ЈБМО 2021

1. Нека n е оприроден број. Ја разгледуваме равенката

$$2[\frac{1}{2x}]-n+1=(n+1)(1-nx)$$

по непозната реална променлива x.

а) Реши ја равенката за $n=8$.

б) Докажи дека постои природен број n за кој равенката има најмалку 2021 решение.

Решение. Нека $k=[\frac{1}{2x}], k\in\mathbb{Z}$.

а) За $n=8$ равенката го добиваме видот

$$k=[\frac{1}{2x}]=8-36x,$$

од каде добиваме $x\neq 0$ и $x=\frac{8-k}{36}$. Бидејќи $x\neq 0$, важи $k\neq 8$ и од $k=[\frac{1}{2x}]$ добиваме $k=[\frac{18}{8-k}]$. Проверувајќи ги знаците на k и $\frac{18}{8-k}$ лесно заклучуваме дека $0<k<8$. Сега, со директна проверка наоѓаме $k=3$ или $k=4$, шри што соодветните вредности за x се $x=\frac{5}{36}$ и $x=\frac{1}{9}$.

б) Од дадената равенка имаме $x\neq 0$ и $x=\frac{2(n-k)}{n(n+1)}$. Затоа $k\neq n$ и

$$k=[\frac{1}{2x}]=[\frac{n(n+1)}{4(n-k)}].$$

Понатаму, повторно проверувајќи ги знаците на k и $\frac{n(n+1)}{4(n-k)}$ добиваме $0<k<n$. Последното значи дека

$$k\leq\frac{n(n+1)}{4(n-k)}<k+1,$$

од каде добиваме

$$\begin{cases}(2k-n)^2+n\geq 0\\(2k+1-n)^2<n+1\end{cases}$$

односно

$$\frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2}<k<\frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}. \quad (1)$$

Обратно, ако $k\in\mathbb{Z}$ ги исполнува условите (1) и $0<k<n$, тогаш $x=\frac{2(n-k)}{n(n+1)}$ е решение на дадената равенка. Останува да забележиме дека изборот на n таков што $\sqrt{n+1}<2021$ гаранитира дека постојат најмалку 2021 целобројни вредности на k за кои важи (1).

Забелешка. Задачатасе однесува на функцијата цел дел од реален број. Овие содржини 2019 година не беа вклучени во програмата за ЈБМО. Не може да се каже дали станува збор за превид на Жирито или има проширување на програмата. На читателот му препорачуваме да ги прошири своите знаења, што може да го направи консултирајќи ја наведената литература.

2. За секое множество $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ од пет различни природни броеви со S_A го означуваме збирот на неговите елементи, а со T_A го означуваме бројот на тројките (i,j,k) такви што $1\le i<j<k\le 5$ за кои $x_i+x_j+x_k$ е делител на S_A. Определи ја најголемата можна вредност на T_A.

Решение. Ќе докажеме дека најголемата можна вредност на T_A е 4. Нека $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ е множество од пет природни броеви такви што $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$. За тројката (i,j,k) ќе велиме дека е добра ако $x_i+x_j+x_k$ е делител на S_A. Не е можно тројките

$$(3,4,5),\ (2,4,5),\ (1,4,5),\ (2,3,5),\ (1,3,5)$$

да се добри, бидејќи од $x_5+x_3+x_1\,|\,S_A$ следува дека $x_5+x_3+x_1\,|\,x_4+x_2$ што не е моѓно бидејќи $x_4<x_5$ и $x_2<x_3$. Аналогно се покажува дека тројките од видот $(i,j,5)$ каде $j>2$ не може да се добри. Од досега изнесеното следува дека бројот на добрите тројки може да биде најмногу 5 и само тројките

$$(1,2,5),\ (2,3,4),\ (1,3,4),\ (1,2,4),\ (1,2,3)$$

може да се добри. Но, ако тројките $(1,2,5)$ и $(2,3,4)$ се истовремено добри, тогаш $x_1+x_2+x_5\,|\,x_3+x_4$, па затоа

$$x_5<x_3+x_4 \tag{1}$$

и $x_2+x_3+x_4\,|\,x_1+x_5$, па од (1) следува

$$x_2+x_3+x_4<x_1+x_5<x_1+x_3+x_4<x_2+x_3+x_4,$$

што е противречност. Затоа $T_A\le 4$.

