11. На отсечката MN се распоредени точките A, B, C, D (во овој редослед) така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на втората и четвртата отсечка е еднакво на 28 cm , а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е еднакво на 51 cm . Определи ја должината на отсечката MN .

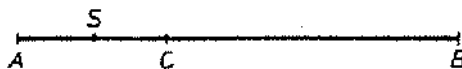
Решение. Од $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ следува дека растојанието меѓу средините на втората и четвртата отсечка е четири пати поголемо од половината од една од наведените три отсечки (AB, BC, CD), па затоа $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = 28:4 = 7\text{ cm}$.

Според тоа, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 14\text{ cm}$, што значи $\overline{AD} = 42\text{ cm}$. Растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е еднакво на 51 cm и тоа е за $51 - 42 = 9\text{ cm}$ подолго од должината на отсечката AD . Според тоа, $\frac{\overline{MA}}{2} + \frac{\overline{DN}}{2} = 9\text{ cm}$, па затоа $\overline{MA} + \overline{DN} = 18\text{ cm}$.

Конечно, $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = 60 \text{ cm}$.

12. Отсечката AB со точката C е поделена на два дела кои по должина се разликуваат за 1 cm . Средината на пократкиот дел е пет пати поблиску до точката A отколку до точката B . Определи ја должината на отсечката AB .

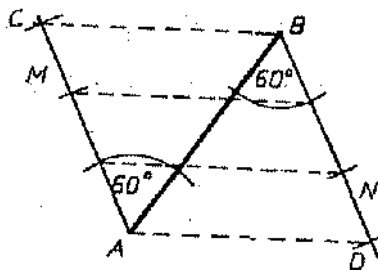
Решение. Нека S е средината на отсечката AC (цртеж десно).



Бидејќи $\overline{AS}$ е пет пати помала од $\overline{SB}$, заклучуваме дека $\overline{AS}$ е четири пати помала од $\overline{CB}$. Значи, $\overline{CB} = 4\overline{AS} = 2\overline{AC}$ и како $\overline{CB} = \overline{AC} + 1$, добиваме $\overline{AC} = 1 \text{ cm}$, па затоа $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 3\overline{AC} = 3 \text{ cm}$.

13. Дадена е отсечка AB . Само со помош на линијар и шестар подели ја оваа отсечка на три еднакви делови.

Решение. Во точките A и B со даден радиус опишуваме лаци и низ точките A и B конструираме полуправи AM и BN кои со AB зафаќаат агол од 60° (цртеж десно). На полуправите AM и BN по три пати го нанесуваме радиусот на нацртаните кружници. Крајните точки C и D ги поврзуваме сп точките B и A , соодветно. Сега ги поврзуваме соодветните точки на отсечките AC и DB така што добиваме паралелни отсечки на AD и CB . Овие отсечки ја сечат отсечката AB во две точки кои истата ја делат на три еднакви дела. Обиди се самостојно да ја докажеш точноста на оваа конструкција.

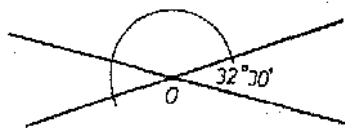


14. Основата на зграда на планот A е намалена 200 пати, а потоа е изработен планот B во кој е направено зголемување 4 пати во однос на планот A . Ако ширината на зградата на планот B еднаква на 18 cm , колку изнесува нејзината ширина на планот A ?

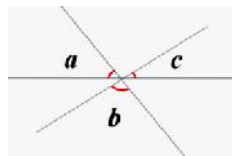
Решение. Планот A е работен во размер $1:200$, а планот B е работен во размер $1:50$. Според тоа, вистинската ширина на зградата е $50 \cdot 18 = 900 \text{ cm}$, па затоа таа на планот A изнесува $900:200 = 4,5 \text{ cm}$.

15. Дадени се прави кои се сечат така што збирот на трите од четирите добиени агли е еднаков на $212^{\circ}30'$. Определи ги големините на секој од нацртаните агли.

Решение. Од $212^{\circ}30' - 180^{\circ} = 32^{\circ}30'$ следува дека накрсните остри агли се еднакви на $32^{\circ}30'$ (цртеж десно). Според тоа, парот накрсни тапи агли се еднакви на $180^{\circ} - 32^{\circ}30' = 147^{\circ}30'$.



16. За аглите на цртежот десно е познато дека аголот b е два пати поголем од аголот a , а аголот a е три пати поголем од аголот c . Колкав е аголот a ?



Решение. Аголот меѓу аглите a и c е еднаков со аголот b како накрсни агли, па збирот на трите агли е 180° . Од условите на задачата, $a = 3c$, $b = 2a = 6c$ од каде што следува дека: $3c + 6c + c = 180^{\circ}$, па затоа $10c = 180^{\circ}$, т.е. $c = 18^{\circ}$. Конечно $a = 3c = 54^{\circ}$.

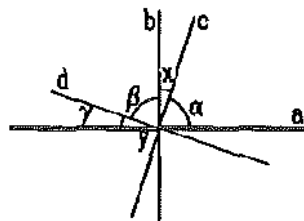
17. а) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $7a$.
 б) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $4a$.
 в) Определи го аголот a ако збирот на неговите комплементен и суплементен агол е еднаков на $8a$.

Решение. а) Комплементниот агол на a е $90^{\circ} - a$, а неговиот суплементен агол е $180^{\circ} - a$. Значи, $(90^{\circ} - a) + (180^{\circ} - a) = 7a$, од каде добиваме $9a = 270^{\circ}$, т.е. $a = 30^{\circ}$.

б) Аналогно како под а) наоѓаме $(90^{\circ} - a) + (180^{\circ} - a) = 4a$, од каде добиваме $6a = 270^{\circ}$, т.е. $a = 45^{\circ}$.

в) Аналогно како под а) наоѓаме $(90^{\circ} - a) + (180^{\circ} - a) = 8a$, од каде добиваме $10a = 270^{\circ}$, т.е. $a = 27^{\circ}$.

18. На цртежот десно правите a, b, c и d се такви што a е нормална на b и c е



нормална на d . Определи ги аглиите a, b и g ако се знае дека $x = \frac{4}{5}y$.

Решение. Аглиите a и y се накрсни, па затоа тие се еднакви. Според тоа, x и y се комплементни агли, па затоа $y + \frac{4}{5}y = 90^\circ$, од каде добиваме $y = 50^\circ$. Значи, $x = 40^\circ$. Конечно, $a = b = 50^\circ$ и $g = 40^\circ$

19. Петтина од аголот x е еднаква на седмина од неговиот суплементен агол y . Определи го аголот z кој е комплементен на аголот x .

Решение. Од условот на задачата следува дека аголот x е еднаков на $\frac{5}{12}$, а аголот y е еднаков на $\frac{7}{12}$ од рамниот агол. Бидејќи $\frac{1}{12}$ од рамниот агол е еднаква на $180^\circ : 12 = 15^\circ$ заклучуваме дека

$$x = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ, y = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ \text{ и } z = 90^\circ - x = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

20. Разликата на два напоредни агли е еднаква на $\frac{4}{7}$ од поголемиот агол. Определи ги овие напоредни агли.

Решение. Нека x е поголемиот агол. Тогаш помалиот агол е $180^\circ - x$, па затоа $x - (x - 180^\circ) = \frac{4}{7}x$. Решението на последната равенка е $x = 126^\circ$, а вториот агол е $180^\circ - x = 54^\circ$.

21. Правите p и q се сечат. Определи ги добиените агли, ако се знае дека:

- а) збирот на два од четирите добиени агли е еднаков на 73° ,
- б) разликата на два од четирите добиени агли е еднаква на 73° ,
- в) збирот на три од четирите добиени агли е еднаков на 273° .

Решение. а) Бидејќи збирот на два од четирите добиени агли е еднаков на 73° , т.е. е помал од правиот агол заклучуваме дека тоа се двата накрсни агли. Затоа, два агли се еднакви на $73^\circ : 2 = 36^\circ 30'$, а два агли се еднакви на $180^\circ - 36^\circ 30' = 143^\circ 30'$.

б) Бидејќи разликата на два од четирите добиени агли е еднаква на 73° , а двата остри агли се еднакви, заклучуваме дека во случајов разликата на суплементните агли е 73° . Сега бидејќи збирот на суплементните агли е 180° , добиваме дека едниот агол е еднаков на $\frac{73^\circ + 180^\circ}{2} = 126^\circ 30'$, а другиот агол е еднаков на $180^\circ - 126^\circ 30' = 53^\circ 30'$.

в) Два агли се еднакви на четвртиот агол, т.е. се еднакви на $360^\circ - 273^\circ = 87^\circ$, а другите два агли се еднакви на $180^\circ - 87^\circ = 93^\circ$.

22. Ако се собере половината, четвртината и осмината на аголот a , тогаш се добива суплементниот агол на аголот a . Определи го аголот кој е комплементен на суплементниот агол на аголот a .

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} = 180^\circ - a$, па затоа $\frac{7}{8}a + a = 180^\circ$, т.е. $\frac{15}{8}a = 180^\circ$. Значи, $a = 96^\circ$. Суплементниот агол на a е $b = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$. Конечно, комплементниот агол на b е $90^\circ - 84^\circ = 6^\circ$.

23. Две прави се сечат во точка S и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е еднаков на $\frac{2}{11}$ од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги мерните броеви на секој од четирите агли.

Решение. Нека мерниот број на остриот агол е x . Тогаш збирот на двата остри агли е $2x$ и тој е еднаков на $\frac{2}{11}$ од тапиот агол. Според тоа, тапиот агол е еднаков на $11x$, па затоа $x + 11x = 180^\circ$, т.е. $x = 180^\circ : 12 = 15^\circ$. Конечно, тапиот агол е еднаков на $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

24. Аголот x е еднаков на $\frac{2}{3}$ од својот комплементен агол. Аголот y е суплементен на аголот x . Изрази го аголот x со помош на аголот y .

Решение. Бидејќи аголот x е еднаков на $\frac{2}{3}$ од својот комплементен агол, заклучуваме дека комплементниот агол е еднаков на $\frac{3}{2}x$. Значи, $x + \frac{3}{2}x = 90^\circ$, од каде добиваме $x = 36^\circ$. Тогаш

$$y = 180^\circ - x = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ.$$

Конечно, бидејќи $144^\circ : 36^\circ = 4$ добиваме дека $x = \frac{1}{4}y$.

25. Аглите a и b се суплементни, а аглите b и g се комплементни. Определи ги аглите a, b и g , ако аголот a е пет пати поголем од:

а) аголот b ,

б) аголот g .

Решение. Според условот на задачата $a + b = 180^\circ$ и $b + g = 90^\circ$.

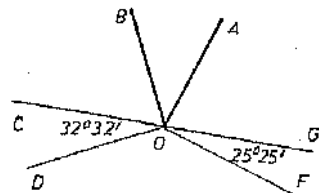
- а) Ако $a = 5b$, тогаш $6b = 180^\circ$, па затоа $b = 30^\circ$ и $g = 90^\circ - b = 60^\circ$.
 б) Ако $a = 5g$, тогаш $5g + b = 180^\circ$ и $b + g = 90^\circ$, па затоа $4g = 90^\circ$,
 т.е. $g = 22^\circ 30'$. Сега, $b = 90^\circ - g = 67^\circ 30'$ и $a = 180^\circ - b = 112^\circ 30'$.

26. Определи го аголот a ако неговиот суплементен агол е за 30° поголем од неговиот двократен комплементен агол.

Решение. Суплементниот агол на a е $180^\circ - a$, а комплементниот агол е $90^\circ - a$. Од условот на задачата следува

$$180^\circ - a = 30^\circ + 2(90^\circ - a), \text{ т.е. } a = 30^\circ.$$

27. Дадена е права CG , точка O на неа и прави агли BOD и FOA (цртеж десно). Ако $\angle COD = 32^\circ 32'$ и $\angle FOG = 25^\circ 25'$, определи го аголот AOB .



Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \angle AOG &= 90^\circ - \angle FOG \\ &= 90^\circ - 25^\circ 25' = 64^\circ 35'. \end{aligned}$$

Слично,

$$\angle BOF = 90^\circ - \angle COD = 90^\circ - 32^\circ 32' = 57^\circ 28'.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \angle AOB &= 180^\circ - (\angle AOG + \angle BOF) = 180^\circ - (64^\circ 35' + 57^\circ 28') \\ &= 180^\circ - 122^\circ 3' = 57^\circ 57'. \end{aligned}$$

28. Нека a и b се суплементни, а $\frac{2}{5}a$ и b се комплементни агли. Определи ја разликата на аглите a и b .

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} a + b = 180^\circ \\ \frac{2}{5}a + b = 90^\circ. \end{cases}$$

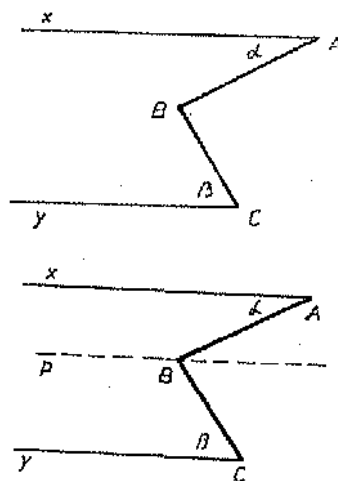
Од првата равенка ја одземеме втората равенка и добиваме $\frac{3}{5}a = 90^\circ$,

т.е. $a = 150^\circ$. Значи, $b = 180^\circ - a = 30^\circ$.

29. На цртежот десно полуправата Ax е паралелна со полуправата Cy , $\alpha = 32^\circ$ и $\beta = 48^\circ$. Определи го аголот ABC .

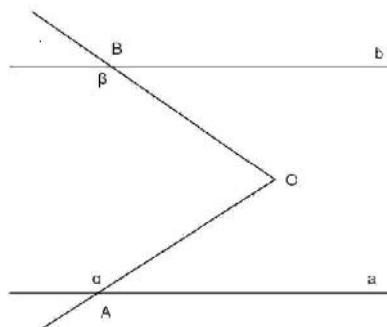
Решение. Низ точката B повлекуваме права паралелна на полуправите Ax и Cy (цртеж десно).

Со оваа права барниот агол ABC е поделен на два гли. Едниот од овие агли е еднаков на аголот α , а другиот е еднаков на аголот β (како наизменични агли). Според тоа, бараниот агол е еднаков на збирот на аглите α и β , т.е. $\angle ABC = \alpha + \beta = 80^\circ$.



30. Правите a и b прикажани на цртежот десно се паралелни. Ако $\alpha = 169^\circ$ и $\beta = 151^\circ$, определи го $\angle AOB$.

Решение. Низ точката O повлекуваме права c паралелна на правите a и b . Се при ознаки



како на цртежот лево добиваме

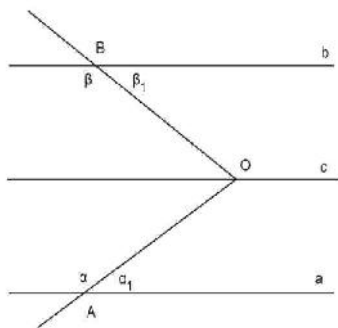
$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 169^\circ = 11^\circ \text{ и}$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 151^\circ = 29^\circ.$$

Според тоа,

$$\angle AOB = \alpha_1 + \beta_1 = 11^\circ + 29^\circ = 40^\circ,$$

бидејќи аглите на кои правата c го дели $\angle AOB$ се еднакви на аглите α_1 и β_1 како наизменични агли.



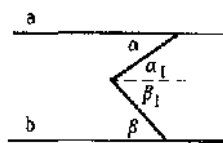
31. На цртежот десно правите a и b се паралелни и важи $\alpha = 34^\circ 52'$ и $\beta = 47^\circ 39'$. Определи го аголот γ .



Решение. Низ темето на аголот g повлекуваме права паралелна на правите a и b , која го дели аголот g на два агли a_1 и b_1 (види цртеж).

Јасно, $a = a_1$ и $b = b_1$, од каде добиваме

$$g = a_1 + b_1 = 34^\circ 52' + 47^\circ 39' = 82^\circ 31'.$$



32. Паралелните прави a и b се пресечени со правите c и d така што $\angle(a, d) = a = 45^\circ 52' 45''$ и $\angle(b, c) = b = 30^\circ 7' 15''$. Определи го аголот g меѓу правите c и d .

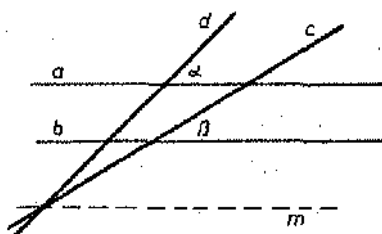
Решение. Низ пресекот на правите c и d повлекуваме права m паралелна на правите a и b (цртеж десно). Имаме

$$\angle(c, m) = b \text{ и } \angle(d, m) = a,$$

како агли со паралелни краци.

Според тоа,

$$\begin{aligned} g &= \angle(c, d) = \angle(d, m) - \angle(c, m) \\ &= a - b = 45^\circ 52' 45'' - 30^\circ 7' 15'' \\ &= 15^\circ 45' 30''. \end{aligned}$$



33. Половината од аголот a е за 30° поголема од четвртината на неговиот суплементен агол. Определи го аголот a .

Решение. Од условот на задачата следува $\frac{a}{2} = 30^\circ + \frac{1}{4}(180^\circ - a)$. Понатаму, последователно добиваме

$$\frac{a}{2} = 30^\circ + 45^\circ - \frac{a}{4}$$

$$\frac{3a}{4} = 75^\circ$$

$$a = 100^\circ.$$

34. Остриот агол a и шестина од неговиот суплементен агол се комплементни агли. Определи го аголот a .

Решение. Суплементниот агол на аголот a е еднаков на $180^\circ - a$.

Според условот аглите a и $\frac{1}{6}(180^\circ - a)$ се комплементни, па затоа важи

$$a + \frac{1}{6}(180^\circ - a) = 90^\circ,$$

од каде наоѓаме

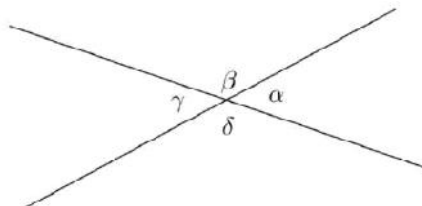
$$a + 30^\circ - \frac{1}{6}a = 90^\circ$$

$$\frac{5}{6}a = 60^\circ$$

$$a = \frac{6}{5} \cdot 60^\circ = 72^\circ.$$

35. Две прави се сечат и формираат четири агли. Определи ги овие агли ако едниот од нив е девет пати помал од збирот на преостанатите три.

Решение. При ознаки како на цртежот десно важи $a = g$ и $b = d$, како накрсни агли. Притоа $a < b$, па затоа важи $b + g + d = 9a$, т.е. $2b + a = 9a$, односно $b = 4a$.



Сега од $a + b = 180^\circ$ следува $a + 4a = 180^\circ$, т.е. $g = a = 36^\circ$ и затоа $d = b = 144^\circ$.

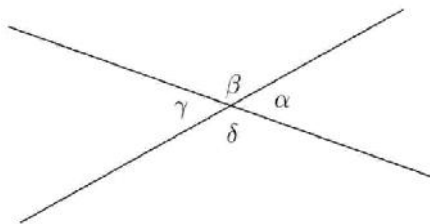
36. Правите a и b се сечат и формираат четири агли: два остри агли a и g , и два тапи агли b и d . Определи ги овие агли ако

$$7(a + g) = 5(b + d).$$

Решение. Јасно, $a = g$ и $b = d$, па затоа $14a = 10b$, т.е. $7a = 5b$.

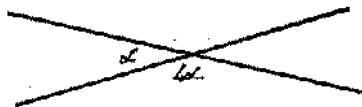
Сега, од бидејќи $a = 180^\circ - b$, добиваме $7(180^\circ - b) = 5b$, т.е.

$12b = 7 \cdot 180^\circ$. Значи, $b = 105^\circ$ и затоа $a = 75^\circ$.



37. Две прави се сечат во точка K и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половина од едниот накрсен тап агол. Определи ги мерните броеви на секој од овие агли.

Решение. Нека остриот накрсен агол е еднаков на a . Тогаш збирот на острите накрсни агли е $2a$, па од условот на задачата следува дека тапиот накрсен агол е еднаков на $2 \cdot 2a = 4a$ (цртеж десно).



Според тоа, $a + 4a = 180^\circ$ од каде добиваме $a = 36^\circ$. Конечно, тапиот накрсен агол е еднаков на $4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$.

38. Осмина на аголот a е еднаква на десеттина на неговиот комплементен агол b . Определи го збирот на суплементните агли на агли a и b .

Решение. *Прв начин.* Според условот на задачата $\frac{a}{8} = \frac{b}{10}$, односно $a = \frac{8}{10}b$ и $a + b = 90^\circ$. Значи, $\frac{8}{10}b + b = 90^\circ$, т.е. $b = 50^\circ$ и затоа $a = 90^\circ - b = 40^\circ$. Соодветните суплементни агли се

$$y = 180^\circ - b = 130^\circ \text{ и } x = 180^\circ - a = 140^\circ,$$

па бараниот збир е $x + y = 130^\circ + 140^\circ = 270^\circ$.

Втор начин. Суплементните агли на a и b се агли $x = 180^\circ - a$ и $y = 180^\circ - b$. Бидејќи a и b се комплементни агли добиваме $a + b = 90^\circ$. Според тоа,

$$x + y = 180^\circ - a + 180^\circ - b = 360^\circ - (a + b) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

39. Дванаесеттина на аголот a е еднаква на петнаесеттина на неговиот комплементен агол b . Определи го збирот на суплементните агли на агли a и b .

Решение. *Прв начин.* Според условот на задачата $\frac{a}{12} = \frac{b}{15}$, односно $a = \frac{12}{15}b$ и $a + b = 90^\circ$. Значи, $\frac{12}{15}b + b = 90^\circ$, т.е. $b = 50^\circ$ и затоа $a = 90^\circ - b = 40^\circ$. Соодветните суплементни агли се

$$y = 180^\circ - b = 130^\circ \text{ и } x = 180^\circ - a = 140^\circ,$$

па бараниот збир е $x + y = 130^\circ + 140^\circ = 270^\circ$.

Втор начин. Суплементните агли на a и b се агли $x = 180^\circ - a$ и $y = 180^\circ - b$. Бидејќи a и b се комплементни агли добиваме $a + b = 90^\circ$. Според тоа,

$$x + y = 180^\circ - a + 180^\circ - b = 360^\circ - (a + b) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

40. Разликата на два комплементни агли е 1° . Определи ги овие агли.

Решение. Според условот на задачата комплементните агли се a и $a + 1^\circ$. Според тоа, $a + a + 1^\circ = 90^\circ$, од каде добиваме

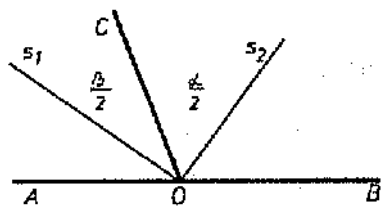
$$a = (90^\circ - 1^\circ) / 2 = 44^\circ 30' \text{ и } a + 1^\circ = 45^\circ 30'.$$

41. Едниот од два комплементни агли е за $16^\circ 10' 30''$ поголем од другиот. Определи ги овие агли.

Решение. Нека едниот комплементен агол е a . Тогаш другиот агол е $a + 16^\circ 10' 30''$, па затоа $a + a + 16^\circ 10' 30'' = 90^\circ$, од каде добиваме $a = 36^\circ 54' 45''$ и $a + 16^\circ 10' 30'' = 53^\circ 5' 15''$.

42. Симетралите на два соседни агли a и b се заемно нормални. Определи ги аглите a и b ако $a - b = 32^\circ 22' 22''$.

Решение. Нека соседните агли се $\angle AOC = b$ и $\angle COB = a$ и s_1 и s_2 се нивните симетри (цртеж десно). Според условот на задачата $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 90^\circ$, т.е. $a + b = 180^\circ$. По-



натаму, $a - b = 32^\circ 22' 22''$ и ако ги

собереме последните две равенки добиваме $2a = 212^\circ 22' 22''$, од каде наоѓаме $a = 106^\circ 11' 11''$. Конечно, $b = a - 32^\circ 22' 22'' = 73^\circ 48' 49''$.

43. Аголот a е поголем од својот комплементен агол за толку колку што е помал од својот суплементен агол. Определи го аголот a .

Решение. Нека b е комплементен со a и g е суплементен со a , т.е. $a + b = 90^\circ$ и $g + a = 180^\circ$. Понатаму, од условот на задачата следува $a - b = g - a$, па затоа $2a = b + g$. Ако ги собереме првите две равенства добиваме $2a + b + g = 270^\circ$. Сега од последните две равенства наоѓаме $4a = 270^\circ$, т.е. $a = 67^\circ 30'$.

44. Определи го аголот кој е 24 пати поголем од својот напореден агол.

Решение. Збирот на два напоредни агли е еднаков на 180° . Нека помалиот агол е a . Тогаш поголемиот агол е $24a$, па затоа $a + 24a = 180^\circ$, па затоа $a = 7^\circ 12'$.

Конечно, бараниот агол е $24a = 172^\circ 48'$.

45. Нацртај агол AOB . Произволна кружница со центар во O на краците на аголот отсекува тетива CD . Ако ја „пренесуваме“ тетивата CD на кружницата почнувајќи од точката C , секогаш во иста насока, тогаш по 255 пренесувања врвот на шестарот за првпат повторно ќе биде во точката C . Притоа точно 34 пати е обиколена кружницата. Определи го аголот AOB .

Решение. Од условот на задачата следува дека $255\angle AOB = 34 \cdot 360^\circ$, од каде наоѓаме $\angle AOB = 48^\circ$.

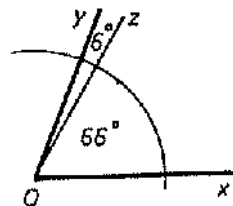
46. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во моментот кога часовникот покажува $3h15min$.

Решение. За 1 час минутната стрелка опишува цел круг, а часовната опишува $\frac{1}{12}$ од кругот. Значи, за 1 min минутната стрелка опишува $360^\circ : 60 = 6^\circ$, а часовната стрелка опишува $(360^\circ : 12) : 60 = 0,5^\circ = 30'$. Во $3h$ стрелките зафаќаат агол од 90° , по што минутната стрелка ја пристигнува часовната стрелка. За 15 min минутната стрелка ќе опише агол од $15 \cdot 6^\circ = 90^\circ$, а часовната стрелка ќе опише агол од $15 \cdot 0,5^\circ = 7,5^\circ = 7^\circ 30'$. Според тоа, во $3h15min$ стрелките на часовникот ќе зафаќаат агол од $90^\circ - 90^\circ + 7^\circ 30' = 7^\circ 30'$.

47. Нацртај агол со големина 66° . Со помош на шестар и линијар подели го овој агол на 11 еднакви делови.

Решение. Нека $\angle xOy = 66^\circ$. Имаме $66 : 11 = 6$.

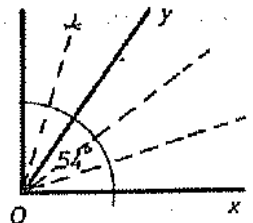
Над кракот Ox конструираме $\angle xOz = 60^\circ$. Значи, $\angle zOy = 66^\circ - 60^\circ = 6^\circ$. Сега доволно е аголот $\angle zOy$ уште девет пати да го нанесеме над кракот Ox .



48. Нацртај агол со големина 54° . Со помош на шестар и линијар подели го овој агол на 3 еднакви делови.

Решение. Нека $\angle xOy = 54^\circ$. Овој агол ќе го дополниме до 90° , при што ќе добиеме агол од $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

На овој агол ја повлекуваме симетралата со што го делиме на два агли од по $26^\circ : 2 = 18^\circ$. Понатаму, бидејќи $54:3=18$, заклучуваме дека бараната поделба на $\angle xOy = 54^\circ$ ја добиваме ако двапати над кракот Ox го нанесеме едниот од добиените два агли.

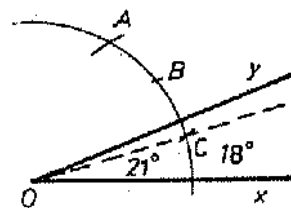


49. Даден е $\angle xOy = 21^\circ$. Користејќи само линијар и шестар подели го овој агол на 7 делови.

Решение. Над кракот Ox конструираме агол $\angle xOA = 60^\circ$ (цртеж десно). Од точката A двапати го одземаме лакот над $\angle xOy = 21^\circ$ и ја добиваме точката C при што важи

$$\angle xOC = 60^\circ - 21^\circ - 21^\circ = 18^\circ.$$

Според тоа, $\angle COy = 3^\circ$, па бараната поделба ја добиваме ако овој агол пет пати го нанесеме над кракот Ox .



50. На маса за билијар $MNPQ$ во точките A и B се наоѓаат топки. Топката во точката A е удрена, по што таа се добива од работ PQ во точката X , се одбива од работ QM во точката Y и ја погодува топката во точката B . Определи ги точките X и Y ако се знае дека топката се одбива од работ така што правецот по кој доаѓа и правецот по кој се одбива со работ зафаќаат еднакви агли.



Упатство. Ако A' и B' се точки симетрични на точките A и B во однос на страните PQ и QM , соодветно, тогаш точките A', X, Y и B'' се колинерани бидејќи

$$\angle PXA' = \angle PXA = \angle QXY \text{ и } \angle MYB' = \angle MYB = \angle QYX.$$

Значи, точките X и Y се добиваат во пресек на правата $A'B'$ со рабовите PQ и QM , соодветно.

V.2. ТРИАГОЛНИК

51. Должините на страните на еден триаголник во сантиметри се изразени со природни броеви. Мерниот број на едната страна е 5, а на другата е 1. Определи го мерниот број на третата страна.

Решение. Должината x на третата страна е поголема од разликата на должините на другите две страни, а е помала од збирот на должините на другите две страни. Според тоа, $5-1 < x < 5+1$ и како x е природен број добиваме $x=5$.

52. Триаголник чии должини на страни во сантиметри се изразени со природни броеви има периметар 10 cm . Определи ги сите триаголници со ова својство.

Упатство. Нека a, b и c се должините на страните. Претпостави дека $a \leq b \leq c$ и искористи дека збирот на должините на било кои две страни е поголем од должината на трета страна, а апсолутната вредност на разликата на било кои две страни е помала од должината на третата страна.

53. Определи ги должините на страните a, b и c на триаголникот, ако $a+b=22\text{ cm}$, $b+c=26\text{ cm}$ и $c+a=32\text{ cm}$.

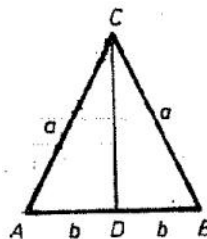
Решение. Ако ги собереме дадените равенства добиваме

$$2(a+b+c)=80\text{ cm}, \text{ т.е. } a+b+c=40\text{ cm}.$$

Значи, $c=a+b+c-(a+b)=40-22=18\text{ cm}$ и аналогно $a=14\text{ cm}$ и $b=8\text{ cm}$.

54. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Точката D е средина на страната AB . Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на 50 cm , а периметарот на $\triangle ACD$ е еднаков на 40 cm . Определи ја должината на отсечката CD .

Решение. Да означиме $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, $\overline{AB} = 2b$, $\overline{AD} = b$ и $\overline{CD} = c$ (цртеж десно). Од $\triangle ABC$ следува $2a+2b=50$, т.е. $a+b=25$, а од $\triangle ACD$ следува $a+b+c=40$. Според тоа, $25+c=40$, т.е. $c=15\text{ cm}$.



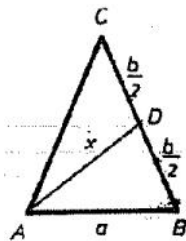
55. Периметарот на рамнокракиот $\triangle ABC$ е еднаков на 50 cm . На кракот BC е повлечена тежишната линија AD . Определи ги должините на

страните на $\triangle ABC$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е за 4 cm поголем од периметарот на $\triangle ABD$.

Решение. Да означиме $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ и $\overline{AD} = x$. Од условот на задачата следува

$$b + x + \frac{b}{2} = a + x + \frac{b}{2} + 4, \text{ т.е. } b = a + 4.$$

Понатаму, $2b + a = 50$, па затоа $3a + 8 = 50$, од каде добиваме $a = 14\text{ cm}$. Конечно, $b = a + 4 = 18\text{ cm}$.

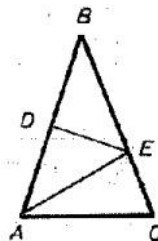


56. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{AC} = 10\text{ cm}$. Од средината D на страната AB повлечена е нормала DE на страната AB , која ја сече страната BC во точката E . Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на 40 cm . Определи го периметарот на $\triangle AEC$.

Решение. Од условот на задачата следува

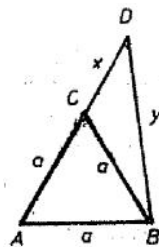
$$\overline{AB} = \overline{BC} = (40 - 10) : 2 = 15\text{ cm}.$$

Точката E припаѓа на симетралата на отсечката AB , па затоа $\overline{AE} = \overline{BE}$ и важи $\overline{AE} + \overline{EC} = \overline{BE} + \overline{EC} = 15\text{ cm}$ (цртеж десно). Според тоа, периметарот на $\triangle AEC$ е еднаков на $\overline{AE} + \overline{EC} + \overline{AC} = 15 + 10 = 25\text{ cm}$.



57. Страната AC на рамностраниот $\triangle ABC$ е продолжена преку темето C до точка D . Периметарот на $\triangle ABD$ е еднаков на 67 cm , а периметарот на $\triangle BCD$ е еднаков на 52 cm . Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

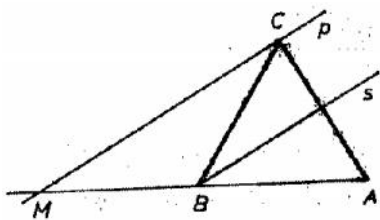
Решение. При ознаки како на цртежот десно за периметарот на $\triangle ABD$ добиваме: $2a + x + y = 67$, а за периметарот на $\triangle BCD$ добиваме $a + x + y = 52$. Ако од првата ја одземеме втората равенка добиваме $a = 15\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на рамностраниот $\triangle ABC$ е еднаков на $3a = 45\text{ cm}$.



58. Низ темето C на рамностраниот $\triangle ABC$ е повлечена права p паралелна со симетралата s на $\angle ABC$. Нека M е точката во која правата p ја сече правата AB . Ако $\overline{CM} = 17\text{ cm}$ и периметарот на $\triangle BMC$ е еднаков на 37 cm , определи го периметарот на $\triangle ABC$.

Решение. Правите p и s се паралелни, па затоа $\angle CMB = \angle sBA$ и $\angle MCB = \angle CBs$. Но, s е симетрала на $\angle ABC$, па затоа

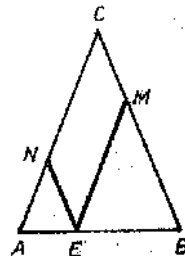
$\angle CMB = \angle sBA = \angle CBs = \angle MCB$,
т.е. $\triangle BMC$ е рамнокрак. Според тоа,
 $\overline{MB} = \overline{BC} = (37 - 17) = 10 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на $3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}$.



59. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$. Низ произволна точка E на страната AB се повлчени две прави паралелни со краците на $\triangle ABC$. Правите ги сечат страната BC во точка M и страната AC во точка N . Определи ја разликата на периметрите на $\triangle ABC$ и четириаголникот $EMCN$.

Решение. Имаме $\angle CAB = \angle MEC$ како агли со паралелни краци и бидејќи $\angle CAB = \angle EBM$ добиваме дека $\triangle EBM$ е рамнокрак. Аналогно се докажува дека $\triangle AEN$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{EM} = \overline{BM}$ и $\overline{EN} = \overline{AN}$. Конечно, за разликата на периметрите на $\triangle ABC$ и четириаголникот $EMCN$ добиваме:

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} - (\overline{EN} + \overline{NC} + \overline{CM} + \overline{ME}) &= \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} - (\overline{AN} + \overline{NC} + \overline{CM} + \overline{MB}) \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} - (\overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{AB}. \end{aligned}$$



60. Во $\triangle ABC$ аголот a е еднаков на 50° , а аголот g е за 20° поголем од аголот b . Определи ги аглите b и g .

Решение. Од $a = 50^\circ$ следува $b + g = 130^\circ$. Понатаму, $g = b + 20^\circ$, па затоа $2b + 20^\circ = 130^\circ$, т.е. $b = 55^\circ$. Конечно, $g = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ$.

61. Едниот агол на триаголникот е за 20% помал од другиот, а за $33\frac{1}{3}\%$ поголем од третиот агол. Определи ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека a, b, g се аглите на триаголникот. Од условот на задачата следува $a = (1 - \frac{20}{100})b = \frac{4}{5}b$ и $a = (1 + \frac{33\frac{1}{3}}{100})g = \frac{4}{3}g$. Оттука следува $b = \frac{5}{4}a$ и $g = \frac{3}{4}a$. Значи,

$$a + \frac{5}{4}a + \frac{3}{4}a = 180^\circ,$$

па затоа $a = 60^\circ$. Сега, лесно се добива дека $b = 75^\circ$ и $g = 45^\circ$.

62. Во $\triangle ABC$ едниот агол е еднаков на $\frac{2}{7}$ од другиот, а третиот е еднаков на збирот на првите два. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

Решение. Ако едниот агол е a , другиот агол е $\frac{2}{7}a$ и третиот агол е $\frac{9}{7}a$. Според тоа, $a + \frac{2}{7}a + \frac{9}{7}a = 180^\circ$, од каде добиваме $a = 70^\circ$. Сега, лесно се добива дека $b = 20^\circ$ и $g = 90^\circ$.

63. Внатрешниот агол во темето A на $\triangle ABC$ е $a = 45^\circ 37' 50''$, а надворешниот агол во темето B е $b_1 = 124^\circ 13' 45''$. Определи ги внатрешните агли b и g на $\triangle ABC$.

Решение. Имаме $b = 180^\circ - b_1 = 180^\circ - 124^\circ 13' 45'' = 55^\circ 46' 15''$. Значи, $g = 180^\circ - a - b = 78^\circ 35' 55''$.

64. За аглиите a, b, g на $\triangle ABC$ важи $a - b = 3g$. Докажи дека $a - g = 90^\circ$.

Решение. Имаме $a - b = 3g$ и $a + b + g = 180^\circ$. Ако ги собереме овие равенства добиваме $a - b + a + b + g = 3g + 180^\circ$, од каде следува $2a - 2g = 180^\circ$, т.е. $a - g = 90^\circ$.

65. Определи ги аглиите на триаголникот, ако е познато дека едниот агол е еднаков на $\frac{2}{5}$ од другиот агол, односно на $\frac{1}{4}$ од третиот агол.

Решение. Нека првиот агол е x . Тогаш вториот агол е еднаков на $\frac{5}{2}x$ и третиот агол е еднаков на $4x$. Значи, $x + \frac{5}{2}x + 4x = 180^\circ$, од каде добиваме $x = 24^\circ$. Според тоа, вториот агол е $\frac{5}{2} \cdot 24^\circ = 60^\circ$ и третиот агол е $4 \cdot 24^\circ = 96^\circ$.

66. Збирот на два надворешни агли на $\triangle ABC$ е еднаков на 270° . Докажи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.

Решение. Нека $a_1 + b_1 = 270^\circ$. Бидејќи $a_1 = b + g$ и $b_1 = a + g$, добиваме

$$a + b + 2g = 270^\circ.$$

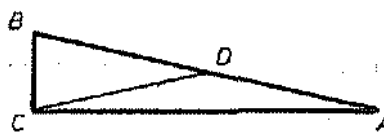
Но,

$$a + b + g = 180^\circ$$

и ако ги одземеме последните две равенства добиваме $g = 90^\circ$, што значи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.

67. Едниот агол на правоаголниот $\triangle ABC$ е днаков на $7^\circ 30' 30''$. Под кој агол се гледа секоја од катетите од центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Центарот на опишаната кружница на правоаголниот $\triangle ABC$ се совпаѓа со средината D на хипотенузата AD (цртеж десно).



Триаголниците CAD и BCD се рамнокраки. Затоа

$$\angle DCA = \angle CAD = 7^\circ 30' 30'',$$

па катетата AC се гледа под агол $180^\circ - 2 \cdot 7^\circ 30' 30'' = 164^\circ 59'$. Агол под кој се гледа катетата BC е надворешниот агол за $\triangle CAD$, т.е. тоа е аголот $\angle CDB = 180^\circ - 164^\circ 59' = 15^\circ 1'$.

68. Во $\triangle ABC$ отсечката BK , $K \in AC$ е симетрала на аголот во темето B . Ако $\angle BKC = 70^\circ$, пресметај ја разликата на аглие $\angle ACB$ и $\angle CAB$.

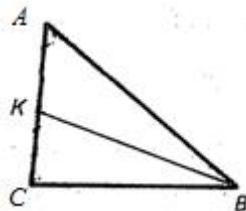
Решение. Од условот на задачата следува

$$\text{дека } \angle AKB = 110^\circ, \text{ па затоа } \angle ACB + \frac{b}{2} = 110^\circ$$

и $\angle CAB + \frac{b}{2} = 70^\circ$. Ако ги одземеме последните две равенства добиваме

$$\angle ACB - \angle CAB = 40^\circ,$$

и тоа е бараната разлика.



69. Во $\triangle ABC$ познати се внатрешниот агол $a = 67^\circ 28' 16''$ и надворешниот агол $b_1 = 142^\circ 44' 32''$. Определи го аголот кој го формираат симетралата на аголот и висината на $\triangle ABC$ кои минуваат низ темето C .

Решение. Нека CF е висината и CP е симетралата на аголот во темето C . Имаме,

$$b = 180^\circ - b_1 = 37^\circ 15' 28''$$

и

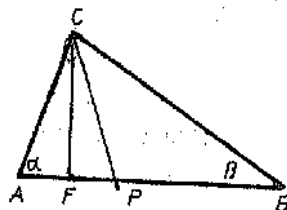
$$g = b_1 - a = 75^\circ 16' 16'', \text{ т.е. } \frac{g}{2} = 37^\circ 38' 8''.$$

Понатаму,

$$\angle ACF = 90^\circ - a = 22^\circ 31' 44'',$$

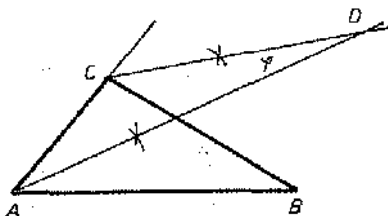
па затоа бараниот агол е

$$\angle FCP = \frac{g}{2} - \angle ACF = 15^\circ 6' 24''.$$



70. Симетралата на внатрешниот агол a на $\triangle ABC$ формира со симетралата на надворешниот агол g_1 агол еднаков на $\frac{b}{2}$. Докажи!

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата на внатрешниот агол a и симетралата на надворешниот агол g_1 . Тогаш аглите на триаголникот ADC се $\frac{1}{2}a, g + \frac{1}{2}g_1$ и $j = \angle ADC$. Но,



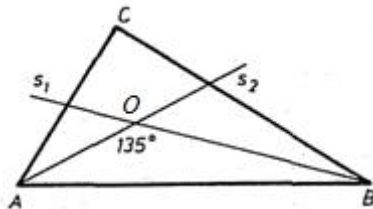
$g_1 = a + b$ и како $\frac{1}{2}a + g + \frac{1}{2}g_1 + j = 180^\circ$ добиваме

$$\frac{1}{2}a + g + \frac{1}{2}(a + b) + j = 180^\circ = a + b + g,$$

односно $j = \frac{b}{2}$.

71. Симетралите на внатрешните агли a и b на $\triangle ABC$ се сечат под агол од 135° . Докажи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.

Решение. Нека симетралите s_2 и s_1 на внатрешните агли a и b се сечат во точката O . Имаме $\angle BAO = \frac{a}{2}$ и $\angle ABO = \frac{b}{2}$. Сега од $\triangle ABO$ следува $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + 135^\circ = 180^\circ$,



од каде добиваме $a + b = 90^\circ$. Значи, $g = 180^\circ - (a + b) = 90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ е правоаголен.

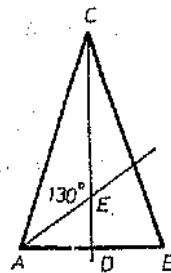
72. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот меѓу симетралата на аголот при врвот и симетралата на аголот при основата е еднаков на 130° .

Опреди ги агли на $\triangle ABC$.

Решение. Аголот $\angle AEC = 130^\circ$ е надворешен за $\triangle ADE$, па затоа

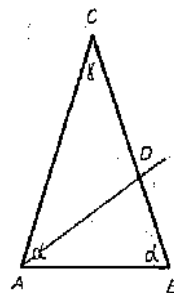
$$\frac{1}{2}\angle A + 90^\circ = 130^\circ.$$

Од последната равенка добиваме $\angle A = 80^\circ$. Според тоа, $\angle B = \angle A = 80^\circ$ и $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 40^\circ$.



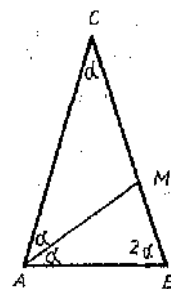
73. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D . Агли на $\triangle ABC$ се еднакви на агли на $\triangle ABD$. Опреди ги агли на $\triangle ABC$.

Решение. Нека α е аголот при основата и g е аголот при врвот на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Тоа значи дека аголот при основата на $\triangle ABD$ е α , а аголот при врвот е g . Понатаму AD е симетрала на аголот при темето A , па затоа $g = \angle DAB = \frac{\alpha}{2}$. Според тоа, $\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$, од каде наоѓаме $\alpha = 72^\circ$. Значи, $g = \frac{\alpha}{2} = 36^\circ$.

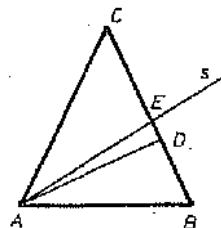


74. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот при основата е двапати поголем од аголот при врвот и симетралата на аголот при основата го сече кракот BC во точка M . Докажи дека $\overline{AM} = \overline{AB} = \overline{MC}$.

Решение. Според условот на задачата агли на $\triangle ABC$ се $2\alpha, 2\alpha$ и α (цртеж десно). Бидејќи AM е симетрала на агол, агли на $\triangle BMA$ се $\alpha, 2\alpha$ и 2α , т.е. тој е рамнокрак. Понатаму, агли на $\triangle CAM$ се α, α и 3α , што значи дека и тој е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AM} = \overline{AB}$ и $\overline{AM} = \overline{MC}$, што и требаше да се докаже.



75. Во рамнокрак триаголник $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ симетралата AE на аголот при основата и висината AD формираат агол еднаков на 15° . Опреди ги внатрешните агли на триаголникот.

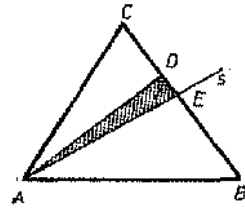


Решение. *Прв случај.* Нека точката D е меѓу точките B и E . Триаголникот ADE е правоаголен, па затоа $\angle AED = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Понатаму, бидејќи AE е симетралата на аголот при основата имаме $\angle EAB = \frac{a}{2}$ и $\angle ABE = a$, па од $\triangle ABE$ добиваме дека

$$a + \frac{a}{2} + 75^\circ = 180^\circ, \text{ т.е. } a = 70^\circ.$$

Според тоа, аголот при врвот е $\vartheta = 180^\circ - 2a = 40^\circ$.

Втор случај. Нека точката D е меѓу точките E и C . Триаголникот ADE е правоаголен, па затоа $\angle AED = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Според тоа, $\angle AEB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Понатаму, бидејќи AE е симетралата на аголот при основата имаме $\angle EAB = \frac{a}{2}$ и $\angle ABE = a$, па од $\triangle ABE$



добиваме дека $a + \frac{a}{2} + 105^\circ = 180^\circ$, т.е. $a = 50^\circ$. Според тоа, аголот при врвот е $\vartheta = 180^\circ - 2a = 80^\circ$.

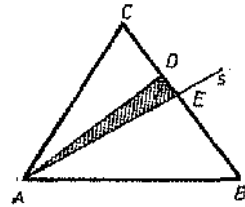
76. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ во кој надворешниот агол при врвот е еднаков на 108° . Определи го аголот меѓу висината и симетралата на аголот повлечени од едно теме при основата.

Решение. Надворешниот агол при врвот C на $\triangle ABC$ е еднаков на 108° , па затоа аглите при основата се $\angle A = \angle B = 54^\circ$. Нека AD и AE се висината и симетралата на аголот при темето A . Имаме

$$\angle BAE = \frac{1}{2} \cdot 54^\circ = 27^\circ \text{ и } \angle BAD = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

Конечно, бараниот агол е

$$\angle DAE = \angle BAD - \angle BAE = 36^\circ - 27^\circ = 9^\circ.$$



77. Висините кои соодветствуваат на краците на рамнокрак $\triangle ABC$ зафаќаат агол еднаков на 40° . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

Решение. Нека висините се AN и BM и нека тие се сечат во точка O (цртеж долу десно). Триаголникот OBN е правоаголен, па затоа

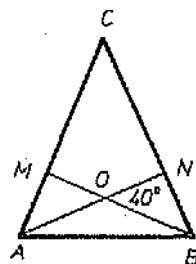
$$\angle OBN = 90^\circ - \angle BON = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Понатаму, триаголникот BCM е правоаголен, па затоа за аголот при врвот на $\triangle ABC$ добиваме:

$$\angle BCM = 90^\circ - \angle MBC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Конечно, аглите при основата на $\triangle ABC$ се:

$$\angle A = \angle B = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ.$$



78. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Аголот меѓу симетралите на аглите при основата е еднаков на 130° . Определи го аголот меѓу висината и симетралата на аголот повлечени од темето B .