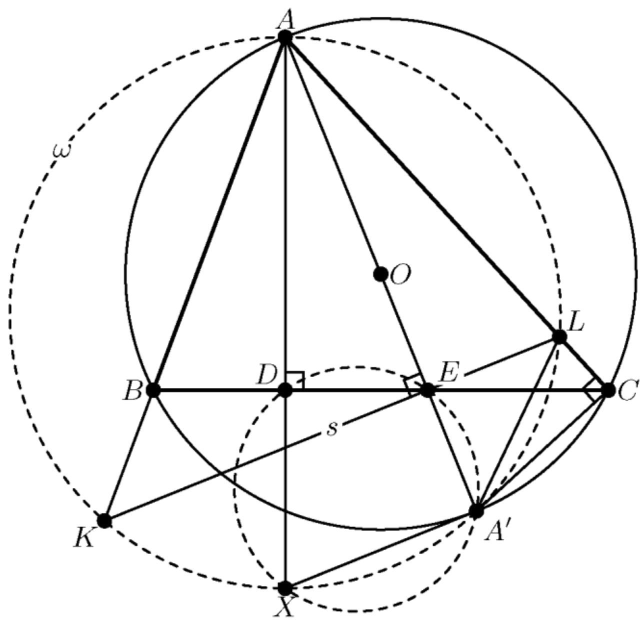
Дека равенството $T_A=4$ е можно, доволно е да ги разгледаме броевите 1, 2, 3, 4, 494. Лесно се гледа дека $6\,|\,498, 7\,|\,497, 8\,|\,496$ и $9\,|\,495$.

3. Нека ABC е остраоголен разностран триаголник со центар на опишаната кружница O. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A на страната BC. Правите BC и AO се сечат во точката E. Нека s е правата која минува низ точката E и е нормална на AO. Правата s ги сече AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека ω е опишаната круѓница околу триаголникот AKL. Правата AD по втор пат ја сече ω во точката X.

   Докажи дека ω и опишпаните кружници околу триаголниците ABC и DEX се сечат во една точка.

   Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки α,β,γ за аглите на триаголникот ABC. Имаме $\measuredangle BAD = 90^\circ - \beta = \measuredangle OAC$ и AX е дијаметар на ω. Исто така, да забележиме дека

$$\measuredangle ALK = \beta \text{ и } \measuredangle KLC = 180^\circ - \beta = \measuredangle KBC,$$



па така четириаголникот $BKLC$ е цикличен. Нека AO по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A'. Ќе докажеме дека A' е бараната заедничка точка. Јасно, AA' е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\measuredangle A'CA = 90^\circ$, од што следува дека четириаголникот $A'CLE$ е цикличен. Од степенот на точката E во однос на кружниците $(BKLC)$ и (ABC) следува

$$\overline{EK}\cdot\overline{EL} = \overline{EB}\cdot\overline{EC} = \overline{EA}\cdot\overline{EA'},$$

од што следува дека $A' \in \omega$. Сега, користејќи дека AX е дијаметѕар на ω добиваме дека $\measuredangle AXA' = 90^\circ$, па оттука следува дека четириаголникот $DXA'E$ е цикличен, со што доказот е завршен.

4. Нека M е подмножество од множеството $\{1,2,3,...,2021\}$ такво што за секои три елементи (не задолжително различни) a,b,c од M имаме $|a+b-c|>10$. Определи го најголемиот можен број елементи на M.

Решение. Множеството $M = \{1016,1017,...,2021\}$ има 1006 елементи и ги задоволува бараните услови, бидејќи ако $a,b,c \in M$, тогаш

$$a+b-c \geq 1016+1016-2021=11.$$

Ќе докажеме дека 1006 е најголемиот можен број елементи на M.

Нека M ги задоволува условите на задачата. Нека k е најмалиот елемент на M. Тогаш од $k = |k+k-k| > 10$ следува $k \geq 11$. Исто така, да забележиме дека за секој m броевите $m, m+k-10$ не може да припаѓаат на M, бидејќи $k+m-(k+m-10)=10$.

Лема 1. M содржи најмногу $k-10$ од било кои $2k-20$ последователни природни броеви.

Доказ. Множеството $\{m, m+1,..., m+2k-21\}$ го разбиваме на $k-10$ парови на следниот начин:

$$\{m, m+k-10\}, \{m+1, m+k-11\},..., \{m+k-11, m+2k-21\}.$$

Сега е јасно дека M може да содржи најмногу по еден елемент од секој пар. ■

Лема 2. M содржи најмногу $[\frac{t+k-10}{2}]$ од било кои t последователни природни броеви

Доказ. Нека $t = (2k-20)q + r$ каде $r \in \{0,1,2,...,2k-21\}$. Според Лемата 1 од множеството од првите $(2k-20)q$ броеви најмногу $(k-10)q$ може да припаѓаат на множеството M. Исто така, од Лемата 1 следува дека од последните r броеви најмногу $\min\{r, k-10\}$ може да припаѓаат на M. Така

1) Ако $r \leq k-10$, тогаш најмногу

$$q(k-10)+r = \frac{t+r}{2} \leq \frac{t+k-10}{2}$$

броја припаѓаат на M.

2) Ако $r > k-10$, тогаш најмногу

$$q(k-10)+k-10=\frac{t-r+2(k-10)}{2}\leq\frac{t+k-10}{2}$$

броја припаѓаат на M.

Сега тврдењето на лемата следува од 1) и 2). ■

Според Лемата 2 бројот на елементите од M меѓу броевите

$$k+1, k+2, ..., 2021$$

е најмногу

$$[\frac{(2021-k)+k-10}{2}]=1005.$$

Бидејќи од множеството $\{1,2,...,k\}$ само k припаѓа на M, заклучуваме дека M може да има најмногу 1006 елементи.