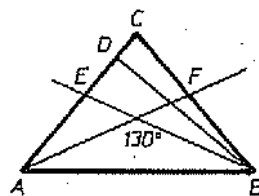
Решение. Нека α е аголот при основата на $\triangle ABC$. Тогаш бидејќи аголот меѓу симетралите на аглите при основата е еднаков на 130° , добиваме $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + 130^\circ = 180^\circ$, од каде

наоѓаме $\alpha = 50^\circ$. Според тоа, аголот при врвот на $\triangle ABC$ е еднаков на $180^\circ - 2\alpha = 80^\circ$. Понатаму, $\angle ABE = 25^\circ$ и $\angle BAE = 50^\circ$, па затоа

$$\angle AEB = 180^\circ - 25^\circ - 50^\circ = 105^\circ.$$

Но, $\angle AEB$ е надворешен агол за $\triangle EDB$ и како $\angle EDB = 90^\circ$, добиваме

$$\angle EBD = \angle AEB - 90^\circ = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ.$$



79. Аголот меѓу краците на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ е еднаков на 136° . Низ темето на овој агол повлечени се две прави така што секоја од нив на основата на триаголникот отсекува отсечка еднаква на кракот на триаголникот. Определи го аголот меѓу овие прави.

Решение. Аголот при основата на $\triangle ABC$

е еднаков на $(180^\circ - 136^\circ) : 2 = 22^\circ$. Нека

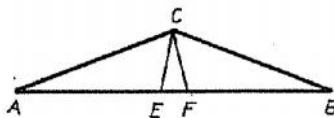
E и F се пресечните на правите и нека $\overline{AF} = \overline{AC}$ и $\overline{BC} = \overline{BE}$ (цртеж десно).

Тогаш триаголниците AFC и BEC се рамнокраки и складни меѓу себе. Од нивната складност следува дека $\overline{CE} = \overline{CF}$, односно

$$\angle FEC = \angle EFC = (180^\circ - 22^\circ) : 2 = 79^\circ.$$

Конечно,

$$\angle ECF = 180^\circ - \angle FEC - \angle EFC = (180^\circ - 79^\circ) : 2 = 22^\circ.$$



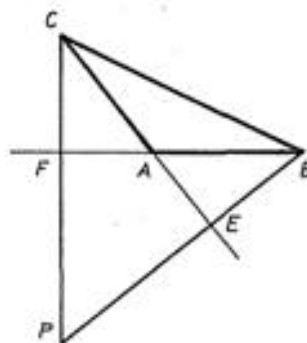
80. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Висините спуштени кон краците на триаголникот формираат агол од 48° . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

Решение. Нека P е пресечната точка на висините CF и BE спуштени кон краците AB и AC на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Имаме $\angle CAF = \angle EPC = 48^\circ$ (како агли со нормални краци). Понатаму,

$$\angle CAB = 180^\circ - \angle CAF = 132^\circ \text{ и}$$

$$\angle ACB = \angle ABC = (180^\circ - 132^\circ) : 2 = 24^\circ.$$

Според тоа, аглите на $\triangle ABC$ се 24° , 24° и 132° .



81. Симетралата на надворешниот агол на основата на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ ја сече симетралата на надворешниот агол при врвот под агол од 80° . Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Кај рамнокрак триаголник надворешниот агол при врвот е двапати поголем од внатрешниот агол при основата. Затоа $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$.

Понатаму, бидејќи $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$

и BD е симетрала на надворешниот агол во темето B добиваме дека

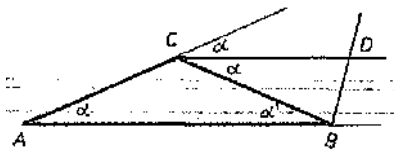
$$\angle CBD = (180^\circ - 2\alpha + \alpha) : 2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Сега, бидејќи $\angle BCD = 80^\circ$ од $\triangle BCD$ добиваме

$$\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 80^\circ = 180^\circ.$$

Од последната равенка наоѓаме $\alpha = 20^\circ$, а аголот при врвот на $\triangle ABC$ е

$$\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ.$$

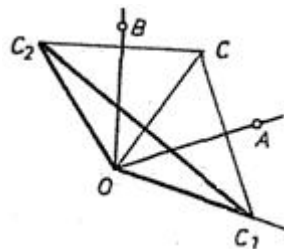


82. Даден е $\angle AOB = 75^\circ$ и точка C во неговата внатрешност. Нека точките C_1 и C_2 се симетрични на точката C во однос на краците OA и OB , соодветно.

а) Докажи дека $\triangle C_1OC_2$ е рамнокрак.

б) Определи ги аглите на $\triangle C_1OC_2$.

Решение. а) Отсечките OC и OC_1 се симетрични во однос на кракот OA , па затоа $\overline{OC} = \overline{OC_1}$. Аналогно се добива дека $\overline{OC} = \overline{OC_2}$. Според тоа, $\overline{OC_1} = \overline{OC_2}$, што значи дека $\triangle C_1OC_2$ е рамнокрак.



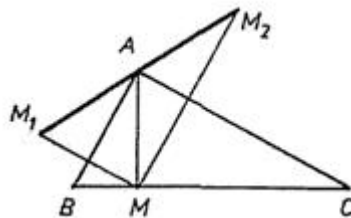
б) Бидејќи C_1 и C_2 се симетрични на точката C во однос на краците OA и OB , соодветно заклучуваме дека $\angle COA = \angle AOC_1$ и $\angle COB = \angle BOC_2$. Според тоа,

$$\angle C_1OC_2 = \angle C_1OA + \angle AOB + \angle BOC_2 = 2\angle AOB = 150^\circ \text{ и}$$

$$\angle C_1C_2O = \angle C_2C_1O = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ.$$

83. Во правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето A сповлечена е висината AM , $M \in BC$. Нека M_1 и M_2 се симетричните точки на точката M во однос на катетите AB и AC , соодветно. Докажи дека точките A, M_1 и M_2 лежат на иста права.

Решение. Бидејќи M_1 и M_2 се симетричните точки на точката M во однос на катетите AB и AC , соодветно заклучуваме дека $\angle BAM = \angle BAM_1$ и $\angle CAM = \angle CAM_2$ па затоа

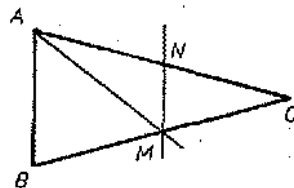


$$\angle M_1AM_2 = \angle M_1AB + \angle BAC + \angle CAM_2 = 2\angle BAC = 180^\circ,$$

од каде следува дека точките A, M_1 и M_2 лежат на иста права

84. Во рамнокрак $\triangle ABC$ основата AB е двапати пократка од краците. Низ средината на M на кракот BC е повлечена права паралелна со основата AB , која го сече кракот AC во точка N . Докажи дека правата AM е симетрала на $\angle BMN$.

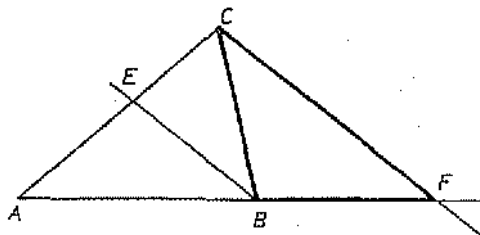
Решение. Бидејќи M е средина на BC од $\overline{BC} = 2\overline{AB}$ следува $\overline{BM} = \overline{AB}$. Според тоа, $\triangle MAB$ е рамнокрак со основа AM . Затоа $\angle BAM = \angle BMA$ (цртеж десно). Но, $\angle NMA = \angle BAM$ како агли со паралелни краци. Од последните две равенства сле-



дува $\angle NMA = \angle BMA$, што значи дека правата AM е симетрала на $\angle BMN$.

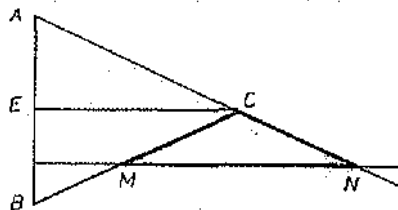
85. Во $\triangle ABC$ со $\angle B = 80^\circ$ е повлечена симетралата на аголот BE , $E \in AC$. Низ темето C е повлечена права паралелна на BE која го сече продолжението на страната AB во точката F . Докажи дека $\triangle BFC$ е рамнокрак.

Решение. Од условот на задачата следува $\angle ABE = \angle BCF$ и $\angle EBA = \angle CFB$, како агли со паралелни краци (цртеж десно). Понатаму, $\angle EBA = \angle EBC$, па од последните три равенства следува $\angle BFC = \angle BCF$, што значи дека $\triangle BFC$ е рамнокрак.



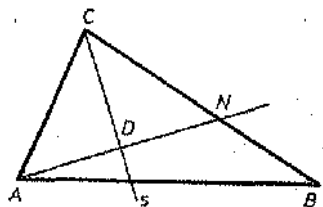
86. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Права нормална на основата AB на триаголникот ги сече кракот BC во точката M и продолжението на кракот AC во точка N . Докажи дека $\triangle CMN$ е рамнокрак.

Решение. Нека CE е симетралата на аголот при врвот C во $\triangle ABC$. Како што знаеме CE е нормална на основата AB на $\triangle ABC$, што значи дека $CE \parallel MN$ (цртеж десно). Затоа, $\angle CMN = \angle MCE$, $\angle MNC = \angle ECA$ и $\angle MCE = \angle ECA$. Од последните равенства следува $\angle CMN = \angle CNM$, што значи дека $\triangle CMN$ е рамнокрак.



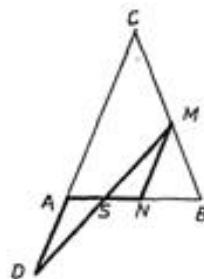
87. Даден е разностран $\triangle ABC$. Од темето C е повлечена нормала на симетралата на аголот во темето C , која ја сече страната BC во точката N . Докажи дека $\triangle ANC$ е рамнокрак.

Решение. Нека s е симетрала на аголот во темето C . Според условот на задачата точките A и N се симетрични во основ на симетралата s (цртеж десно). Затоа $\overline{CA} = \overline{CN}$, што значи дека $\triangle CMN$ е рамнокрак.



88. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB . На правата AC , по редослед C, A, D е земена точка D , а на кракот BC точка M така што $\overline{AD} = \overline{BM}$. Докажи дека основата AB ја полови отсечката DM .

Решение. На цртежот десно е даден $\triangle ABC$ со точките D и M . Низ точката M повлекуваме отсечка MN паралелна со AC . Имаме $\angle CAB = \angle CBA$ и како $\angle MNB = \angle CAB$ (агли со паралелни краци), заклучуваме дека $\angle MNB = \angle MBN$, што значи дека $\triangle NBM$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{NM} = \overline{MB}$. Според условот на задачата $\overline{AD} = \overline{BM}$, па затоа



$\overline{AD} = \overline{NM}$. Значи, две спротивни страни на четириаголникот $ADNM$ се паралелни и еднакви, па затоа тој е паралелограм. Дијагоналите кај паралелограмот се половат, па затоа AN ја полови отсечката DM , т.е. AB ја полови отсечката DM .

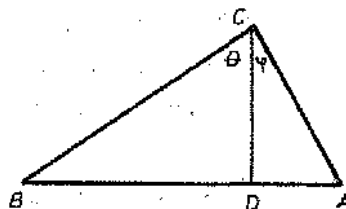
89. Висината CD во $\triangle ABC$ со страните CA и CB формира агли j и q .

Кој од овие агли е поголем ако $\overline{AC} < \overline{BC}$.

Решение. Во триаголник наспроти поголема страна лежи поголем агол, па затоа од $\overline{AC} < \overline{BC}$ следува $\angle B < \angle A$ (цртеж десно). Понатаму,

$$90^\circ - \angle B > 90^\circ - \angle A,$$

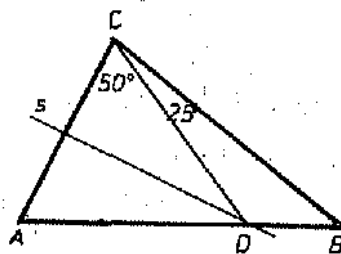
и како триаголниците CBD и ACD се правоаголници следува $q > j$.



90. Во $\triangle ABC$, со агол од 75° во темето C , повлечена е симетралата s на страната AC , која ја сече страната AB во точката D . Ако $\angle ACD$ е двапати поголем од $\angle DCB$, определи ги другите два агли на $\triangle ABC$.

Решение. Имаме $\angle ACD = 2\angle DCB$ и

како $\angle ACD + \angle DCB = 75^\circ$, добиваме $3\angle DCB = 75^\circ$, т.е. $\angle DCB = 25^\circ$. Значи, $\angle ACD = 50^\circ$. Понатаму, s е симетрала на страната AC , па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$, т.е. $\triangle CAD$ е рамнокрак со основа AC .

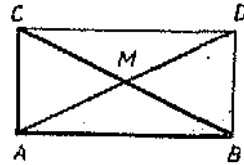


Затоа $\angle CAB = \angle ACD = 50^\circ$. Конечно,

$$\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ - 75^\circ = 55^\circ$$

91. Докажи дека средината на хипотенузата е центар на опишаната кружница околу правоаголен триаголник.

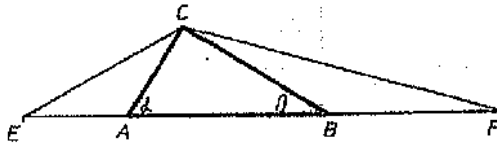
Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник. Триаголникот ABC го дополнуваме со складен триаголник BCD , при што добиваме правоаголник $ABCD$ (цртеж десно). Дијагоналите на правоаголникот се еднакви меѓу



себе и се преполовуваат. Според тоа, $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$, па затоа средината M на хипотенузата AC е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

92. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со хипотенуза AB . Хипотенузата AB е продолжена преку темето A за должината на катетата AC и е продолжена преку темето B за должината на катетата BC , со што се добиени точките E и F , соодветно. Определи го $\angle ECF$.

Решение. Триаголникот ABC е правоаголен, па затоа $a + b = 90^\circ$. Понатаму, $\triangle CEA$ е рамнокрак со основа CE и a е негов надворешен агол во темето A , па затоа



$\angle ECA = \angle CEA = \frac{b}{2}$. Слично, $\triangle FCB$ е рамнокрак со основа FC и b е негов надворешен агол во темето B , па затоа $\angle BFC = \angle BCF = \frac{b}{2}$.

Конечно, бидејќи $a + b = 90^\circ$ добиваме

$$\angle ECF = \angle ECA + \angle ACB + \angle BCF = \frac{a}{2} + 90^\circ + \frac{b}{2} = 90^\circ + \frac{a+b}{2} = 135^\circ.$$

93. Даден е рамностран $\triangle ABC$. На продолжението на висината CD , преку темето C , земена е точка M таква што $\overline{MC} = \overline{AB}$. Докажи дека аглиите $\angle ACB$ и $\angle AMB$ се комплементни.

Решение. Според условот на задачата $\overline{MC} = \overline{AB} = \overline{AC}$, што значи дека $\triangle AMC$ е рамнокрак. Понатаму, во рамностран триаголник висината е и симетрала на аголот, па затоа надворешниот агол на $\triangle AMC$ во темето C е $\angle ACD = 30^\circ$. Според тоа,

$$\angle AMC = \frac{1}{2} \angle ACD = 15^\circ.$$

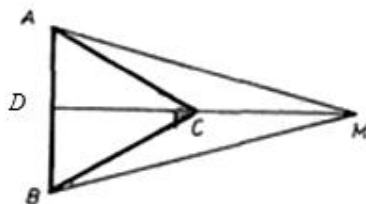
Слично,

$$\angle BMC = \frac{1}{2} \angle BCD = 15^\circ.$$

Значи, $\angle AMB = \angle AMC + \angle BMC = 30^\circ$,

па затоа $\angle ACB + \angle AMB = 90^\circ$, т.е.

аглите $\angle ACB$ и $\angle AMB$ се комплементни.

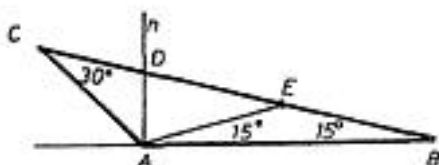


94. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle B = 15^\circ$ и $\angle C = 30^\circ$. Правата која минува низ темето A и е нормална на страната AB ја сече страната BC во точката D . Докажи дека $\overline{BD} = 2\overline{AC}$.

Решение. Според условот на задачата $\triangle ABD$ е правоаголен (цртеж десно). Нека точката E е средината на страната BD на $\triangle ABD$.

Според тоа, $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DE}$ и

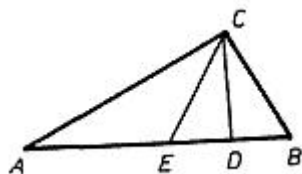
$\angle EAB = 15^\circ$. Значи, $\angle AEC = \angle EAB + \angle ABE = 30^\circ$. Сега $\angle ACE = 30^\circ$ и $\angle AEC = 30^\circ$, па затоа $\triangle ECA$ е рамнокрак, што значи $\overline{AE} = \overline{AC}$. Конечно, $\overline{BD} = 2\overline{AE} = 2\overline{AC}$, што и требаше да се докаже.



95. Подножјето на висината повлечена кон хипотенузата AB на правоаголниот триаголник $\triangle ABC$ ја дели хипотенузата во однос 1:3. Определи ги остриите агли на $\triangle ABC$.

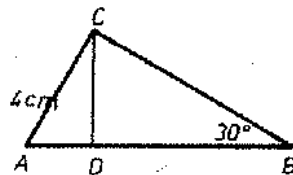
Решение. Нека точката E е средината на хипотенузата AB и D е подножјето на висината повлечена од темето C (цртеж десно). Тогаш CE е тежишна линија на $\triangle ABC$, па затоа $\overline{CE} = \overline{EB}$.

Според условот на задачата $\overline{AD} = 3\overline{DB}$, па од $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ следува $\overline{AB} = 4\overline{DB}$, од каде добиваме дека $\overline{AE} = \overline{EB} = 2\overline{DB}$. Значи, висината CD ја полови страната на $\triangle EBC$, па затоа $\overline{CE} = \overline{CB}$. Според тоа, $\overline{CB} = \overline{CE} = \overline{EB}$, т.е. $\triangle EBC$ е рамностран. Значи, $\angle ABC = 60^\circ$, од каде следува дека $\angle CAB = 30^\circ$.



96. Во правоаголен $\triangle ABC$ важи $\angle B = 30^\circ$ и $\overline{AC} = 4 \text{ cm}$. Нека CD , $D \in AB$ е висината повлечена кон хипотенузата AB . Определи ги должините на отсечките AD и BD .

Решение. Од $\angle B = 30^\circ$ следува $\angle A = 60^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ е половина од рамностран триаголник (цртеж десно). Затоа $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$,



од каде добиваме $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$. Понатаму,

$\angle BCD = 60^\circ$, па затоа $\angle ACD = 30^\circ$, што значи дека $\triangle ACD$ е половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 2 \text{ cm}$. Конечно, $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 6 \text{ cm}$.

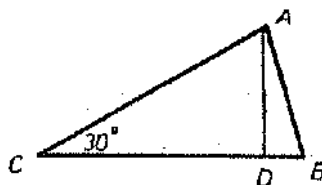
97. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\angle C = 30^\circ$. Нека D , $D \in BC$ е подножјето на висината повлечена од темето A . Определи ги аглите на $\triangle ABD$. Докажи дека $\overline{BC} = 2\overline{AD}$.

Решение. Имаме $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$,

и како $\angle D = 90^\circ$ добиваме $\angle DAB = 15^\circ$.

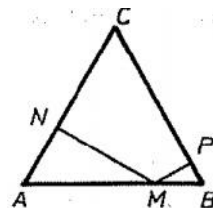
Понатаму, $\angle CAD = 60^\circ$, што значи дека $\triangle CAD$ е половина од рамностран триаголник.

Затоа $\overline{AC} = 2\overline{AD}$ и како $\overline{AC} = \overline{BC}$ следува $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, што и требаше да се докаже.



98. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Од точката M која ја дели страната AB на делови од 6 cm и 2 cm повлечени се нормални прави на другите две страни на триаголникот. Определи ги растојанијата од точката C до овие нормални прави.

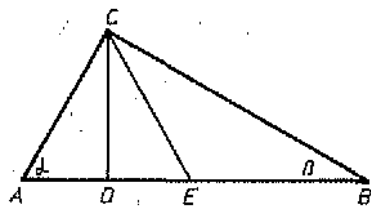
Решение. Нека N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M кон страните AC и BC на $\triangle ABC$ (цртеж десно). За правоаголните триаголници AMN и MBP важи $\angle NAM = 60^\circ$ и $\angle MBP = 60^\circ$, па затоа $\angle AMN = 30^\circ$ и $\angle BMP = 30^\circ$, што значи дека тие се половина од рамностранни триаголници. Според тоа, $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AM} = 3 \text{ cm}$ и $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{MB} = 1 \text{ cm}$. Конечно, бараните растојанија



на точката C до правите MN и MP се $\overline{CN} = \overline{AC} - \overline{AN} = 5 \text{ cm}$ и $\overline{CP} = \overline{BC} - \overline{BP} = 7 \text{ cm}$.

99. Во правоаголен триаголник висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол формираат аголеднаков на $18^\circ 24'$. Определи ги острите агли на овој триаголник.

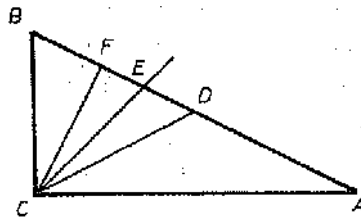
Решение. Нека CD е висината и CE е тежишната линија во правоаголникот $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$. Од $\angle DCE = 18^\circ 24'$ следува $\angle DEC = 71^\circ 36'$. Понатаму, $\overline{AE} = \overline{CE}$, па затоа



$$a = \frac{180^\circ - 71^\circ 36'}{2} = 54^\circ 12' \text{ и } b = 90^\circ - a = 35^\circ 48'.$$

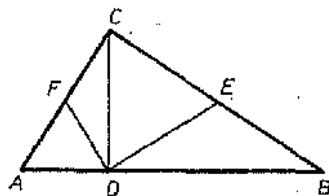
100. Еден од острите агли на правоаголникот $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ е еднаков на 32° . Од темето C се повлечени тежишната линија, висината и симетралата на аголот. Определи ги аголот меѓу тежишната линија и симетралата на аголот и аголот меѓу висината и симетралата на аголот.

Решение. Нека $\angle A = 32^\circ$, CF , CE , CD се висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени во темето C (цртеж десно). Тогаш $\triangle CAD$ е рамнокрак, па затоа $\angle ACD = 32^\circ$ и $\angle CDB = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$, како негов надворешен агол во темето D . Понатаму, CE е симетрала на правиот агол, па затоа $\angle ACE = 45^\circ$. Значи, $\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = 13^\circ$ и како $\angle FCD = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$, добиваме $\angle FCE = \angle FCD - \angle ECD = 13^\circ$



101. Во правоаголен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ е повлечена висината CD , $D \in AB$. Нека E и F се средините на катетите BC и AC , соодветно. Докажи дека $\angle EDF = 90^\circ$.

Решение. Според условот на задачата триаголниците ACD и BCD се правоаголни и F и E се средини на



нивните хипотенузи (цртеж десно). Според тоа, $\angle FDC = \angle FCD$ и $\angle EDC = \angle DCE$. Затоа

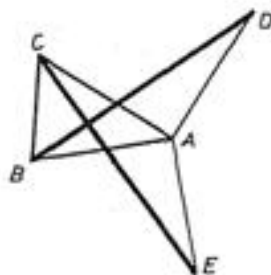
$$\angle EDF = \angle EDC + \angle CDF = \angle ECD + \angle FCD = 90^\circ.$$

102. Даден е $\triangle ABC$. Во темето A е конструирана отсечка AD нормална на AC таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и отсечка AE нормална на AB таква што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Притоа точките D и B се на различни страни на правата AC , а точките C и E се на различни страни на правата AB . Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.

Решение. За триаголниците BAD и EAC важи $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{AE} = \overline{AB}$ и

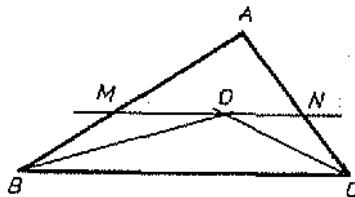
$$\begin{aligned}\angle EAC &= \angle CAB + \angle BAE = \angle CAB + 90^\circ \\ &= \angle CAB + \angle CAD = \angle BAD,\end{aligned}$$

па од признакот САС следува дека сие се складни. Конечно, од докажаната складност следува $\overline{BD} = \overline{CE}$.



103. Во $\triangle ABC$ низ центарот O на впишаната кружница е повлечена права паралелна на страната BC , која ги сече страните AB и AC во точките M и N , соодветно. Докажи дека $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.

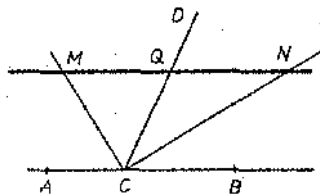
Решение. Точката O е пресек на симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Според тоа, $\angle MNO = \angle OBC$. Понатаму, $\angle MOB = \angle OBC$, како наизменични агли. Според тоа, $\angle MBO = \angle MOB$,



што значи дека $\triangle BOM$ е рамнокрак. Аналогно се докажува дека $\triangle OCN$ е рамнокрак. Конечно, од $\overline{MN} = \overline{MO} + \overline{ON}$, $\overline{ON} = \overline{NC}$ и $\overline{MO} = \overline{MB}$ следува $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.

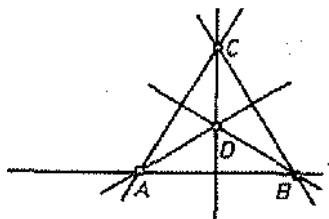
104. На правата AB е земена точка C (C е меѓу A и B), а потоа е повлечена произволна полуправа CD . На симетралите на аглиите ACD и DCB избрани се точки M и N , соодветно такви што правата MN е паралелна со правата AB . Полуправата CD ја сече правата MN во точката Q . Докажи дека точката Q е средина на отсечката MN .

Решение. Од условот на задачата следува $\angle QCN = \angle NCB$ и $\angle NCB = \angle CNQ$. Затоа $\angle QCN = \angle CNQ$, т.е. $\triangle CNQ$ е рамнокраки важи $\overline{QC} = \overline{QN}$. Аналогно се докажува дека $\triangle MCQ$ е рамнокрак и дека $\overline{QC} = \overline{QM}$. Според тоа, $\overline{QN} = \overline{QC} = \overline{QM}$, т.е. точката Q е средина на отсечката MN .



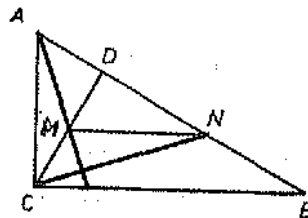
105. Нека A, B, C, D се четири точки кои лежат во иста рамнина и такви што $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Докажи дека $AD \perp BC$.

Решение. Точките A, B и C не лежат на иста права, бидејќи во спротивно од точката D на правата AB ќе постојат две различни нормали DC и DB , што не е можно. Според тоа, постои $\triangle ABC$ во кој правите CD и BD се висини повлечени кон страните AB и AC , соодветно (цртеж десно). Значи, точката D е ортоцентар на $\triangle ABC$, па затоа AD е третата висина во овој триаголник и $AD \perp BC$.



106. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека CD , $D \in AB$ е висината повлечена од темето C , M е средина на CD и N е средина на отсечката BD . Докажи дека правата AM е нормална на правата CN .

Решение. Отсечката MN е средна линија на $\triangle CBD$, па затоа $MN \parallel BC$. Сега од $BC \perp AC$ и $MN \parallel BC$ следува $MN \perp AC$ (цртеж десно). Но, $CD \perp AN$, па затоа точката M е ортоцентар на $\triangle ANC$. Според тоа, AM е висина во $\triangle ANC$, па затоа $AM \perp CN$.



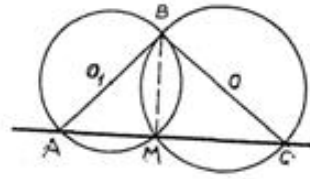
107. Дадени се три точки A, B и C кои не лежат на иста права. Кружниците со дијаметар AB и дијаметар BC се сечат во точка M различна од точката B . Докажи дека M припаѓа на правата AC .

Решение. Имаме $\angle BMC = 90^\circ$ како агол над дијаметар на кружницата со центар во точката O (цртеж десно). Понатаму, $\angle AMB = 90^\circ$, како

агол над дијаметар на кружницата со центар во точката O_1 . Според тоа,

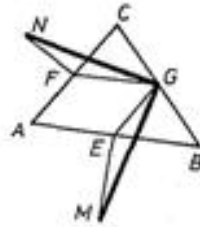
$$\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC = 180^\circ,$$

што значи дека точката M припаѓа на правата AC .



108. Даден е разностран $\triangle ABC$. Нека точките E, F и G се средини на страните AB, AC и BC , соодветно. Во надворешноста на $\triangle ABC$ се повлечени отсечки $EM, \overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2}$ и $FN, \overline{FN} = \frac{\overline{AC}}{2}$ такви што $EM \perp AB$ и $FN \perp AC$. Докажи дека $\overline{GM} = \overline{GN}$.

Решение. Отсечката EG е средна линија на $\triangle ABC$, па затоа $EG \parallel AC$ и $\overline{EG} = \frac{1}{2} \overline{AC}$. Слично $FG \parallel AB$ и $\overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. Понатаму, од $\overline{EM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ следува $\overline{FG} = \overline{EM}$, а од $\overline{FN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ следува $\overline{FN} = \overline{GE}$. Сега $\angle BEG = \angle CFG$, како агли со паралелни краци. Според тоа,



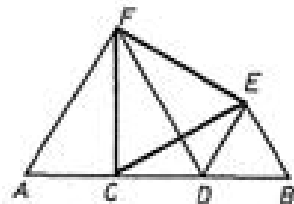
$$\angle GEM = 90^\circ + \angle BEG = 90^\circ + \angle CFG = \angle NFG.$$

Сега, од признакот САС следува дека $\triangle GNF \cong \triangle MGE$, па затоа $\overline{GM} = \overline{GN}$.

109. Нека C и D се точки на отсечката AB такви што $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$ и нека точките E и F се од иста страна на правата AB и се такви што триаголниците ADF и DBE се рамнострани. Докажи дека $\triangle CEF$ е рамностран.

Решение. За триаголниците DFC и BCE важи:

$\overline{CD} = \overline{BE}$, $\overline{FD} = \overline{BC}$ и $\angle CDF = \angle EBC$, (цртеж десно). Сега, од признакот САС следува дека тие се складни. Според тоа, $\overline{FC} = \overline{EC}$ и важи



$$\begin{aligned} \angle FCE &= 90^\circ - \angle ECB = 90^\circ - \angle EFD \\ &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \end{aligned}$$

што значи дека $\triangle CEF$ е рамностран.

110. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Точките K и M припаѓаат на страната AB и се такви што $\overline{AK} = \overline{AC}$ и $\overline{BM} = \overline{BC}$. Определи го $\angle KCM$.

Решение. Триаголникот CMB е рамнокрак со краци BM и BC , па затоа

$$\angle BMC = \frac{180^\circ - b}{2} = 90^\circ - \frac{b}{2}$$

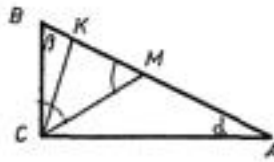
(цртеж десно). Аналогно се докажува дека

$$\angle AKC = 90^\circ - \frac{a}{2}.$$

$$\angle AKC + \angle BMC = 90^\circ - \frac{a}{2} + 90^\circ - \frac{b}{2} = 180^\circ - \frac{a+b}{2} = 135^\circ,$$

па затоа

$$\angle KCM = 180^\circ - (\angle AKC + \angle BMC) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

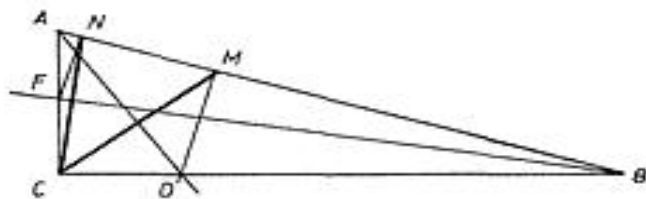


111. а) Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C , ако $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ и $\angle B = 15^\circ$.

б) Конструирај ги симетралите AD и BF на острите агли на $\triangle ABC$, па од точките D и F во кои овие симетрали ги сечат катетите BC и AC , соодветно повлечи нормали DM и FN на хипотенузата AB ($M, N \in AB$). Определи го $\angle MCN$.

Решение. а) Конструираме отсечка BC со должина 8 cm и во точката C повлекуваме нормала s на BC . Потоа, над отсечката BC конструираме агол од 15° (прво агол од 60° , потоа негова симетрала и потоа симетрала на аголот чиј крак е BC) и во пресекот на вториот крак со нормалата s го добиваме темето A .

б) Од својствата на симетралата на агол следува дека $\overline{FC} = \overline{FN}$ и



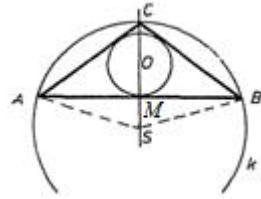
$\overline{CD} = \overline{DM}$, па затоа триаголниците CNF и CMD се рамнокраки. Според тоа, $\angle FCN = \angle FNC$ и $\angle DCM = \angle DMC$. Но, $\angle AFN = \angle B = 15^\circ$, како агли со нормални краци и $\angle A = \angle BMD = 75^\circ$ исто така како агли

со нормални краци. Понатаму, $\angle AFN$ е надворешен за $\triangle CNF$, па затоа $\angle FCN = \frac{1}{2}\angle AFN = 7^\circ 30'$. Слично, добиваме $\angle DCM = \frac{1}{2}\angle BDM = 37^\circ 30'$. Конечно,

$$\angle MCN = 90^\circ - \angle ACN - \angle MCD = 90^\circ - 7^\circ 30' - 37^\circ 30' = 45^\circ.$$

112. Во $\triangle ABC$ центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB . Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на впишаната и S е центарот на опишаната кружница (цртеж десно). Правата OS е симетрала на отсечката AB , па затоа $\overline{OA} = \overline{OB}$, т.е. $\triangle AMO \cong \triangle BMO$, па затоа $\frac{a}{2} = \angle OAM = \angle OBM = \frac{b}{2}$, т.е. $a = b$.



Според тоа, ABC е рамнокрак, па затоа точката C лежи на правата OS . Но, $\overline{SA} = \overline{SB}$ (радиуси на опишана кружница) и $\overline{SA} = \overline{SB}$, добиваме дека $\angle SAC = \frac{g}{2}$ и $\angle SBC = \frac{g}{2}$. Понатаму, $\angle SAC$ со правите

AB и AO е поделен на три еднакви делови добиваме $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{2}$, т.е.

$a = \frac{g}{3}$. На потполно идентичен начин заклучуваме дека $b = \frac{g}{3}$. Значи,

$g + \frac{g}{3} + \frac{g}{3} = 180^\circ$, од каде добиваме $g = 108^\circ$, па затоа $a = b = \frac{g}{3} = 36^\circ$.

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

113. Горјан располага со 16 сламки со должина 1 cm , 6 сламки со должина 2 cm и 7 сламки со должина 3 cm . Дали може со наведените сламки да конструира правоаголник така што сите сламки ќе ги употреби и ниту една сламка не смее да ја крши или превиткува?

Решение. Должинта на сите сламки е еднаква на

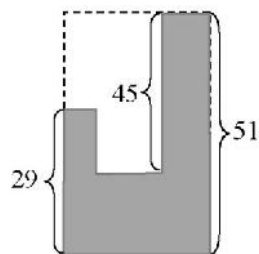
$$16 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 49\text{ cm}.$$

Бидејќи сламките не смее да се превиткуваат или кршат, ако Горјан може да состави правоаголник, тогаш правоаголникот треба да има целобројни должини изразени во сантиметри. Значи, треба да важи $2(a+b) = 49$, што не е можно бидејќи десната страна на последното равенство е непарен, а левата е парен број.

114. Горазд располага со дрвца со должина 6 cm и 4 cm . Определи го најмалиот вкупен број дрвца со кои тој може да направи правоаголник со должини на страни 34 cm и 14 cm (дрвцата не смее да се кршат).

Решение. Најмалку дрвца ќе се искористат ако се искористат најголем можен број дрвца со должина 6 cm . Бидејќи $36 = 5 \cdot 6 + 4$ отсечката со должина 34 cm може да се направи со 5 дрвца со должина 6 cm и едно дрвце со должина 4 cm , т.е. со вкупно 6 дрвца. Слично, од $14 = 6 + 2 \cdot 4$ добиваме дека отсечката со должина 14 cm може да се направи од едно дрвце со должина 6 cm и 2 дрвца со должина 4 cm , т.е. со вкупно 3 дрвца. Конечно, за да се направи правоаголникот со должини на страни 34 cm и 14 cm се потребни $2 \cdot (6 + 3) = 18$ дрвца.

115. Кога од правоаголен лист хартија се отсечени два правоаголници, добиена е сивата фигура прикажана на цртежот десно. Ако дадените димензии се во сантиметри, определи за колку сантиметри периметарот на обоената фигура е поголем од периметарот на правоаголниот лист.



Решение. Збирот на должините на трите хоризонтални горни страни на сивата фигура е еднаков на должината на хоризонталната страна на листот, па затоа збирот на хоризонталните страни на сивата фигура е еднаков на збирот на хоризонталните страни на листот. Понатаму, должините на вертикалните страни на сивата фигура се еднакви на 51 cm , 45 cm , 29 cm и $29 - (51 - 45) = 23\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на сивата фигура е за $45 + 29 + 23 - 51 = 46\text{ cm}$ поголем од периметарот на листот.

116. Сто еднакви квадрати со должина на страна еднаква на 3 cm треба да се наредат така што ќе се добие правоаголник со:

- 1) најголем периметар
- 2) најмал периметар.

Определи ги должините на страните на овие правоаголници. (Квадратот е правоаголник.)

Решение. Нека на страните на правоаголникот се поставени x и y , $x \leq y$ квадрати. Тогаш $xy = 100$, што значи дека

$$(x, y) \in \{(1, 100), (2, 50), (4, 25), (5, 20), (10, 10)\}.$$

Според тоа, ако должините на страните на правоаголникот се a и b , $a \leq b$, тогаш

$$(a, b) \in \{(3, 300), (6, 150), (12, 75), (15, 60), (30, 30)\},$$

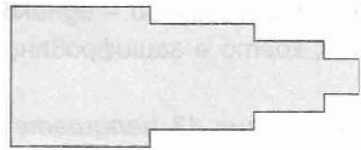
а периметрите се

$$2(3 + 300) = 606 \text{ cm}, \quad 2(6 + 150) = 312 \text{ cm}, \quad 2(12 + 75) = 174 \text{ cm},$$

$$2(15 + 60) = 150 \text{ cm}, \quad 2(30 + 30) = 120 \text{ cm},$$

соодветно. Најголем периметар има правоаголникот со должини на страни 3 cm и 300 cm , а најмал периметар има правоаголникот со должини на страни 10 cm и 10 cm .

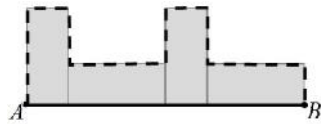
117. Фигурата прикажана на цртежот десно е добиена со помош на четири квадрат со должини на страни 1 cm , 2 cm , 3 cm и 4 cm , кои се залепени еден до друг.



Определи го периметарот на оваа фигура.

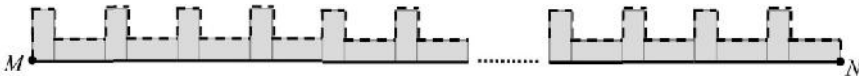
Решение. Прво да забележиме дека збирот на должините на малите вертикални страни на дадената фигура е еднаков на должината на страната на најголемиот квадрат (Зошто?). Според тоа, периметарот на дадената фигура е еднаков на $4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 28 \text{ cm}$.

118. Фигурата на цртежот десно е формирана од четири еднакви правоаголници, поставени последователно вертикално, хоризонтално, вертикално и пак хоризонтално.



Растојанието меѓу точките A и B е еднакво на 26 cm , а должината на непрекинатата линија која ги поврзува овие две точки е 48 cm .

- а) Пресметај ги должините на страните на еден од правоаголниците.
б) Фигурата на долниот цртеж е формирана од повеќе вакви правоаголници, поставени на истиот начин. Пресметај го бројот на овие правоаголници, ако растојанието меѓу точките M и N е за 328 cm помало од должината на искршената линија која ги поврзува овие две точки.



Решение, а) Ако со a и b ги означиме должината и ширината на еден правоаголник, соодветно, тогаш од првиот цртеж имаме

$$2a + 2b = 26 \text{ и } 3a + 3(a - b) + 3b = 48.$$

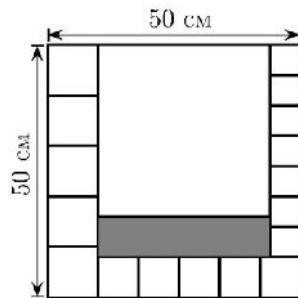
Од второто равенство следува $6a = 48$, т.е. $a = 8 \text{ cm}$, па сега од првото равенство следува $b = 5 \text{ cm}$.

б) Во дадената фигура имаме n правоаголници кои се поставени хоризонтално и n правоаголници кои се поставени вертикално. Затоа растојанието од M до N е еднакво на $n(8+5) = 13n$, а должината на искршената линија е еднаква на

$$8n + 5n + 8 + 5 + 2(n-1)(8-5) + (8-5) = 19n + 10.$$

Според тоа, $19n + 10 - 13n = 328$, од каде добиваме $6n = 318$, односно $n = 53$. Конечно, дадената фигура е составена од $53 + 53 = 106$ правоаголници.

119. Квадрат со должина на страна 50 cm е поделен на 18 бели квадрати и еден сив правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Определи го периметарот на сивиот правоаголник.



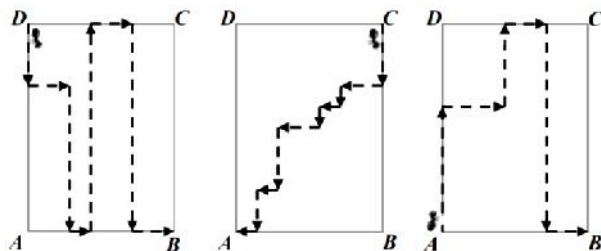
Решение. Должината на страната квадратите кои се во левата вертикала е еднаква на $50 : 5 = 10 \text{ cm}$. Значи, должината на страната

на помалите квадрати во долниот ред е еднаква на $(50 - 10) : 5 = 8 \text{ cm}$.

Според тоа, должината на страната на помалите квадрати во десната вертикала е еднаква на $(50 - 8) : 7 = 6 \text{ cm}$. Од досега изнесеното следува дека должината настраната на најголемиот квадрат е еднаква на $50 - (10 + 6) = 34 \text{ cm}$, па затоа должината на едната страна на сивиот правоаголник е 34 cm , а должината на другата страна е еднаква на $50 - (34 + 8) = 8 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot 34 + 2 \cdot 8 = 84 \text{ cm}$.

120. На трите цртежи

$ABCD$ е еден ист правоаголник. Кога мравката оди по патеката на левиот цртеж, за да стигне од темето D до темето B таа изминува 43 m , а за да стигне од темето C до темето A по покажаната



патека на средниот цртеж таа изминува 19 m . Колку метри ќе помине мравката за да отиде од темето A до темето C ако оди по патеката прикажана на десниот цртеж?

Решение. Должината на патот кој го минува мравката кога оди по патеката прикажана на левиот цртеж е еднаква на $3\overline{AD} + \overline{AB}$. Должината на патот кој мравката го минува кога оди по патеката прикажана на средниот цртеж е еднаква на $\overline{AD} + \overline{AB}$, а кога оди по патеката прикажана на десниот цртеж е еднаква на $2\overline{AD} + \overline{AB}$. Затоа,

$$\begin{aligned} 2\overline{AD} + \overline{AB} &= (4\overline{AD} + 2\overline{AB}) : 2 = (3\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AB}) : 2 \\ &= (43 + 19) : 2 = 31\text{ m}, \end{aligned}$$

што значи дека во третиот случај мравката минува 31 m .

121. Бојан, Иван и Павел добиле по еден лист хартија со должини на страни 80 mm и 100 mm . Бојан отсекол од својот лист три правоаголници со должини на страни 1 cm и 8 cm , Иван отсекол од својот лист три правоаголници со должини на страни 1 cm и 10 cm , Павел отсекол од својот лист последователно три правоаголници со ширина 1 cm и различни должини. На тројцата по последното отсекување делот од листот кој им останал имал форма на правоаголник.

- а) Определи го периметарот на преостанатиот дел од листот на Бојан.
- б) Определи го периметарот на преостанатиот дел од листот на Иван.
- в) Определи го периметарот на преостанатиот дел од листот на Павел.

Решение. Листот кој го добил секој е со димензии 8 cm и 10 cm .

- а) Бидејќи преостанатиот дел од листот на Бојан е правоаголник, а тој отсекол три правоаголници со должини на страни 1 cm и 8 cm , добиваме дека преостанатиот дел од листот е со должини на страни 7 cm и 8 cm и неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 30\text{ cm}$, направи цртеж.

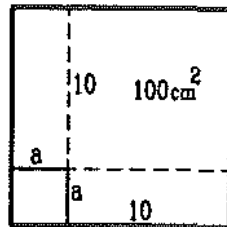
- б) Бидејќи преостанатиот дел од листот на Иван е правоаголник, а тој отсекол три правоаголници со должини на страни 1 cm и 10 cm , добиваме дека преостанатиот дел од листот е со должини на страни 5 cm и 10 cm и неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 30\text{ cm}$, направи цртеж.

- в) Бидејќи преостанатиот дел од листот на Павел е правоаголник, а тој отсекол три правоаголници со ширина 1 cm и различни ширини, можни се следниве случаи:

- секое отсекувањата да е со ширина 1 cm и притоа должините да трите отсекувања да се еднакви на должините на една од страните на правоаголникот од кој се отсекува, при што имаме неколку под-случаи, но во секој од нив се добива дека периметарот на правоаголникот кој преостанува е еднаков на 30 cm (отсечени правоаголници: $1 \times 8, 1 \times 9, 1 \times 7$ и преостанува правоаголник 7×8 , отсечени правоаголници $1 \times 10, 1 \times 8, 1 \times 9$ и преостанува правоаголник 6×9 , направи цртежи),
- отсекуваме правоаголници со димензии $1 \times 1, 1 \times 7, 1 \times 9$ и останува правоаголник со димензии 7×9 чиј периметар е $2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 32\text{ cm}$, направи цртеж,
- отсекуваме правоаголник со димензии 1×8 и него го делиме на три правоаголници со ширина 1 cm и различни должини, по што преостанува правоаголник со димензии 8×9 , или отсекуваме правоаголник со димензии 1×10 и него го делиме на три правоаголници со ширина 1 cm и различни должини, по што преостанува правоаголник со димензии 7×10 , но и во двата случаја периметарот на преостанатиот правоаголник е $2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 10 = 34\text{ cm}$, направи цртежи.

122. Ако страната на даден квадрат се зголеми за 10 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 200 cm^2 . Определи ги периметарот и плоштината на дадениот квадрат.

Решение. Ако должината на страната на дадениот квадрат е еднаква на a , тогаш со нејзиното зголемување за 10 cm се добиваат два правоаголника со должини на страни 10 cm и a и еден квадрат со должина на страна 10 cm (цртеж десно). Значи, зголемувањето на плоштината е



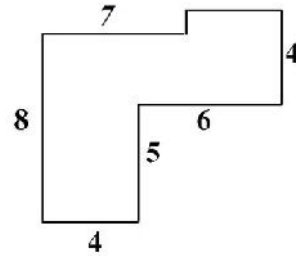
$$2 \cdot 10a + 10 \cdot 10 = 20a + 100,$$

па затоа

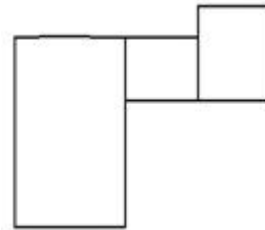
$$20a + 100 = 200, \text{ т.е. } a = 5\text{ cm}.$$

Конечно, периметарот на почетниот квадрат е еднаков на $4 \cdot 5 = 20\text{ cm}$, а неговата плоштина е еднаква на $5 \cdot 5 = 25\text{ cm}^2$.

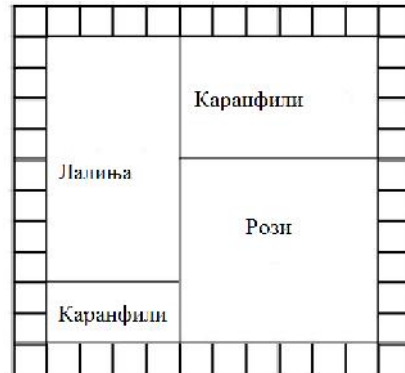
123. Цветната градина на Вера има облик како што е прикажано на цртежот десно, при што броевите означуваат должини на одделните страни изразени во метри. Вера градината ја поделила на квадрати со димензии $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ и во секој квадрат засадила по еден трендафил. Колку трендафили засадила Вера?



Решение. Дадената фигура ја делиме на правоаголник со димензии $8\text{ m} \times 4\text{ m}$, квадрат со димензии $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ и правоаголник со димензии $4\text{ m} \times 3\text{ m}$ (цртеж десно). Во првиот правоаголникот $8\text{ m} \times 4\text{ m}$ имаме 32 квадрати со димензии $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, во квадратот $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ имаме 9 квадрати со димензии $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ и во правоаголникот $4\text{ m} \times 3\text{ m}$ имаме 12 квадрати со димензии $1\text{ m} \times 1\text{ m}$. Според тоа, Вера засадила $32 + 9 + 12 = 53$ трендафили.

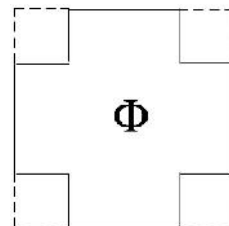


124. Илина во својата градина засадила лалиња, рози и каранфили (цртеж десно) околу кои има патека направена од квадратни плочки. Кое цвеќе е засадено на површина со најголема плоштина?



Решение. Лалињата се засадени на правоаголник составен од 8 реда во кои има по 4 квадрати, што значи на површина составена од $8 \cdot 4 = 32$ еднакви квадрати. Слично, розите се засадени на површина составена од $6 \cdot 6 = 36$ исти такви квадрати, а каранфилите се засадени на површина составена од $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 32$ исти такви квадрати. Според тоа, розите се засадени на површина со најголема плоштина.

125. Фигурата Φ е добиена кога од четирите агли на квадрат се отсечени четири еднакви квадратчиња, секое со плоштина 1 cm^2 (цртеж десно). Периметарот на фигурата Φ е еднаков на збирот на периметрите на четирите отсечени квадратчиња.



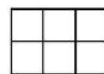
Опреди ја плоштината на фигурата Φ ?

Решение. Јасно, должината на страната на секое отсечено квадратче е 1 cm , т.е. периметарот на секое отсечено квадратче е еднаков на 4 cm . Понатаму, периметарот на фигурата Φ е еднаков на периметарот на почетниот квадрат, па затоа периметарот на почетниот квадрат е еднаков на $4 \cdot 4\text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на почетниот квадрат е еднаква на 4 cm и неговата плоштина е еднаква на $4 \cdot 4 = 16\text{ cm}^2$. Конечно, плоштината на фигурата Φ е еднаква на $16 - 4 \cdot 1 = 12\text{ cm}^2$.

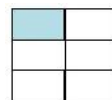
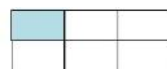
126. Семејството Јакопетрески има три градини во форма на квадрат. Едната градина е засадена со компири, другата со домати и третата со зелка. Градините ги заградиле со жичена ограда. Оградата на градината со домати е двапати подолга од оградата на градината со компири и двапати пократка од оградата на градината со зелка. Вкупната должина на сите три огради е еднаква на 1008 m . Опреди ја должината на секоја од оградите.

Решение. Нека x е должината на оградата на градината со компири. Тогаш должината на оградата на градината со домати е $2x$, а должината на оградата на градината со зелка е $2 \cdot 2x = 4x$. Според тоа. Точна е равенката $x + 2x + 4x = 1008$ од каде добиваме $7x = 1008$, т.е. $x = 144\text{ m}$. Според тоа, должината на оградата на градината со компири е 144 m , должината на оградата на градината со домати е 288 m и должината на оградата на градината со зелка е 576 m .

127. Од квадратни картончиња е направен правоаголник (на цртежот десно е даден пример на правоаголник од картончиња). Потоа една страна е намалена 2 пати, а другата страна е намалена 3 пати. Притоа бројот на картончињата е намален за 65. Колку квадрати со страна од 4 картончиња може да се одделат од почетниот правоаголник, без да се преместуваат картончињата? (На цртежот може да се одделат 2 квадрата со страна од 2 картончиња.)



Решение. Да забележиме дека како резултат на опишаните активности плоштината на правоаголникот се намалува $3 \cdot 2 = 6$

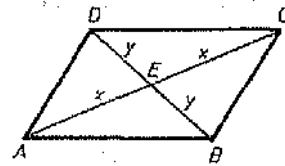


пати. Можните случаи се прикажани на цртежите десно (добиеен е обоениот правоаголник). Според тоа, останува правоаголник кој е

составен од $65:5=13$ картончиња. Но, од 13 картончиња може да се состави само 1×13 правоаголник. Значи, почетниот правоаголник е со димензии 2×39 картончиња или 3×26 картончиња. Во двата случаи едната страна е со помалку од 4 картончиња, па затоа од почетниот правоаголник не може да се оддели ниту еден квадрат со страна од 4 картончиња.

128. Периметарот на еден паралелограм е еднаков на 50 cm . Дијагоналите го делат паралелограмот на два пара складни триаголници, чии периметри се разликуваат за 5 cm . Определи ги должините на страните на паралелограмот.

Решение. Нека периметарот на триаголникот ABE е за 5 cm поголем од периметарит на триаголникот BCE (цртеж десно). Според тоа, $\overline{AB} + x + y = \overline{BC} + x + y + 5$, т.е. $\overline{AB} = \overline{BC} + 5$. Но, $\overline{AB} + \overline{BC} = 25$, па од последните две равенства добиваме $2\overline{BC} + 5 = 25$, т.е. $\overline{BC} = 10\text{ cm}$, Конечно, $\overline{AB} = 15\text{ cm}$.



129. Должината на еден правоаголник е за 6 cm поголема од неговата ширина. Средините на две соседни страни на правоаголникот ги поврзуваме, со што правоаголникот го делиме на триаголник и петаголник. Периметарот на петаголникот е за 30 cm поголем од периметарот на триаголникот. Определи ги должините на страните на правоаголникот.

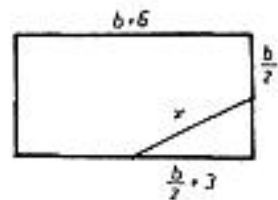
Решение. Според условот на задачата ширината и должината на правоаголникот се b и $b+6$ (цртеж десно). Периметрите на петаголникот и триаголникот се еднаков на

$$b + b + 6 + \frac{b}{2} + 3 + \frac{b}{2} + x \text{ и } x + \frac{b}{2} + 3 + \frac{b}{2},$$

па затоа

$$b + b + 6 + \frac{b}{2} + 3 + \frac{b}{2} + x - (x + \frac{b}{2} + 3 + \frac{b}{2}) = 30.$$

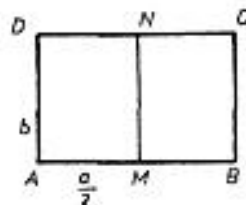
Од последната равенка за ширината на правоаголникот наоѓаме $b = 12\text{ cm}$. Конечно, должината на правоаголникот е $b + 6 = 18\text{ cm}$.



130. Даден е правоаголник $ABCD$ чиј периметар е еднаков на 100 cm . Нека M е средина на страната AB и N е средина на страната CD . Периметарот на правоаголникот $BCNM$ е еднаков на 70 cm . Определи ги должините на страните на правоаголникот $ABCD$.

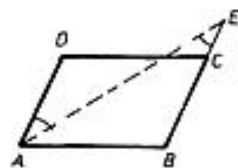
Решение. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е $2a + 2b = 100$, а периметарот на правоаголникот $BCNM$ е $2a + b = 70\text{ cm}$ (цртеж десно). Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $a = 30\text{ cm}$. Конечно,

$$b = \frac{100 - 2a}{2} = \frac{100 - 2 \cdot 30}{2} = 20\text{ cm}.$$



131. Во паралелограмот $ABCD$ симетралата на остриот агол во темето A го сече продолжението на страната BC во точката E , $\overline{EC} = 3\text{ cm}$. Определи ги должините на страните на паралелограмот $ABCD$ ако неговиот периметар е еднаков на 38 cm .

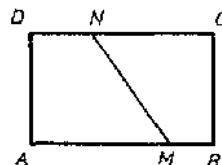
Решение. Имаме $\angle DAE = \angle AEB$, како агли со паралелни краци, и бидејќи $\angle DAE = \angle AEB$, добиваме $\angle AEB = \angle AEB$. Според тоа, $\triangle EAB$ е рамнокрак и важи $\overline{AB} = \overline{BE}$ (цртеж десно). Понатаму, од $\overline{EC} = 3\text{ cm}$ следува дека $\overline{AB} = \overline{BC} + 3$. Од друга страна $\overline{AB} + \overline{BC} = 19$.



Според тоа, $2\overline{BC} + 3 = 19$, па затоа $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ и $\overline{AB} = \overline{BC} + 3 = 11\text{ cm}$.

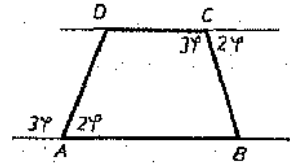
132. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Точките M и N лежат на страните AB и CD , соодветно. Периметрите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се еднакви на по 14 cm . Определи ја должината на отсечката MN .

Решение. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е $2(5 + 4) = 18\text{ cm}$. Збирот на периметрите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ е еднаков на 28 cm и тој е за $28 - 18 = 10\text{ cm}$ поголем од периметарот на правоаголникот $ABCD$. Според тоа, $2\overline{MN} = 10$, т.е. $\overline{MN} = 5\text{ cm}$.



133. Определи го видот на четириаголникот чии надворешни агли се еднакви на $3j$, $3j$, $2j$, $2j$. Определи го аголот j .

Решение. Збирот на надворешните агли на произволен четириаголник е еднаков на 360° . Значи, $3j + 3j + 2j + 2j = 360^\circ$, од каде добиваме $j = 36^\circ$. Значи, надво-



решните агли на четириаголникот се 72° , 72° , 108° и 108° . Според тоа, внатрешните агли на четириаголникот исто така се 72° , 72° , 108° и 108° и овој четириаголник е рамнокрак трапез (види цртеж).

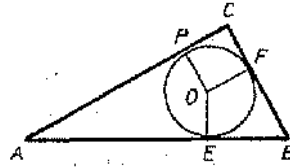
134. Дадена е кружница $k(o, r)$.

а) Конструирај точки кои кружницата ја делат на три дела кои се однесуваат како 3:4:5.

б) Во добиените точки повлечи тангенти на кружницата.

в) Определи ги аглите на триаголникот формиран од повлечените тангенти.

Решение. Кружницата k прво ја делиме на $3 + 4 + 5 = 12$ еднакви делови, а потоа на делови кои се однесуваат како 3:4:5. Секој од овие 12 еднакви делови зафаќа агол $360:12 = 30^\circ$. Точката P ја избираме



произволно, и над OP конструираме агол од 60° , кој го делиме на два еднакви дела од по 30° . Сега точката од точката P во насока на стрелката на часовникот три пати го нанесуваме лакот кој соодветствува на аголот од 30° , со што ја добиваме точката F , потоа четири пати го нанесуваме лакот кој соодветствува на аголот од 30° и ја добиваме точката E . Понатаму, ги повлекуваме радиусите OF и OE и во точките P, F и E конструираме нормали кои се бараните тангенти. Имаме $\angle POF = 90^\circ$, $\angle FOE = 120^\circ$, $\angle EOP = 150^\circ$. Понатаму, од четириаголникот $AEOP$ добиваме $\angle A + 90^\circ + 150^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, па затоа $\angle A = 30^\circ$. Аналогно добиваме $b = 60^\circ$ и $g = 90^\circ$.

135. Даден е правоаголник $ABCD$. Над пократката страна BC е конструиран рамностран $\triangle BCE$ така што точката E е во внатрешноста на

правоаголникот, а над страната CD е конструиран рамностран триаголник CDF кој е во надворешноста на правоаголникот.

а) Докажи дека отсечката EF е еднаква на дијагоналата на правоаголникот.

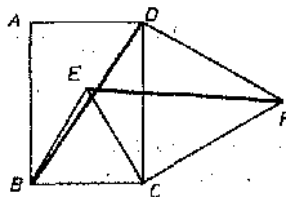
б) Определи го $\angle BCF$.

Решение. Имаме $\overline{EC} = \overline{BC}$, $\overline{CF} = \overline{CD}$ и

$$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF$$

$$= 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \angle BCD,$$

па од признакот САС следува дека триаголниците BDC и ECF се складни. Конечно, од докажаната складност следува $\overline{EF} = \overline{BD}$, што и требаше да се докаже. Јасно, $\angle BCF = 150^\circ$.



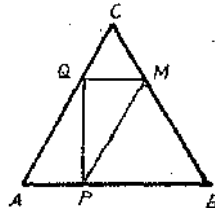
136. Нека ABC е рамностран триаголник со страна $a = 6 \text{ cm}$. Во точката M која припаѓа на страната BC и е поблиску до темето C се повлечени отсечки $MP \parallel AC$ и $MQ \parallel AB$, $P \in AB$ и $Q \in AC$.

а) Докажи дека $\overline{AP} + \overline{AQ} = a$.

б) Ако $\angle APQ = 90^\circ$, определи ги должините на отсечките AP и AQ .

Решение. а) Од $MP \parallel AC$ следува дека $\triangle PBM$ е рамностран. Понатаму, од $MP \parallel AC$ и $MQ \parallel AB$ следува дека четириаголникот $APMQ$ е паралелограм. Според тоа,

$$\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PM} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} = a.$$



б) Од $\angle APQ = 90^\circ$ следува дека $\angle AQP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, што значи дека правоаголниот триаголник APQ е половина од рамностран триаголник. Затоа $\overline{AQ} = 2\overline{AP}$. Сега од $\overline{AP} + \overline{AQ} = 6 \text{ cm}$ добиваме $3\overline{AP} = 6 \text{ cm}$, т.е. $\overline{AP} = 2 \text{ cm}$, а $\overline{AQ} = 4 \text{ cm}$.

137. Од темињата A и C на правоаголникот $ABCD$ се повлечени нормали AN и CM на дијагоналата BD , $M, N \in BD$.

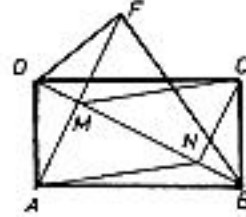
а) Докажи дека четириаголникот $ANCM$ е паралелограм.

б) Докажи дека $DF \perp BF$, каде F е симетричната точка на точката A во однос на точката M .

Решение. а) Триаголниците BDA и DBC се складни, па затоа $\overline{AM} = \overline{CN}$. Понатаму, $AM \perp BD$ и $CN \perp BD$, па затоа $AM \parallel CN$.

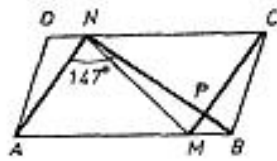
Според тоа, спротивните страни AM и CN на четириаголникот $ANCM$ се паралелни и еднакви, па затоа тој е паралелограм.

б) Од условот на задачата следува дека точките A, M и F се колинеарни и како $AM \perp BD$ добиваме $\overline{AM} = \overline{MF}$. Според тоа, точката F е симетрична на точката A во однос на правата BD . Затоа триаголниците BDA и BDF се складни. Конечно, од складноста на овие триаголници следува $\angle BAD = \angle BFD = 90^\circ$, т.е. $DF \perp BF$.



138. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M и N се точки на страните AB и CD , соодветно такви што $\overline{MB} = \overline{DN}$. Ако $\angle ANB = 147^\circ$, определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $BCNM$.

Решение. Од $\overline{MB} = \overline{DN}$ следува $\overline{AM} = \overline{CN}$ (цртеж десно). Според тоа, четириаголникот $AMCN$ има две спротивни еднакви страни кои се паралелни, па затоа тој е паралелограм. Тоа значи, $CM \parallel AN$. Бараниот агол

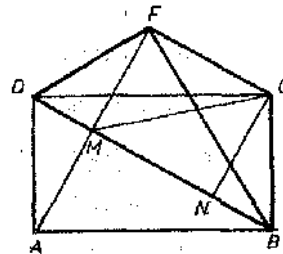


$\angle CPN$ е наизменичен со аголот $\angle ANB$, па затоа $\angle CPN = \angle ANB = 147^\circ$.

139. Од темето A на правоаголникот $ABCD$, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ е повлечена нормала на дијагоналата на правоаголникот и е продолжена за иста должина до точката F . Докажи дека:

- а) Отсечката BF е нормална на правата DF .
б) Четириаголникот $BDCF$ е рамнокрак трапез.

Решение. а) Нека подножјето на нормалата повлечена од темето A е M (цртеж десно). Точката F е симетрична на точката A во однос на точката M , па затоа $\overline{AM} = \overline{MF}$ и точките A, M, F се колинеарни. Според тоа, дијагоналата BD е симетрала на отсечката AF , па затоа $\overline{AD} = \overline{DF}$ и $\overline{AB} = \overline{BF}$. Сега од признакот $ССС$ следува $\triangle BDA \cong \triangle BDF$, па затоа

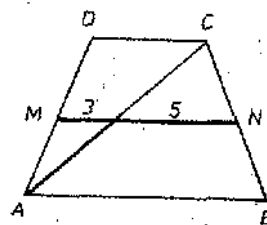


$$\angle BFD = \angle BAD = 90^\circ.$$

б) Јасно, $\overline{DF} = \overline{AD} = \overline{BC}$. Понатаму, триаголниците ABD , BCD и BDF се складни, па затоа $\overline{FM} = \overline{CN}$ (соодветни висини на складни триаголници). Последното значи дека $CF \parallel BD$. Според тоа, четириаголникот $BDCF$ е трапез со еднакви дијагонали, што значи дека тој е рамнокрак трапез.

140. Даден е рамнокрак трапез со должина на кракот 4 cm . Едната дијагонала на трапезот ја дели неговата средна линија на отсечки со должини 3 cm и 5 cm . Определи го периметарот и аглиите на трапезот.

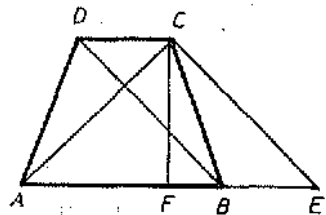
Решение. Должината на средната линија на трапезот е еднаква на $3 + 5 = 8\text{ cm}$ и бидејќи таа е еднаква на полузбирот на страните добиваме дека $a + b = 16\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на трапезот е $a + b + 2c = 24\text{ cm}$.



Во $\triangle ACD$ делот од средната линија на трапезот со должина 3 cm е средна линија на овој триаголник, па затоа $\overline{CD} = 6\text{ cm}$. Понатаму, во $\triangle ABC$ делот од средната линија на трапезот со должина 5 cm е средна линија на овој триаголник, па затоа $\overline{AB} = 10\text{ cm}$. Низ точката C повлекуваме права паралелна на AD која ја сече AB во точка E (направи цртеж). Четириаголникот $AECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{AE} = 6\text{ cm}$. Според тоа, $\overline{EB} = 4\text{ cm}$. Значи, $\overline{CE} = \overline{AD} = \overline{BC} = 4\text{ cm} = \overline{EB}$, па затоа $\triangle EBC$ е рамнострани. Според тоа, $\angle A = \angle B = 60^\circ$, па затоа $\angle C = \angle D = 120^\circ$.

141. Даден е рамнокрак трапез во кој дијагоналите се сечат под прав агол. Докажи дека должината на висината повлечена кон основите на овој трапез е еднаква на должината на неговата средна линија.

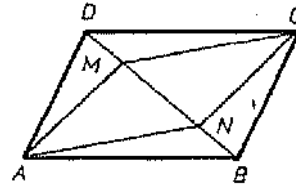
Решение. Низ точката C повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD и нека оваа права ја сече правата AB во точката E . Четириаголникот $BECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE} = \overline{BD} = \overline{AE}$, што значи дека $\triangle AEC$ е рамнокрак правоаголен триаголник. Сега, $\triangle AFC$ е рамнокрак правоаголен триаголник, па затоа $\overline{CF} = \overline{AF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BE}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$, што значи дека



должината на висината повлечена кон основите на трапезот е еднаква на должината на неговата средна линија.

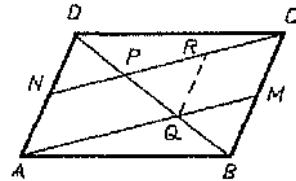
142. На пократката дијагонала BD на паралелограмот $ABCD$ се земени точки M и N такви што $\overline{DM} = \overline{BN} < \frac{1}{2}\overline{BD}$. Докажи дека четириаголникот $ANCM$ е паралелограм.

Решение. За триаголниците ADM и CDN важи $\angle ADM = \angle CBN$ (наизменични агли), $\overline{DM} = \overline{BN}$ (според условот) и $\overline{AD} = \overline{CB}$ (спротивни страни на паралелограм), па затоа тие се складни. Од докажаната складност следува $\overline{AM} = \overline{CN}$. Аналогно се докажува дека и триаголниците ABN и CDM се складни, од каде следува $\overline{AN} = \overline{CM}$. Според тоа, за четириаголникот $ANCM$ важи $\overline{AM} = \overline{CN}$ и $\overline{AN} = \overline{CM}$, што значи дека тој е паралелограм.



143. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките M и N се средини на страните BC и AD , соодветно. Докажи дека отсечките AM и CN ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

Решение. Нека P и Q се пресечните точки на дијагоналата BD со отсечките CN и AM , соодветно (цртеж десно). Имаме, $AN \parallel CM$ и $\overline{AN} = \overline{CM}$, па затоа четириаголникот $AMCN$ е паралелограм. Нека $QR \parallel AN$, $R \in CN$. Бидејќи $AM \parallel CN$ заклучуваме дека четириаголниците $AQRN$ и $CMQR$ се паралелограми. Според тоа, $\overline{AN} = \overline{ND} = \overline{QR} = \overline{MC} = \overline{BM}$. Јасно,

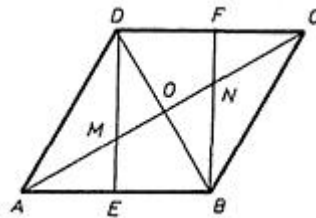


$$\angle NDP = \angle PQR = \angle QBM \text{ и } \angle DNP = \angle PRQ = \angle QMB,$$

што заедно со претходно изнесеното значи дека триаголниците DNP , QRP и BMQ се складни. Конечно од докажаната складност следува $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$, што и требаше да се докаже.

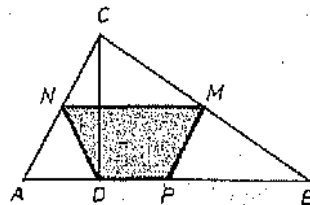
144. Даден е ромб чии внатрешните агли се однесуваат како $1:2:1:2$. Докажи дека висините на ромбот повлечени од темињата на тапите агли ја делат поголемата дијагонала на ромбот на три еднакви дела.

Решение. Нека α е внатрешниот остар агол на ромбот. Тогаш од односот на внатрешните агли $1:2:1:2$ следува дека внатрешниот тап агол е 2α , па затоа $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, од каде добиваме $\alpha = 60^\circ$ (цртеж десно). Според тоа, $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$ се два складни рамностранни триаголници со тежишта M и N , соодветно. Последното значи $\overline{MO} = \overline{NO} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{CN}$, па затоа $\overline{MN} = \overline{AM} = \overline{CN}$, што и требаше да се докаже.



145. Докажи дека средините на страните и подножјето на било која висина на произволен триаголник се темиња на рамнокрак трапез.

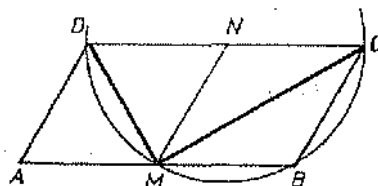
Решение. Нека $\triangle ABC$ е произволен остроаголен триаголник, M, N и P се средините на страните AC, CB и BA , соодветно и D е подножјето на висината повлечена од темето C (цртеж десно). Тогаш NM е средна линија на $\triangle ABC$, па затоа $NM \parallel AB$, што значи дека четириаголникот $MNDP$ е трапез со основи MN и DP . Понатаму, MP е средна линија на $\triangle ABC$, па затоа $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и како DN е тежишна линија на правоаголниот $\triangle ACD$ повлечена кон хипотенузата добиваме $\overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Конечно, $\overline{MP} = \overline{DN}$, што значи дека трапезот $MNDP$ е рамнокрак.



Случаите на правоаголен и тапоаголен триаголник се разгледуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

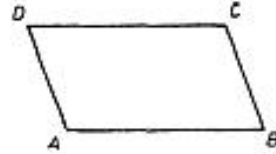
146. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Нека M е средината на страната AB . Докажи дека правата CM е нормална на правата DM .

Решение. Нека N е средина на страната CD (цртеж десно). Тогаш од $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ следува дека четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се складни ромбови, што значи $\overline{MN} = \overline{ND} = \overline{NC}$. Затоа кружница-

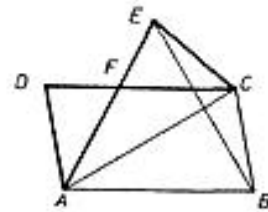


та конструирана над CD како над дијаметар ја содржи точката M , што значи $DM \perp CM$.

147. Во паралелограмот $ABCD$, прикажан на цртежот десно, конструирај точка E симетрична на точката B во однос на дијагоналата AC . Потоа повлечи ја отсечката AE . Нека F е пресечната точка на отсечките CD и AE . Докажи дека триаголниците CEF и ADF се складни.



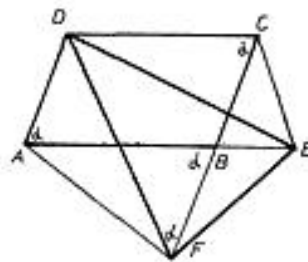
Решение. Точките E и B се симетрични една на друга во однос на дијагоналата AC , па затоа триаголниците ACE и ACB се складни. Според тоа, $\overline{BC} = \overline{CE}$ и $\angle AEC = \angle ABC$. Понатаму, $\overline{BC} = \overline{AD}$ како спротивни страни на паралелограм и $\angle ADF = \angle ABC$ како спротивни агли во паралелограм. Според тоа, $\overline{CE} = \overline{AD}$ и $\angle ADF = \angle FEC$. Освен тоа, $\angle DFA = \angle EFC$, како накрсни агли. Конечно, од претходно изнесеното следува дека триаголниците CEF и ADF се складни.



148. Даден е паралелограм $ABCD$ чиј внатрешен агол во темето B е тап. Страните AB и CB се продолжени преку темето B и на овие продолженија соодветно се избрани точки E и F такви што BE и BF се основи на рамнокраки триаголници BCE и ABF . Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.

Решение. Имаме:

$\angle BAD = \angle DCB = \angle CBE = \angle ABF = \alpha$, како агли со паралелни краци (цртеж десно), а $\angle AFB = \angle BFC = \alpha$ како агли при основите на рамнокраки триаголници. Исто така $\angle FAB = \angle BCE = \beta$, како агли при врвовите на рамнокраките триаголници BCE и ABF кои имаат еднакви агли при основата. Понатаму, од $\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{EC}$ и $\angle ECD = \beta + \alpha = \angle FAD$ следува дека триаголниците ECD и DAF се складни. Конечно, од докажаната складност следува $\overline{DF} = \overline{DE}$, т.е. триаголникот DEF е рамнокрак.



149. Дадени се прави p_1 и p_2 кои се сечат во точката O . Правите a и b се паралелни и се такви што правата a ги сече правите p_1 и p_2 во точките A_1 и A_2 , соодветно, а правата b ги сече правите p_1 и p_2 во точките B_1 и B_2 , соодветно и важи $\overline{A_1A_2} = 3,2 \text{ cm}$ и $\overline{B_1B_2} = 8,8 \text{ cm}$. Нека точката M е средина на отсечката A_2B_2 и точката N е средина на A_1B_1 . Определи ја должината на отсечката MN .

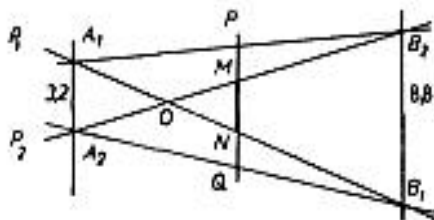
Решение. Четириаголникот

$A_1A_2B_1B_2$ е трапез. Нека правата MN ги сече A_1B_2 и A_2B_1 во точките P и Q , соодветно.

Тогаш PQ е средна линија за трапезот $A_1A_2B_1B_2$, PM е

средна линија за триаголникот $A_1A_2B_2$ и NQ е средна линија за триаголникот $A_1A_2B_1$. Затоа

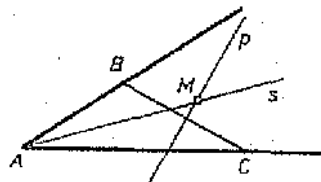
$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{PQ} - \overline{PM} - \overline{QN} = \frac{1}{2}(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}) - \frac{1}{2}\overline{A_1A_2} - \frac{1}{2}\overline{A_1A_2} \\ &= \frac{1}{2}(\overline{B_1B_2} - \overline{A_1A_2}) = \frac{1}{2}(8,8 - 3,2) = 2,8 \text{ cm}.\end{aligned}$$



V.4. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

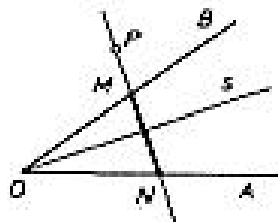
150. Даден е $\angle BAC$. Конструирај точка M која е еднакво оддалечена од краците на $\angle BAC$ и за која важи $\overline{MB} = \overline{MC}$.

Упатство. Бараната точка лежи на симетралата на $\angle BAC$ и симетралата на отсечката BC (цртеж десно). Ако $\overline{AB} = \overline{AC}$, тогаш решение на задачата се сите точки на симетралата на $\angle BAC$.



151. Даден е $\angle AOB$ и точка P надвор од него. Конструирај права p која минува низ точката P и која на краците на $\angle AOB$ отсекува отсечки со еднаква должина.

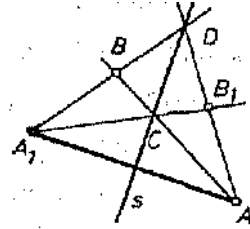
Упатство. Прво конструирај ја симетралата s на $\angle AOB$, а потоа од точката P повлечи нормала на s , која ги сече кра-



ците на аголот во точките M и N (цртеж десно). Докажи дека $\overline{OM} = \overline{ON}$.

152. Дадени се отсечката AA_1 , нејзината симетрала s и точката B која лежи во иста полурамнина со точката A_1 и таква што A_1B не е паралелна со s . Само со помош на линијар конструирај ја точката B_1 која е симетрична на точката B во однос на правата s .

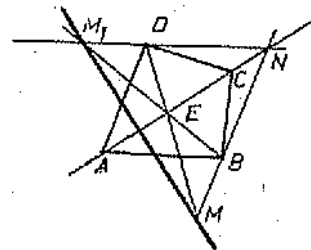
Решение. Ако B_1 е симетричната точка на точката B , тогаш правите AB и A_1B_1 ја сечат симетралата s . Но, овие прави се симетрични една на друга во однос на s , па затоа тие ја сечат во иста точка. Така ја имаме следнава конструкција. Ја повлекуваме правата AB и наоѓаме $C = AB \cap s$. Потоа ја повлекуваме правата A_1B и наоѓаме $D = A_1B \cap s$. Конечно, ги повлекуваме правите AD и A_1C и наоѓаме $B_1 = A_1C \cap AD$.



153. Даден е делтоид $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$ и точка M која лежи во надворешноста на делтоидот $ABCD$ и во полурамнина со B во однос на правата AC при што MB не е паралелна со AC . Само со помош на линијар конструирај права која минува низ точката M и која е нормална на правата AC .

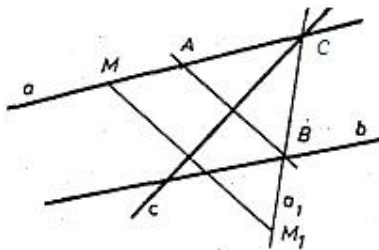
Решение. За да ја конструираме нормалата на правата AC која минува низ точката M доволно е да ја определиме точката M_1 која е симетрична на M во однос на AC . Ќе го користиме својството дека симетрични прави кои не се паралелни со оската на симетрија се сечат во точка која припаѓа на оската на симетрија.

Четириаголникот $ABCD$ е делтоид, па затоа точките B и D се заемно симетрични во однос на дијагоналата AC . Ги повлекуваме правите MB и MD и во пресек со AC ги наоѓаме точките E и N , соодветно. Понатаму, ги повлекуваме правите BE и DN и наоѓаме $BE \cap DN = M_1$. Конечно, ја повлекуваме правата MM_1 , која е бараната нормала.



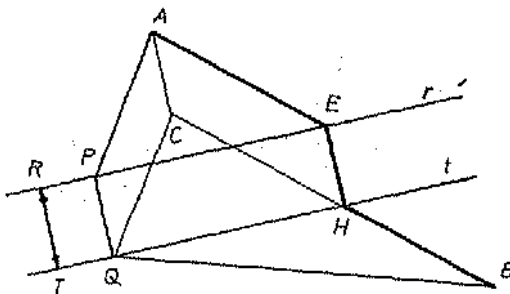
154. Во рамнината се дадени правите a, b и c , кои по парови не се паралелни една на друга. Определи точки A и B кои припаѓаат на правите a и b , соодветно и кои се симетрични во однос на правата c .

Решение. Нека правите a и c се сечат во точката C . На правата a избираме произволна точка M и ја конструираме точката M_1 симетрична на M во однос на правата c . Ја повлекуваме правата $a_1 \equiv CM_1$ која е симетрична на правата a во однос на правата c . Наоѓаме $a_1 \cap b = B$. Сега точката A ја добиваме во пресеку на правата a и нормалата на правата c во точката B .



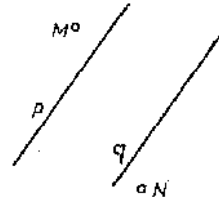
155. Две села се наоѓаат на различни страни од еден праволиниски воден канал, чии брегови се паралелни. Селата се наоѓаат на различни растојанија од каналот. На кое место треба да се изгради најкраток можен мост така што патот меѓу селата ќе биде најкраток?

Решение. Со A и B да ги означиме двете села, а со r и t бреговите на каналот (цртеж десно). Точката A ја транслатираме за вектор со должина еднаква на ширината на каналот $\overline{RT}$, во правец



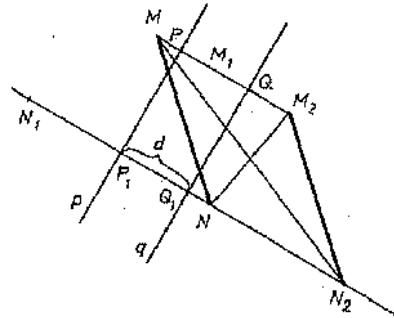
нормален на каналот и насока кон каналот, со што ја добиваме точката C . Ја повлекуваме правата CB и во пресек со правата t ја наоѓаме точката H . Нека HE е нормалата на бреговите на каналот (види цртеж). Отсечката HE ја определува положбата на мостот. Ќе докажеме дека патот $AENB$ е најкраток. Бидејќи ширината на каналот е константна доволно е да докажеме дека збирот $\overline{AE} + \overline{HB}$ е најмал. Четириаголникот $AENC$ е паралелограм, па затоа $\overline{AE} = \overline{CH}$, што значи дека $\overline{AE} + \overline{HB} = \overline{CH} + \overline{HB} = \overline{CB}$. Ќе докажеме дека ова е најмалиот збир, т.е. дека при секоја друга положба збирот е поголем. На пример, нека мостот биде PQ . Тогаш без должината на мостот збирот ќе биде $\overline{AP} + \overline{QB} = \overline{CQ} + \overline{QB} > \overline{CB}$, што и требаше да се докаже.

156. Дадени се паралелни прави p и q и точки M и N кои не лежат на правите (види цртеж). Нека точките M_1 и N_1 се соодветно симетрични на точките M и N во однос на правата p , а точките M_2 и N_2 се соодветно симетрични на точките M_1 и N_1 во однос на правата q . Докажи дека отсечките MN_2 и M_2N се преполовуваат.



Решение. Од својствата на осната симетрија следува $\overline{MM_1} = 2\overline{PM_1}$ и $\overline{M_1M_2} = 2\overline{QM_1}$ (цртеж десно). Според тоа,

$$\begin{aligned}\overline{MM_2} &= \overline{M_1M_2} + \overline{MM_1} \\ &= 2\overline{PM_1} + 2\overline{QM_1} \\ &= 2\overline{QP} = 2d,\end{aligned}$$



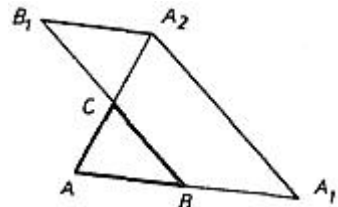
каде d е нормалното растојание меѓу правите p и q . Понатаму, $\overline{NN_1} = 2\overline{P_1N_1}$ и $\overline{N_1N_2} = 2\overline{Q_1N_1}$, па затоа

$$\overline{NN_2} = \overline{N_1N_2} - \overline{NN_1} = 2\overline{Q_1N_1} - 2\overline{N_1P_1} = 2d.$$

Според тоа $\overline{MM_2} = \overline{NN_2}$ и како отсечките MM_2 и NN_2 се нормални на правите p и q тие се паралелни меѓу себе. Значи, четириаголникот MM_2N_2N е паралелограм, па затоа неговите дијагонали MN_2 и M_2N се преполовуваат.

157. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени точки A_1, A_2 и B_1 такви што A_1 и A_2 се симетрични со A во однос на B и C , соодветно, а B_1 е симетрична на B во однос на C .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека ABC е произволен триаголник и A_1, A_2, B_1 се точки како во условот на задачата (цртеж десно). Тогаш триаголникот A_2B_1C е симетричен на триаголникот ABC во однос на точката C , па затоа отсечката A_2B_1 е паралелна и еднаква на отсечката AB . Исто така и отсечката BA_1 е паралелна и еднаква на



отсечката AB , па затоа отсечките A_2B_1 и BA_1 се паралелни и еднакви, што значи дека четириаголникот $A_1A_2B_1B$ е паралелограм и C е средина на страната BB_1 .

Конструкција. Над точките A_1, A_2, B_1 конструираме паралелграм $A_1A_2B_1B$. Точката C е во пресекот на симетралата на отсечката BB_1 и отсечката BB_1 . Конечно, точката A ја наоѓаме во пресек на правите BA_1 и CA_2 .

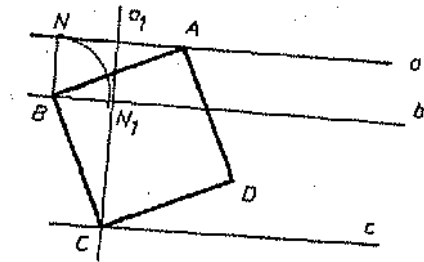
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение ако и само ако точките A_1, A_2, B_1 не се колинеарни.

158. Дадени се три различни паралелни прави a, b и c . Конструирај квадрат $ABCD$ таков што $A \in a, B \in b$ и $C \in c$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена (пртеж десно). Да ја разгледаме ротацијата $r_{B,90^\circ}$. Јасно, $r_{B,90^\circ}(A) = C$ и $r_{B,90^\circ}(a) = a_1$.

Конструкција. Избираме произволна точка B на средната права b . Од точката B повлекуваме нормала на a и нека N е подножјето на оваа нормала на правата a . Наоѓаме $r_{B,90^\circ}(N) = N_1$ и во точката N_1



повлекуваме нормала на правата b која нормала всушност е сликата a_1 на правата a при ротацијата $r_{B,90^\circ}$. Сега $c \cap a_1 = C$, па затоа $r_{B,-90^\circ}(C) = A$ и останува само да го конструираме темето B на квадратот $ABCD$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

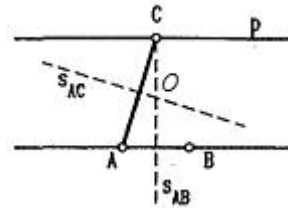
Дискусија. Задачата има единствено решение со точност до складност.

159. Дадени се точки A и B и права p паралелна на отсечката AB . Конструирај кружница која минува низ точките A и B и ја допира правата p .

Решение. Анализа. Нека претпоставиме дека задачата е решена (направи цртеж). Центарот на кружницата лежи на симетралата на отсечката AB , која минува низ точката C во која кружницата ја допира правата p . Понатаму, центарот на кружницата лежи на симетралата на отсечката AC .

Конструкција. Ја конструираме симетралата s_{AB} на отсечката AB и наоѓаме $C = s_{AB} \cap p$.

Ја конструираме симетралата s_C на отсечката AC и наоѓаме $s_{AB} \cap s_{AC} = O$. Конструираме кружница со центар во O и радиус $r = \overline{OA}$ и тоа е бараната кружница.

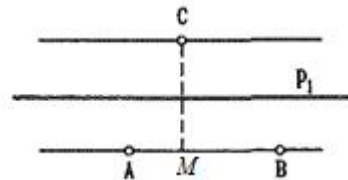


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има едно и единствено решени.

160. Во рамнина се дадени три неколинеарни точки A, B и C . Во рамнината конструирај права p таква што растојанијата од точките A, B и C до правата p се еднакви.

Решение. Анализа. Нека е претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека е конструирана правата p_1 која е еднакво оддалечена од точките A, B и C (цртеж десно). Тогаш правата p_1 е еднакво



оддалечена од правата AB и од точката C , па затоа таа е симетрала на отсечката која минува низ точката C и е нормална на правата AB .

Конструкција. Ја повлекуваме правата AB , од точката C спуштаме нормала n на AB и наоѓаме $n \cap AB = M$. Конструираме симетрала на отсечката CM и тоа е бараната права која е еднакво оддалечена од точките A, B и C (направи цртеж).

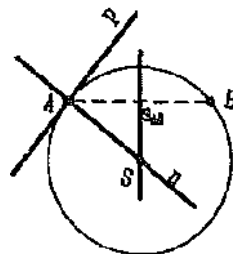
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има три решенија, бидејќи можеме да ги повлечеме правите AB, BC и CA и кон нив да повлечеме нормали од C, B и A , соодветно, а потоа да ги конструираме симетралите на добиените нормални отсечки.

161. Дадени се права p , точка A на правата p и точка B надвор од правата p .

Конструирај кружница која минува низ точката B и правата p ја допира во точката A .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Кружницата ја допира правата p во точката A , па затоа нејзиниот центар S лежи на нормалата n на p во точката A . Понатаму, AB е тетива на кружницата, па затоа S лежи на симетралата s_{AB} на отсечката AB .



Јасно, радиусот на кружницата е еднаков на $\overline{SA}$.

Конструкција. Во точката A конструираме нормала n на p , а потоа конструираме симетрала s_{AB} на отсечката AB и наоѓаме $s_{AB} \cap n = S$.

Конечно, конструираме кружница со центар S и радиус $r = \overline{SA}$ и тоа е бараната кружница.

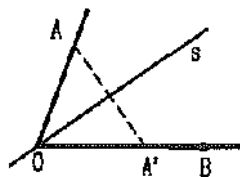
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Доказ. Задачата има едно и единствено решение.

162. Дадена е права s . Точките A и B се наоѓаат на различни страни од правата s . Конструирај $\angle AOB$ чија симетрала е правата s .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Тогаш краците на $\angle AOB$ се симетрични во однос на правата s , па затоа симетричната точка A' на точката A во однос на правата s лежи на кракот OB .

Конструкција. Ја конструираме симетричната точка A' на точката A во однос на правата s . Потоа ја повлекуваме правата $A'B$ и наоѓаме $O = A'B \cap s$. Конечно, ја повлекуваме правата OA со што $\angle AOB$ е конструиран.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако растојанијата од точките A и B до правата s се еднакви, но A и B не се симетрични во однос на s . Задачата има бесконечно многу решенија ако точките A и B се симетрични во однос на правата s . Во сотанатите случаи задачата има единствено решение.

163. Во рамнината се дадени права p и кружница $k(O, 2\text{ cm})$ такви што $p \cap k = \emptyset$. На кружницата е дадена точка M . Конструирај кружница k_1 која ја допира правата p и ја допира кружницата k во точката M .

Упатство. Нека t е тангентата на кружницата k во точката M . Сега бараната кружница ја допира правата q и ја допира правата t во точката M . Ако правите p и t се сечат, тогаш тие имаат две оски на симетрија, па затоа задачата има две решенија, а ако се паралелни, тогаш имаат една оска на симетрија и задачата има едно решение.

164. Правите a и b се сечат во точката O . На правата a е дадена точка A таква што $\overline{OA} = 4\text{ cm}$. Конструирај кружница која минува низ точката A и ги допира правите a и b .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена (направи цртеж). Кружницата ги допира правите a и b , па затоа нејзиниот центар S е еднакво оддалечен од правите a и b , што значи дека тој лежи на симетралата на аголот меѓу правите aOb . Од друга страна кружницата правата a ја допира во точката A , па затоа нејзиниот центар лежи на нормалата на правата a во точката A .

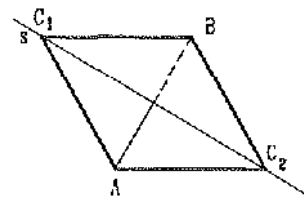
Конструкција. Цртаме правите a и b кои се сечат во точка O и наоѓаме точка A таква што $\overline{OA} = 4\text{ cm}$. Ги конструираме нормалата n на правата a во точката A и симетралата s на аголот aOb и наоѓаме $S = n \cap s$. Конструираме кружница $k(S, \overline{SA})$ (направи цртеж).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Точката A лежи на полуправата OA , па затоа имаме две симетрали на аглите bOA и AOB , т.е. задачата има две решенија.

165. Дадени се права s и точка A која не лежи на s . Конструирај рамностран триаголник ABC таков што правата s е оска на симетрија на $\triangle ABC$.

Решение. Прво ја конструираме точката B која е симетрична на точката A во однос на правата s (цртеж десно). Од $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ следува дека темето C кое лежи на s е оддалечено од темето A за должината на отсечката AB . Според тоа, задачата има две решенија.



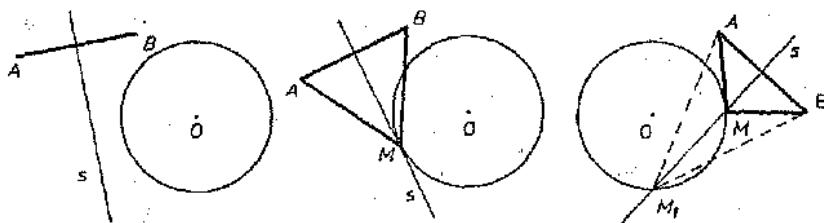
166. Дадени се $k(O, r)$ и отсечка AB . Конструирај точка $M \in k$ таква што $\overline{MA} = \overline{MB}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Од $\overline{MA} = \overline{MB}$ следува дека точката M треба да припаѓа на симетралата s на отсечката AB .

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката AB и наоѓаме $s \cap k = M$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

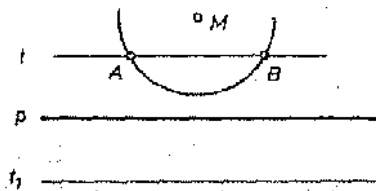
Дискусија. Симетралата s и кружницата k може да не се сечат, симетралата да ја допира кружницата и да се сечат во две точки. Според тоа, задачата нема решение, има едно и има две решенија (цртежи долу).



167. Дадена е права p и на растојание 5 cm од p е дадена точка M .
Опреди го множеството точки во рамнината кои од правата p се оддалечени 3 cm , а од точката M се оддалечени 4 cm .

Решение. *Анализа.* Точките оддалечени 3 cm од правата p лежат на прави паралелни на p на растојание 3 cm , а точките оддалечени 4 cm од точката M лежат на кружница $k(M, 4\text{ cm})$.

Конструкција. Конструираме прави t и t_1 паралелни на правата p кои се на растојание 3 cm од p . Конструираме кружница $k(M, 4\text{ cm})$ и во пресек на k со t и t_1 ги наоѓаме точките A и B , кои го формираат бараното множество точки.



Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

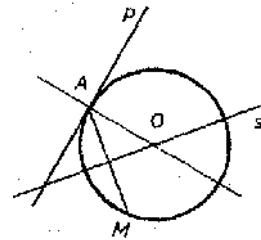
Дискусија. Задачата има единствено решение.

168. Дадени се права p , точка $A \in p$ и точка $M \notin p$. Конструирај кружница која минува низ точката M и ја допира правата p во точката A .

Решение. *Анализа.* Отсечката AM е тетива на бараната кружница, па затоа нејзиниот центар O лежи на симетралата s на AM . Кружни-

цата ја допира правата p во точката A , па затоа центарот O лежи на нормалата на p во точката A .

Конструкција. Повлекуваме нормала на p во точката A . Потоа ја конструираме симетралата s на отсечката AM . Во пресекот на нормалата и симетралата ја наоѓаме точката O . Конечно, конструираме кружница $k(O, \overline{OA})$ и тоа е бараната кружница.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

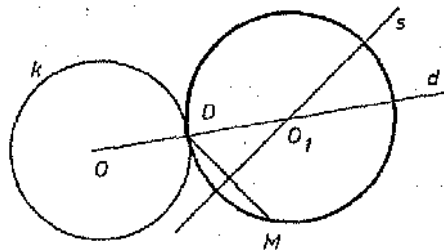
Дискусија. Задачата има единствено решение.

169. Дадени се кружница k , точка $D \in k$ и точка $M \notin k$. Конструирај кружница k_1 која минува низ точката M и ја допира кружницата k во точката D .

Решение. Анализа. Центарот на бараната кружница лежи на симетралата s на отсечката DM и на правата d која минува низ точките O и D .

Конструкција. Ја конструираме симетрала s на отсечката DM и ја повлекуваме правата $OD \equiv d$. Наоѓаме $s \cap d = O_1$.

Цртаме кружница $k_1(O_1, \overline{O_1D})$ и тоа е бараната кружница.



Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

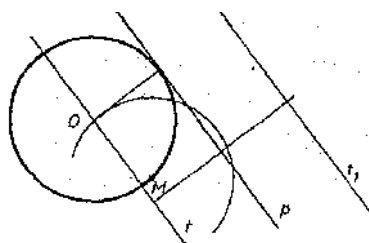
170. Конструирај кружница со радиус $r = 2\text{ cm}$ која допира дадена права p и минува низ дадена точка M која не лежи на p .

Решение. Анализа. Центарот O на бараната кружница припаѓа на правите t и t_1 кои се паралелни на правата p и се на растојание $r = 2\text{ cm}$ од p . Понатаму, центарот O припаѓа на кружницата $k(M, 2\text{ cm})$.

Конструкција. Конструираме прави t и t_1 кои се паралелни на правата p и се на растојание $r = 2\text{ cm}$ од p . Конструираме кружница $k(M, 2\text{ cm})$ и во пресек со правите t и t_1 наоѓаме точка O . Конечно, конструираме кружница $k(O, 2\text{ cm})$ и тоа е бараната кружница.

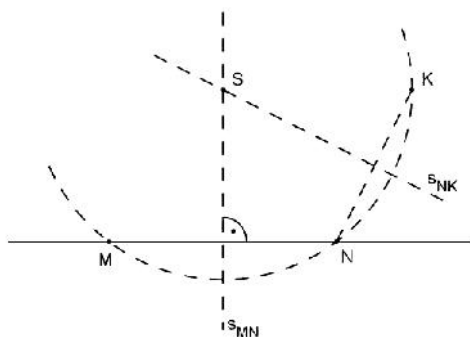
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две, едно или ниту едно решение во зависност од тоа дали растојанието од точката M до правата p е помало од 4 cm , еднакво на 4 cm или поголемо од 4 cm .



171. Дадена е права p , точки M и N , кои припаѓаат на правата p и точка K која не припаѓа на p . Конструирај кружница која минува низ точките M, N и K .

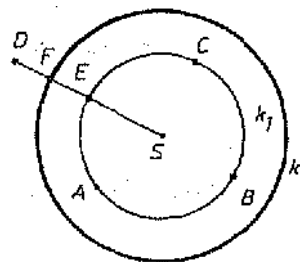
Решение. Нека S е центарот на кружницата која треба да ја конструираме. Тогаш $\overline{SM} = \overline{SN} = \overline{SK}$, па затоа точката S припаѓа на симетралата s_{MN} на отсечката MN и на симетралата s_{NK} на отсечката NK . Според тоа, треба да



ги конструираме правите s_{MN} и s_{NK} , во чиј пресек е точката S , а потоа да конструираме кружница со центар во S и радиус $\overline{SM}$. Јасно, бидејќи точката K која не припаѓа на p , симетралите s_{MN} и s_{NK} не се паралелни, па затоа задачата има единствено решение.

172. Дадени се точките A, B, C и D кои не лежат на една права. Конструирај кружница k таква што растојанијата од точките A, B, C и D до кружницата k се еднакви.

Решение. Нека точките A, B и C не припаѓаат на иста права и нека k_1 е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ (цртеж десно). Ако $D \in k_1$ тогаш кружницата k_1 е едно решение на задачата. Ако $D \notin k_1$, повлечуваме отсечката SD и наоѓаме $SD \cap k_1 = E$. Со F да ја означиме средината на отсечката SD . Тогаш кружницата $k(S, \overline{SF})$ е решение на задачата,



кракот MO на дадениот агол, при што точката A е поблиску до M од точката B . Определи го $\angle BOD$.

Решение. *Анализа.* Центарот на кружницата е на растојание $\overline{MC}$ од точката C и лежи на крајот на дадениот агол кој не ја содржи C .

Конструкција. Конструираме кружница $k(C, \overline{MC})$ и во пресекот со вториот крак на дадениот агол го наоѓаме центарот O на бараната кружница.

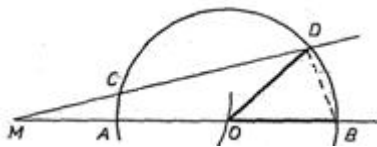
Конструираме $k(O, \overline{CO})$ и тоа е бараната кружница.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата

Дискусија. Задачата има единствено решение.

Бидејќи $\triangle MOC$ е рамнокрак, важи $\angle MCO = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$. Значи, $\angle OCD = 30^\circ$ и како CDO е рамнокрак добиваме $\angle CDO = 30^\circ$. Понатаму, $\angle BOD$ е надворешен агол за $\triangle MOD$, па затоа

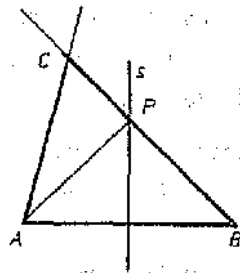
$$\angle BOD = \angle OMD + \angle MDO = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ.$$



175. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ и $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$.

Потоа на страната BC на $\triangle ABC$ конструирај точка P таква што $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{BC}$ и определи ги агли на $\triangle ABP$.

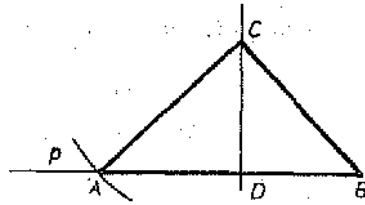
Решение. Конструкцијата на $\triangle ABC$ е елементарна. Прво ја конструираме отсечката AB , а потоа од иста нејзина страна на неа во точките A и B конструираме агли $\angle A = 75^\circ$ и $\angle B = 45^\circ$, па во пресек на нивните краци го добиваме темето C . Понатаму, за да $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{BC}$ мора да важи $\overline{AP} = \overline{BP}$, што значи дека точката P припаѓа на симетралата на отсечката AB (цр-теж десно). Конечно, $\triangle ABP$ е рамнокрак, па бидејќи $\angle ABP = \angle BAP = 45^\circ$, добиваме $\angle APB = 90^\circ$. Јасно, конструкцијата има единствено решение.



176. Конструирај правоаголен триаголник со катета $\overline{AC} = 3 \text{ cm}$ и висина $\overline{CD} = 2 \text{ cm}$ повлечена кон хипотенузата AB .

Решение. Цртаме права p и во произволна точка D конструираме отсечка CD таква што $CD \perp p$ и $\overline{CD} = 2 \text{ cm}$. Понатаму, цртаме

$k(C, 3\text{ cm})$ и наоѓаме $p \cap p = A$. Конечно, во точката C конструираме нормала на отсечката AC и во пресекот на оваа нормала и правата p го наоѓаме темето C , со што $\triangle ABC$ е конструиран. Јасно, задачата има единствено решение.

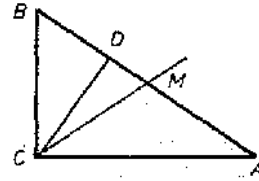


177. Симетралата на аголот и висината на правоаголен триаголник, повлечени во темето на правиот агол, формираат агол од 15° .

а) Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.

б) Конструирај го овој триаголник ако должината на висината повлечена кон хипотенузата е 4 cm .

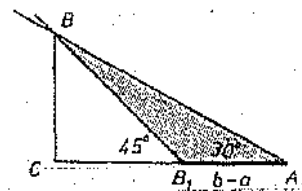
Решение. а) Нека триаголникот е ABC со прав агол во темето C , висина CD и симетрала на агол CM . Имаме, $\angle MCD = 15^\circ$, па затоа $\angle BCD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Сега, $\angle BCD$ и $\angle BAC$ се остри агли со нормални краци, па затоа $\angle BAC = \angle BCD = 30^\circ$. Конечно, $\angle ABC = 60^\circ$.



б) Конструираме прав агол со теме C и отсечка $\overline{CD} = 4\text{ cm}$, која со едниот крак на правиот агол зафаќа агол од 30° , а со другиот агол од 60° . Во точката D повлекуваме права p нормална на CD . Пресекот на правата p со краците на правиот агол се темињата A и B на бараниот триаголник.

178. Конструирај правоаголен триаголник за кој е позната разликата на катетите $b - a = 4\text{ cm}$ и $\alpha = 30^\circ$.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е правоаголен триаголник и B_1 е точка од страната AC таква што $\overline{B_1C} = \overline{BC} = a$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{B_1A} = b - a$ и $\triangle BCB_1$ е рамнокрак. Според тоа, $\angle CB_1B = 45^\circ$.



Конструкција. Прво конструираме отсечка $\overline{B_1A}$, $\overline{B_1A} = b - a = 4\text{ cm}$. Потоа над B_1A , од иста нејзина страна, во точката A конструираме

агол од 30° и во точката B_1 конструираме агол од 45° . Во пресекот на вторите краци на конструираните агли го добиваме темето B . Конечно, од B повлекуваме нормала на правата AB_1 и во пресекот го наоѓаме темето C .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкијата.

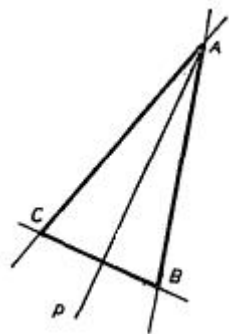
Дискусија. Задачата има единствено решение.

179. Дадена е права p и точка C која не припаѓа на p . Конструирај рамнокрак триаголник чија оска на симетрија е правата p , точката C е теме при основата на триаголникот и аголот при врвот на триаголникот е еднаков на 30° .

Решение. *Анализа.* Бидејќи правата p е оска на симетрија (цртеж десно), заклучуваме дека темињата B и C се симетрични во однос на p .

Сега, аголот при врвот A е еднаков на 30° , па затоа аголот при основата на $\triangle ABC$ е еднаков на 75° .

Конструкција. Ја конструираме точката B , која е симетрична на точката C во однос на правата p . Понатаму, над отсечката BC во точката C



конструираме агол еднаков на 75° и во пресекот на вториот крак на овој агол со правата p го добиваме третото теме A на $\triangle ABC$.

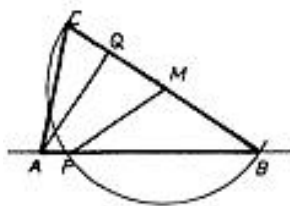
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

180. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени средината M на страната BC , подножјето P на висината повлечена од темето C и подножјето Q на висината повлечена од темето A .

Решение. *Анализа.* Бидејќи $\angle BPC = 90^\circ$, заклучуваме дека кружницата $k(M, \overline{MP})$ има дијаметар BC .

Конструкција. Ја повлекуваме правата $p = QM$ и ја конструираме кружницата $k(M, \overline{MP})$. Наоѓаме $k \cap p = \{B, C\}$. Понатаму, ја повлекуваме правата $r = BP$ и во точката Q ја конструи-



раме нормалата n на p . Наноѓаме $r \cap n = A$, со што $\triangle ABC$ е конструиран.

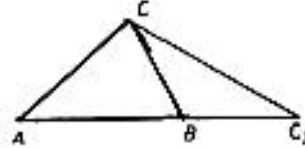
Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако точките M, P, Q се колинеарни.

Во спротивно има единствено решение.

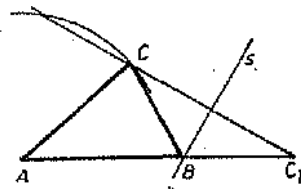
181. Конструирај $\triangle ABC$ ако $\overline{AB} + \overline{BC} = 11\text{ cm}$, $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Страната AB ја продолжуваме преку темето B до точка C_1 таква што $\overline{BC_1} = \overline{BC}$. Триаголникот C_1CB е рамнокрак и важи $\angle BCC_1 = \angle BC_1C = 30^\circ$.



Значи, за триаголникот AC_1C се познати страната $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{BC} = 11\text{ cm}$, $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ и $\angle AC_1C = 30^\circ$, па затоа може да се конструира.

Конструкција. Прво го конструираме $\triangle AC_1C$: $\overline{AC_1} = 11\text{ cm}$, $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ и $\angle AC_1C = 30^\circ$ (цртеж десно). Потоа ја конструираме симетралата s на страната C_1C и во пресек со страната AC_1 го наоѓаме темето B , со што $\triangle ABC$ е конструиран.

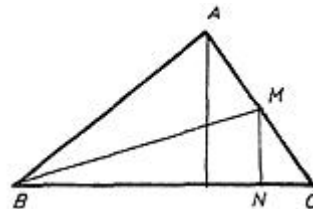


Доказ. Напосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две решенија.

182. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, должината $t_b = 5\text{ cm}$ на тежишната линија повлечена од темето B и должината $h_a = 4\text{ cm}$ на висината повлечена од темето A .

Решение. *Анализа.* Нека M е средина на страната AC и од точката M да повлечеме нормала MN на страната BC . Тогаш $\overline{MN} = \frac{1}{2}h_a$, па затоа триаголникот BCM може да се конструира.



Конструкција. Ја нанесуваме страната $\overline{BC} = 6\text{ cm}$. Повлекуваме права p паралелна на BC и на растојание $\frac{1}{2}h_a$ од BC . Конструираме

кружница $k(B, t_b)$ и наоѓаме $k \cap p = M$. Ја повлекуваме полуправата CM и на неа наоѓаме точка A таква што $\overline{MA} = \overline{CM}$, со што $\triangle ABC$ е конструиран.

Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две решенија, бидејќи кружницата k и правата p се сечат во две точки. Притоа едниот триаголник е остроаголен, а другиот е тапоаголен.

183. Од сите триаголници со дадена плоштина и должина на едната од страните конструирај го триаголникот кој има најмал периметар.

Решение. *Анализа.* Сите триаголници кои имаат заедничка основа AB и иста плоштина P имаат и еднакви висини, што значи дека третото теме припаѓа на права p која е паралелна со дадената основа и е на растојание $\frac{2P}{AB}$. Понатаму, периметарот на $\triangle ABC$ ќе биде најмал ако и само ако $\overline{AC} + \overline{BC}$ е најмал.

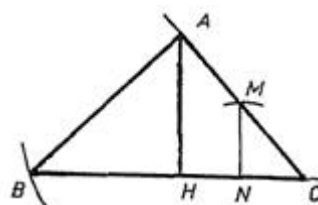
Конструкција. Конструираме права p паралелна на страната AB која е на растојание $\frac{2P}{AB}$ од AB . Конструираме точка A_1 симетрична на A во однос на p и наоѓаме $C = A_1B \cap p$ со што $\triangle ABC$ е конструиран.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

184. За $\triangle ABC$ се познати $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, тежишната линија $t_b = 5\text{ cm}$ повлечена во темето B и висината $h_a = 4\text{ cm}$ повлечена во темето A . Конструирај го $\triangle ABC$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена, MB е тежишната линија и AH е висината на $\triangle ABC$. Ако од точката M повлечеме нормала кон страната BC и N е подножната точка на оваа нормала, тогаш MN е средна линија на $\triangle ACH$, па затоа $\overline{MN} = \frac{h_a}{2}$.



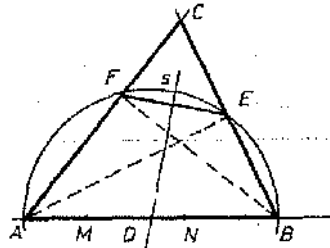
Конструкција. Ја конструираме отсечката BC , $\overline{BC} = 6\text{ cm}$. Потоа конструираме права p паралелна на BC и кружница $k(B, t_b)$. Наоѓаме $k \cap p = M$. Ја повлекуваме полуправата CM и точката A ја добиваме од условот $\overline{CM} = \overline{MA}$ (направи цртеж). *Доказ.* Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Правата p и кружницата k се сечат во две точки, па затоа задачата има две решенија. Едното решение е остроаголен, а другото е тапоаголен триаголник.

185. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: подножната точка E на висината повлечена од темето A , подножната точка F на висината повлечена од темето B и произволни две точки M и N од правата AB .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Точките E и F припаѓаат на кружницата чиј дијаметар е отсечката AB , па затоа отсечката EF е тетива на оваа кружница.

Конструкција. Низ точките M и N ја повлекуваме правата MN . Потоа ја конструираме симетралата s на отсечката EF и наоѓаме $s \cap MN = O$. Сега конструираме кружница $k(O, OE)$ и наоѓаме $k \cap MN = \{A, B\}$. Конечно, $AF \cap BE = C$, со што $\triangle ABC$ е конструиран.

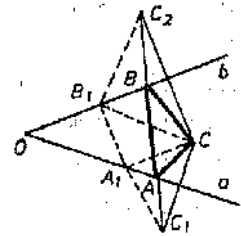


Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата нема решение ако $FE \perp MN$, а во спротивно има единствено решение.

186. Даден е конвексен агол aOb и во него точка C . Определи точки A и B , $A \in a$ и $B \in b$ такви што периметарот на $\triangle ABC$ ќе биде најмал.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека точките A и B се определени, т.е. конструиран е $\triangle ABC$, $A \in a, B \in b$ чиј периметар е најмал. Нека точката C_1 е симетрична на точката C во однос на полуправата Oa , а точката C_2 е симетрична на точката C во однос на полуправата Ob . Тогаш



$$\overline{C_1C_2} \leq \overline{C_1A} + \overline{AB} + \overline{BC_2} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC},$$

што значи дека најмалиот периметар се достигнува кога точките A и B лежат на правата C_1C_2 .

Конструкција. Ги конструираме точките C_1 и C_2 симетрични на точката C во однос на полуправите Oa и Ob . Понатаму, наоѓаме $C_1C_2 \cap Oa = A$ и $C_1C_2 \cap Ob = B$ со што задачата е решена.

Доказ. Доволно е да докажеме дека периметарот на секој друг триаголник A_1B_1C , $A_1 \neq A$ или $B_1 \neq B$ е поголем од периметарот на $\triangle ABC$ (види цртеж). Заради осната симетрија имаме $\overline{B_1C} = \overline{B_1C_2}$ и $\overline{A_1C} = \overline{A_1C_1}$, па како најкраткото растојание меѓу две точки е отсечката која ги поврзува тие точки добиваме

$$\begin{aligned}\overline{A_1C} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C} &= \overline{A_1C_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_2} > \overline{C_1C_2} \\ &= \overline{C_1A} + \overline{AB} + \overline{BC_2} = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC},\end{aligned}$$

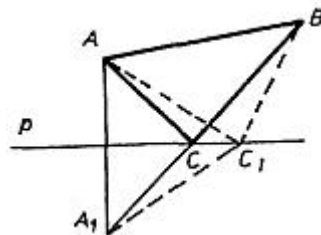
што и требаше да докажеме.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

187. Дадени се права p и точки A и B кои лежат од иста страна на p . Конструирај точка $C \in p$ таква што $\triangle ABC$ има најмал периметар.

Решение. *Анализа.* Периметарот на $\triangle ABC$ е најмал ако и само ако збирот на страните AC и BC е најмал.

Конструкција. Конструираме точка A_1 симетрична на точката A во однос на правата p и наоѓаме $C = p \cap BA_1$, со што $\triangle ABC$ е конструиран.



Доказ. Нека C_1 е произволна точка од правата p , различна од C . Точките A_1, C и B се колинеарни, па од неравенството на триаголник применето за $\triangle A_1C_1B$ и својствата на симетричните отсечки следува

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A_1C} + \overline{CB} = \overline{A_1B} < \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B} = \overline{AC_1} + \overline{C_1B},$$

што значи дека точката C е бараната точка.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

188. Два брода A и B се усидрени на езеро, недалеку од праволиниски брег p . Од бродот A испратиле чамец до бродот B , кој попатно требало да однесе еден патник до брегот. Конструирај го најкраткиот пат по кој чамецот треба да плови.

Упатство. Постапи аналогно како во претходната задача.

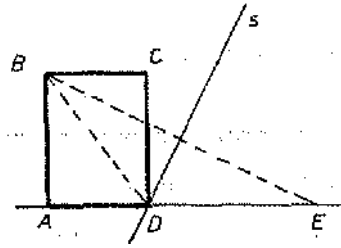
189. Конструирај правоаголник за кој се дадени страната $a = 4\text{ cm}$ и збирот на дијагоналата и другата страна $d + b = 8\text{ cm}$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена. Ако страната AD ја продолжиме преку темето D за должина d , тогаш

добиваме точка E таква што $\overline{AE} = b + d$. Сега триаголникот EBA може да се конструира, а точката D припаѓа на симетралата на отсечката BE .

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник BAE со катети

$$\overline{BA} = a = 4 \text{ cm} \text{ и } \overline{AE} = b + d = 8 \text{ cm}.$$



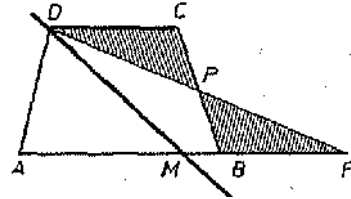
Ја конструираме симетралата s на страната BE и наоѓаме $s \cap AE = D$. Сега лесно се конструира темето C .

Доказ. Непсоредно следува од анализата и конструкцијат.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

190. Даден е трапез $ABCD$. Конструирај права s која минува низ едно од темињата и го дели трапезот $ABCD$ на два дела со еднакви плоштини.

Решение. Прво траpezот $ABCD$ ќе го претвориме во триаголник со еднаква плоштина како траpezот. Низ темето D и средината P на кракот BC повлекуваме права која ја сече правата AB во точка F . Лесно се докажува дека три-



аголниците DPC и FPB се складни, па затоа $P_{\triangle DPC} = P_{\triangle FPB}$, што значи дека $P_{\triangle AFD} = P_{ABCD}$. Средната линија DM го дели $\triangle AFD$ на два дела со еднакви плоштини. Според тоа,

$$P_{\triangle AMD} = P_{\triangle DMF} = P_{DMBP} + P_{\triangle FPB} = P_{DMBP} + P_{\triangle DPC} = P_{DMBC},$$

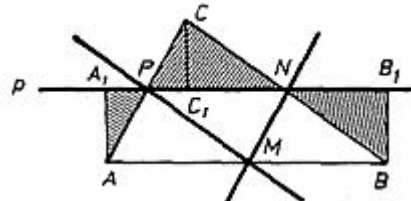
што значи дека правата DM е бараната права.

191. Дадени се точките A, B и C . Во рамнината која ги содржи дадедните точки конструирај права од која точките A, B и C се еднакво оддалечени.

Решение. Ќе разгледаме два случаја.

Ако точките A, B и C се колинеарни, т.е. припаѓаат на една права t , тогаш секоја права која е паралелна на правата t е решение на задачата.

Нека точките A, B и C не се колинеарни, т.е. тие се темиња на $\triangle ABC$, чии средни на страните AB, BC и CA се точките M, N и



P , соодветно. Ќе докажеме дека правите MN, NP и PM се решение на задачата. Ќе докажеме дека точките A, B и C се еднакво оддалечени од правата $p = PN$. Нека A_1, B_1 и C_1 се подножјата на нормалите повлечени соодветно од точките A, B и C кон правата p . Бидејќи $\triangle APA_1$ и $\triangle CPC_1$ се правоаголници и важи $\angle APA_1 = \angle CPC_1$ и $\overline{AP} = \overline{CP}$, овие триаголници се складни. Од складноста следува $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$. На потополно ист начин се доува дека $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, што значи $\overline{AA_1} = \overline{CC_1} = \overline{BB_1}$.

Забелешка. а) Равенството $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$ следува и од тоа што $AB \parallel PN$, $AA_1 \perp PN$ и $BB_1 \perp PN$.

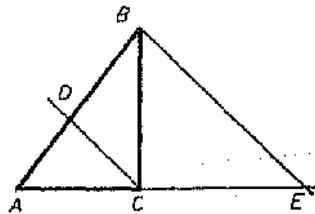
б) Ако задачата ја решаваме во простор, тогаш постои и четврта права, а тоа е правата која минува низ центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и е нормална на рамнината во која лежат точките A, B и C .

V.5. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

192. Во правоаголен $\triangle ABC$ со катети $\overline{AC} = 6\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ е повлечена симетралата $CD, D \in AB$ на правиот агол. Правата која минува низ темето B и е паралелна на CD го сече продолжението на катетата AC во точката E . Определи ја плоштината на $\triangle ABE$.

Решение. Од $\angle ACD = 45^\circ$ и $CD \parallel BE$

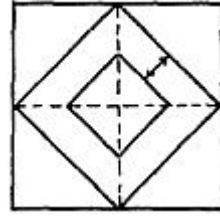
следува дека $\angle CEB = \angle EBC = 45^\circ$, т.е. $\triangle EBC$ е рамнокрак правоаголен (цртеж десно). Значи, $\overline{BC} = \overline{CE} = 8\text{ cm}$, па затоа $\overline{AE} = 14\text{ cm}$. Според тоа, бараната плоштина е $P = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56\text{ cm}^2$.



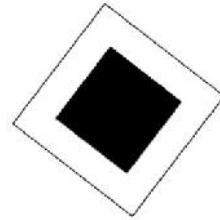
193. Во даден квадрат е впишан квадрат чии темиња се средините на страните на дадениот квадрат. Во вториот квадрат се наоѓа трет квадрат чии страни се 1 cm оддалечени од страните на вториот квадрат.

Опреди ели ја плоштината на дадениот квадрат ако должината на страната на третиот квадрат е еднаква на 2 cm .

Решение. Должината на страната на вториот квадрат е еднаква на $1+2+1=4\text{ cm}$, па затоа неговата плоштина е еднаква на 16 cm^2 , (цртеж десно). Плоштината на почетниот квадрат е двапати поголема од плоштината на средниот квадрат, што знаи дека таа е еднаква на 32 cm^2 .



194. Фирма за изработка на сообраќајни знаци треба да направи 300 знаци во форма на бел квадрат со должина на страна 45 cm во кој се содржи помал жолт квадрат со должина на страна која е 7 пати поголема од вториот по големина непарен прост број. Колку килограми бела и колку килограми жолта боја се потребни за изработка на знаците ако за 1 cm^2 се потребни $\frac{3}{25}\text{ g}$ бела и $\frac{4}{25}\text{ g}$ жолта боја.



Решение. Плоштината на големиот квадрат е $45 \cdot 45 = 2025\text{ cm}^2$. Вториот по големина непарен прост број е 5, што значи дека должината на страната на жолтиот квадрат е $7 \cdot 5 = 35\text{ cm}$, па затоа неговата плоштина е $35 \cdot 35 = 1225\text{ cm}^2$. Плоштината на белиот дел од знакот е еднаква на $2025 - 1225 = 800\text{ cm}^2$. Според тоа, за еден знак се потребни $800 \cdot \frac{3}{25} = 96\text{ g}$ бела и $1225 \cdot \frac{4}{25} = 196\text{ g}$ жолта боја. Конечно, за изработка на 300 знаци се потребни

$$300 \cdot 96 = 28800\text{ g} = 28,8\text{ kg} \text{ бела и}$$

$$300 \cdot 196 = 58800\text{ g} = 58,8\text{ kg} \text{ жолта боја.}$$

195. Опреди ги сите парови природни броеви кои може да бидат должини на страни на правоаголник изразени во сантиметри, чија плоштина е еднаква на плоштината на квадрат со страна 6 cm .

Решение. Плоштината на квадратот е еднаква на 36 cm^2 . Имаме, $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, па затоа решение на задачата се паровите: 1 и 36, 2 и 18, 3 и 12, 4 и 9, 6 и 6.

196. За колку проценти ќе се зголеми плоштината на квадрат ако должината на неговата страна се зголеми за 30%? Што ќе се случи со периметарот на квадратот?

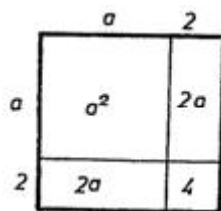
Решение. Плоштината на квадратот со должина на страна a е еднаква на a^2 . Кога страната се зголемува за 30%, нејзината должина е еднаква на $1,3a$, па затоа плоштината на новиот квадрат е еднаква на $(1,3a)^2 = 1,69a^2$. Според тоа, плоштината на квадратот ќе се зголеми за 69%. Јасно, притоа периметарот на квадратот ќе се зголеми за 30%.

197. Ако едната страна на правоаголникот ја намалиме за 4 cm , а другата ја зголемиме за 4 cm , ќе добиеме квадрат со плоштина 100 cm^2 . Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

Решение. Од $10 \cdot 10 = 100$ следува дека должината на страната на квадратот кој сме го добиле е еднаква на 10 cm . Според тоа, должините на страните на почетниот правоаголник се $10 + 4 = 14\text{ cm}$ и $10 - 4 = 6\text{ cm}$. Значи, плоштината на правоаголникот е $6 \cdot 14 = 84\text{ cm}^2$, а периметарот е $2 \cdot (6 + 14) = 40\text{ cm}$.

198. Ако страната на квадратот ја продолжиме за 2 cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 24 cm^2 . Определи ги плоштините на почетниот и новиот квадрат.

Решение. Нека должината на страната на почетниот квадрат е еднаква на a . Плоштината на новиот квадрат збир од плоштината на почетниот квадрат, плоштината на квадрат со должина на страна 2 cm и плоштина на два правоаголници со должини на страни 2 cm и $a + 2\text{ cm}$. Според тоа,

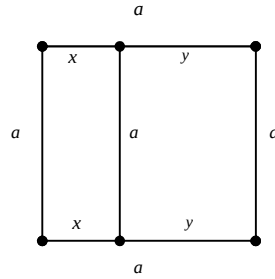


$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2a = 24$, од каде добиваме $a = 5\text{ cm}$. Според тоа, плоштината на почетниот квадрат е $5 \cdot 5 = 25\text{ cm}^2$, а плоштината на новодобиениот квадрат е $25 + 24 = 49\text{ cm}^2$.

199. Квадрат е исечен на два правоаголници. Збирот на периметрите на двата правоаголници е за 210 cm поголем од периметарот на квадратот. Плоштината на едниот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на другиот. Пресметај го периметарот на помалиот правоаголник.

Решение. Бидејќи збирот на периметрите на правоаголниците е за две должини на страната на квадратот поголем од периметарот на квадратот, следува дека $a = 210 : 2 = 105 \text{ cm}$.

Од друга страна, плоштината на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од плоштината на помалиот, а и двата имаат една иста страна (страната на квадратот), па затоа втората страна на поголемиот правоаголник е четири пати поголема од втората страна на помалиот. Значи, $x = 105 : 5 = 21 \text{ cm}$ и периметарот на помалиот правоаголник е $2 \cdot (105 + 21) = 252 \text{ cm}$.

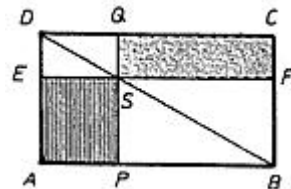
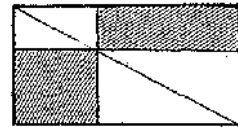


200. Спореди ги плоштините на осенчените правоаголници прикажани на цртежот десно.

Решение. Дијагоналиата го дели правоаголникот на два складни триаголника, па затоа $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle CDB}$. Понатаму, $QP \parallel AD$ и $EF \parallel AB$, што значи дека четириаголниците $ESQD$ и $PBFS$ се правоаголници. Според тоа, $P_{\triangle ESD} = P_{\triangle QDS}$ и $P_{\triangle PBS} = P_{\triangle FSB}$. Конечно,

$$\begin{aligned} P_{APSE} &= P_{\triangle ABD} - (P_{\triangle ESD} + P_{\triangle PBS}) \\ &= P_{\triangle CDB} - (P_{\triangle FSB} + P_{\triangle QDS}) = P_{FSCQ} \end{aligned}$$

што значи дека плоштините на осенчените делови на правоаголникот се еднакви.



201. Правоаголник со должини на страни 3 km и 5 km е намален во размер $1:10000$. Определи ја плоштината на намалениот правоаголник.

Решение. Должините на страните на план работен во размер $1:10000$ се
 $3 \text{ km} : 10000 = 3000 \text{ m} : 10000 = 30000 \text{ dm} : 10000 = 3 \text{ dm}$ и
 $5 \text{ km} : 10000 = 5000 \text{ m} : 10000 = 50000 \text{ dm} : 10000 = 5 \text{ dm}$.

Според тоа, бараната плоштина е $3 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = 15 \text{ dm}^2$.

202. Дадена е просторија со квадратен под. Подот е поплочен така што на секои 2 m^2 покрај бели плочки ставени се четири црни плочки со иста димензија како белите плочки. Вкупно се ставени 98 црни плочки. Плочките се во форма на квадрат со должина на страна 2 dm .

а) Определи го периметарот на подот на просторијата.

б) Колку бели плочки се употребени при поплочувањето?

Решение. а) Вкупниот број црни плочки е 98, а на $1 m^2$ бели плочки се ставени по 2 црни плочки. Сега од $98:2 = 49$ следува дека плоштината на подот е $49 m^2$, па како подот е во форма на квадрат добиваме дека должината на неговата страна е $7 m$. Конечно, периметарот на подот е еднаков на 28.

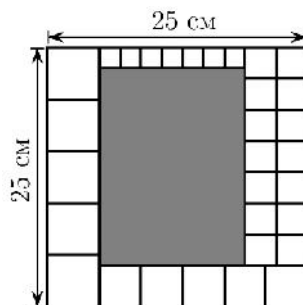
б) Должината на страната на една плочка е $2 dm$, па затоа за поплочување на $1 m^2$ се употребени $5 \cdot 5 = 25$ плочки, од кои 2 се црни. Според тоа, при поплочувањето на подот се употребени $49 \cdot (25 - 2) = 1127$ бели плочки.

203. Дадени се два квадрати, првиот со плоштината $16 cm^2$ која е четири пати помала од плоштината на вториот квадрат. Определи го односот на периметрите на овие квадрати.

Решение. Според условот на задачата плоштината на вториот квадрат е еднаква на $4 \cdot 16 cm^2 = 64 cm^2$. Значи, должината на страната на првиот квадрат е $4 cm$, а должината на страната на вториот квадрат е $8 cm$. Односот на периметрите е еднаков на $(4 \cdot 4):(4 \cdot 8) = 1:2$.

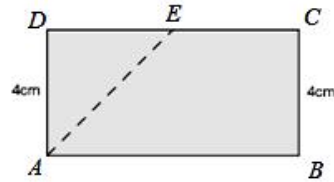
204. Квадрат со должина на страна $25 cm$ е поделен на 31 бел квадрат и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи ја плоштината на сивиот правоаголник.

Решение. Должината на страната на складните бели квадрати во левата колона е еднаква на $25:5 = 5 cm$. Понатаму, должината на страната на складните помали квадрати во долниот ред е еднаква на $(25 - 5):5 = 4 cm$. Сега должината на страната на складните бели квадрати во десните две колони е еднаква на $(25 - 4):7 = 3 cm$, а должината на страната на складните бели квадрати во горниот ред е еднаква на $(25 - 5 - 2 \cdot 3):7 = 2 cm$. Според тоа, должините на страните на сивиот правоаголник се $25 - 5 - 2 \cdot 3 = 14 cm$ и $25 - 4 - 2 = 19 cm$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $14 \cdot 19 = 266 cm^2$.



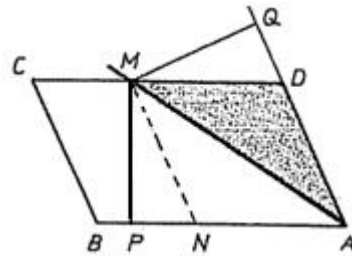
205. Во правоаголникот $ABCD$ симетралата на аголот во темето A ја сече страната CD во точката E , која е средина на страната CD . Познато е дека $\overline{BC} = 4\text{ cm}$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Според условот на задачата $\angle DAE = \angle BAE = 45^\circ$, од каде следува дека $\angle DEA = 45^\circ$. Според тоа, $\triangle AED$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC} = 4\text{ cm}$. Значи, $\overline{AB} = \overline{CD} = 2\overline{DE} = 8\text{ cm}$, па затоа $L = 2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 24\text{ cm}$ и $P = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 32\text{ cm}^2$.



206. Должините на страните на косоаголен паралелограм се еднакви на 7 cm и 4 cm . Определи го односот на плоштините на деловите на кои овој паралелограм е поделен со симетралата на еден од неговите внатрешни остри агли.

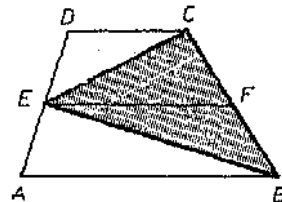
Решение. Нека за паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AD} = 4\text{ cm}$ и $\overline{AB} = 7\text{ cm}$ и нека AM е симетралата на остриот агол при темето A . Нека $MQ \perp AD$ и $MP \perp AB$. Од својството на симетралата на агол следува $\overline{MQ} = \overline{MP} = h$. Плоштината на паралелограмот



$ABCD$ е $7h\text{ cm}^2$, а плоштината на $\triangle ADM$ е $\frac{4h}{2} = 2h\text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на четириаголникот $ABCM$ е еднаква на $7h - 2h = 5h\text{ cm}^2$, па затоа бараниот однос е $2h : 5h = 2 : 5$.

207. Нека E е средината на кракот AD на трапезот $ABCD$. Докажи дека плоштината на $\triangle EBC$ е еднаква на половината од плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека EF е средната линија на трапезот $ABCD$. Таа го дели $\triangle EBC$ на два триаголника кои имаат заедничка основа EF и висини еднакви на $\frac{h}{2}$, каде h е висината на трапезот $ABCD$. Но, $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \overline{EF}$,



па затоа

$$P_{\triangle BCE} = 2 \cdot \frac{\overline{EF} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \overline{EF} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} P_{ABCD},$$

што и требаше да се докаже.

208. Даден е траpez $ABCD$ чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O . Докажи дека триаголниците ADO и BCO имаат еднакви плоштини.

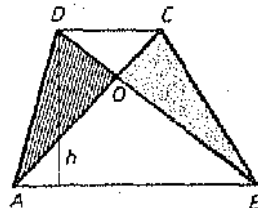
Решение. Нека h е висината на траpezот $ABCD$ (цртеж десно). Јасно, h е висина за триаголниците ABD и ABC , па затоа

$$P_{\triangle ABD} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = P_{\triangle ABC}.$$

Според тоа,

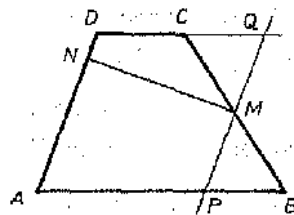
$$P_{\triangle ADO} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABO} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABO} = P_{\triangle BCO},$$

што и требаше да се докаже.



209. Определи ја плоштината на траpez кај кој должината на едниот крак е еднаква на 8 cm , а растојанието од средината на другиот крак до првиот крак е еднакво на 6 cm .

Решение. Нека за траpezот $ABCD$ важи $\overline{AD} = 8\text{ cm}$ и M е средина на кракот BC . Низ точката M повлекуваме права паралелна на AD , која ги сече правите AB и CD во точките P и Q , соодветно. Имаме,



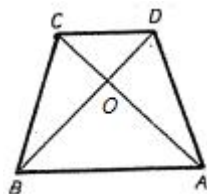
$$\overline{BM} = \overline{MC}, \angle PMB = \angle QMC, \angle PBM = \angle MCQ,$$

па затоа $\triangle MBP \cong \triangle MCQ$. Нека N е подножјето на нормалата повлечена од точката M кон кракот AD . Тогаш $\overline{MN} = 6\text{ cm}$ и важи

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{APMCD} + P_{\triangle PBM} = P_{APMCD} + P_{\triangle QCM} \\ &= P_{APQD} = \overline{AD} \cdot \overline{MN} = 48\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

210. Дијагоналите на траpezот $ABCD$ се заемно нормални и со должини 5 cm . Определи ја плоштината на овој траpez.

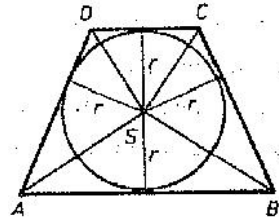
Решение. Нека $O = AC \cap BD$. Тогаш $BO \perp AC$ и $DO \perp AC$, па затоа



$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ADC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BO}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DO}}{2} \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot (\overline{BO} + \overline{DO})}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

211. Во рамнокрак трапез со плоштина 5 cm^2 е впишана кружница со радиус 1 cm . Определи го периметарот на овој трапез.

Решение. Нека S е центарот на впишаната кружница во рамнокракиот трапез $ABCD$. Ако S го поврземе со темињата на трапезот ги добиваме триаголниците ABS, BCS, CDS и DAS , чии висини повлечени кон страните AB, BC, CD и DA се еднакви на $r = 1 \text{ cm}$.



Според тоа,

$$\begin{aligned} 5 &= P_{ABCD} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CDS} + P_{\triangle DAS} \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot r}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot r}{2} + \frac{\overline{CD} \cdot r}{2} + \frac{\overline{DA} \cdot r}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}}{2} r, \end{aligned}$$

Од каде за добиваме

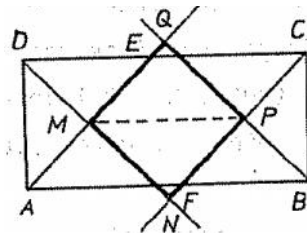
$$L_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 10 \text{ cm}.$$

212. Симетралите на внатрешните агли на правоаголникот $ABCD$ се сечат во точките M, N, P и Q .

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

б) Определи ја плоштината на квадратот $MNPQ$ ако должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се разликуваат за $k \text{ cm}$.

Решение. а) Симетралите на внатрешните агли на правоаголникот $ABCD$ со страните на правоаголникот формираат агли еднакви на 45° . Последното значи $\angle MDA = \angle MAD = 45^\circ$, па затоа $\angle NMQ = \angle AMD = 90^\circ$ (цртеж десно). Понатаму,



$MN \parallel PQ$ и $PN \parallel QM$, па затоа четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм кој има еден прав агол. Според тоа, четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник. Триаголниците AMD и CPB се складни. Од друга страна ADM, BCP и CDN се рамнокраки правоаголни триаголници, па затоа $\overline{MN} = \overline{DN} - \overline{DM} = \overline{CN} - \overline{CP} = \overline{PN}$. Конечно, четириаголникот

$MNPQ$ е правоаголник со еднакви соседни страни, што значи дека тој е квадрат.

б) Имаме $\angle NPM = \angle NCD = 45^\circ$, па затоа $MN \parallel CD$. Според тоа, четириаголникот $MPCE$ е паралелограм. Затоа

$$\overline{PM} = \overline{CE} = \overline{CD} - \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{AD} = k.$$

Конечно,

$$P_{MNPQ} = \frac{\overline{MP} \cdot \overline{QN}}{2} = \frac{k^2}{2}.$$

213. Во училиштето на Матеј има правоаголно фудбалско игралиште со должина 80 m и ширина 48 m . За колку проценти ќе се зголеми плоштината на игралиштето ако должината му се зголеми за 15%, а ширината му се зголеми за $\frac{1}{4}$?

Решение. Игралиштето има плоштина $80 \cdot 48 = 3840\text{ m}^2$. Зголемените димензии на игралиштето се

$$80 \cdot \frac{100+15}{100} = 92\text{ m} \quad \text{и} \quad 48 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 60\text{ m}.$$

Новата плоштина е $92 \cdot 60 = 5520\text{ m}^2$. Од $5520 : 3840 = 1,4375$ заклучуваме дека плоштината на игралиштето се зголемила за 43,75%.

214. Фудбалско игралиште во облик на правоаголник, чија ширина е двапати помала од должината, е нацртано на два плана и тоа: на едниот во размер 1:2500, а на другиот во размер 1:7500. Збирот на периметрите на двата правоаголника на размерите е 144 mm . Определи ги вистинската должина и ширина на игралиштето.

Решение. Нека во размерот 1:7500 должината на пократката страна е x . Тогаш должината на подолгата страна е $2x$, а периметарот е $6x$. Во размерот 1:2500 пократката страна е трипати подолга и нејзината должина е $3x$, подолгата е $6x$ и периметарот е $18x$. Збирот на периметрите е $6x + 18x = 24x$, па затоа должината на пократката страна на правоаголникот во размерот 1:7500 е $144 : 24 = 6\text{ mm}$. Според тоа, пократката страна на игралиштето е $6\text{ mm} \cdot 7500 = 45000\text{ mm} = 45\text{ m}$, а подолгата е двапати поголема, т.е. 90 m .

V.6. КОЦКА И КВАДАР

215. Дадена е коцка со должина на раб 6 cm и квадар со должини на рабови 9 cm , 12 cm и 15 cm . На колку најголеми можни еднакви коцки може да се расечат коцката и квадарот (димензиите се во сантиметри)? Дали користејќи ги сите добиени коцки од расекнувањето може да се состави нова коцка?

Решение. Од $\text{NZD}(6,9,12,15)=3$ следува дека најголемата можна коцка има должина на раб 3 cm . Според тоа, дадената коцка содржи $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ мали коцки, а квадарот содржи $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ мали коцки. Според тоа, имаме $60 + 8 = 68$ мали коцки и од нив не може да се состави коцка, бидејќи $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 < 68 < 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, што значи дека за составување коцка која на работ ќе има 4 коцки ни се потребни 64 мали коцки, а за составување коцка која на работ ќе има 5 коцки ни се потребни 125 мали коцки. Последното значи дека од добиените коцки не може да се состави нова коцка.

216. Самоил ги запакувал новогодишните подароци на Горјан во кутија во форма на коцка, со раб долг 6 dm и кутијата ја обложил со светликава хартија. Колку квадратни сантиметри е плоштината на хартијата со која Самоил ја обложил кутијата?

Решение. Должината на работ на кутијата е еднаква на $6\text{ dm} = 60\text{ cm}$. Коцката има шест страни во форма на квадрат, што значи дека плоштината на хартијата со која Самоил ја обложил кутијата изнесува $6 \cdot 60 \cdot 60 = 21600\text{ cm}^2$.

217. Збирот на должините на рабовите на една коцка е еднаков на 1224 cm . Определи ги плоштината и волуменот на оваа коцка.

Решение. Коцката има 12 рабови, па затоа должината на еден раб изнесува $a = 1224 : 12 = 102\text{ cm}$. Плоштината на коцката е еднаква на

$$6a \cdot a = 6 \cdot 102 \cdot 102 = 62424\text{ cm}^2,$$

а нејзиниот волумен изнесува

$$a \cdot a \cdot a = 102 \cdot 102 \cdot 102 = 1061208\text{ cm}^3.$$

218. Плоштината на една коцка е еднаква на 96 cm^2 . Определи го волуменот на оваа коцка?

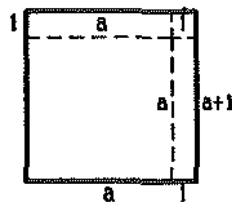
Решение. Коцката има шест сида, па затоа плоштината на еден нејзин сид е еднаква на $96:6=16\text{ cm}^2$. Од $16=4\cdot 4$ следува дека должината на работ на коцката е еднаква на 4 cm . Според тоа, волуменот на коцката е еднаков на $4\cdot 4\cdot 4=64\text{ cm}^3$.

219. Плоштината на коцката е еднаква на плоштината на правоаголник со должини на страни 12 cm и 8 cm . Определи го волуменот на коцката.

Решение. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $12\cdot 8=96\text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на еден сид на коцката е еднаква на $96:6=16\text{ cm}^2$. Од $16=4\cdot 4$ заклучуваме дека должината на работ на коцката е еднаква на 4 cm . Конечно, волуменот на коцката е еднаков на $4\cdot 4\cdot 4=64\text{ cm}^3$.

220. Ако работ на коцката се зголеми за 1 cm , тогаш новодобиената коцка има плошина која е за 366 cm^2 поголема од почетната коцка. Определи го волуменот на почетната коцка.

Решение. Нека a е должината на работ на коцката. Кога работ на коцката се зголемува за 1 cm , тогаш плоштината на сидот на коцката се зголемува за $2a+1$ (цртеж десно). Коцката има 6 сида, па како секој сид се зголемува за еднаква плошина добиваме дека зголемувањето на плоштината на еден сид е еднакво на $366:6=61\text{ cm}^2$. Значи, $2a+1=61$, т.е. $a=30\text{ cm}$. Конечно, волуменот на почетната коцка е еднаков на $a\cdot a\cdot a=30\cdot 30\cdot 30=27000\text{ cm}^3$.



221. Квадар е составен од 12 еднакви коцки со должина на раб 10 cm . Пресметај ја плоштината на овој квадар. Определи ги сите решенија.

Решение. Бидејќи

$$12=1\cdot 1\cdot 12=1\cdot 2\cdot 6=1\cdot 3\cdot 4=2\cdot 2\cdot 3,$$

заклучуваме дека може да се состават четири квадри и тоа:

$$(10,10,120), (10,20,60), (10,30,40), (20,20,30).$$

Нивите плоштини соодветно се:

$$P_1=50\text{ dm}^2, P_2=40\text{ dm}^2, P_3=38\text{ dm}^2, P_4=32\text{ dm}^2.$$

222. Коцка со должина на раб 3 cm е расечена на еднакви помали коцки со должина на раб 1 cm . Од добиените мали коцки се составени сите можни квадрати. Кој од добиените квадрати има најголема, а кој најмала плоштина?

Решение. Дадената коцка е расечена на $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ коцки со должина на раб 1 cm . Бидејќи

$$27 = 27 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3,$$

од малите коцки може да се состават три паралелопипеди:

$$(1, 1, 27), (1, 3, 9), (3, 3, 3)$$

чији плоштини се еднакви на

$$2(1 \cdot 1 + 1 \cdot 27 + 1 \cdot 27) = 110\text{ cm}^2,$$

$$2(1 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 9) = 78\text{ cm}^2,$$

$$6 \cdot 3 \cdot 3 = 54\text{ cm}^2,$$

соодветно, па најголема плоштина има првиот, а најмала плоштина има третиот паралелопипед.

223. Волуменот на коцката е еднаков на 1728 cm^3 . Определи ја нејзината плоштина.

Решение. Имаме

$$1728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) = 12 \cdot 12 \cdot 12,$$

што значи дека должината на страната на коцката е еднаква на 12 cm .

Според тоа, плоштината на коцката е

$$P = 6 \cdot 12 \cdot 12 = 864\text{ cm}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.(1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988). Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mičić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скопје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на зборови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по элементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Ангелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, Скопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019). Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерус, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теорија на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, Скопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

-
67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
 68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
 69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
 70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
 71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
 72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
 73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
 74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
 75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
 76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
 77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
 78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
 79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
 80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
 81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
 82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
 83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
 84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
 85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
 86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на зборови од производи и степени, Нумерус, Скопје
 87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамнострани триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
 88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
 89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, Скопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збирите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шарик, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Карацова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерус, Скопје