

Регионален натпревар 2001

I година

1. Да се докаже дека производот на четири последователни природни броеви е:

а) делив со 24

б) не е перфектен број (т.е. не квадрат на природен број)

Решение. а) Нека $n, n+1, n+2, n+3$ се четири последователни природни броеви. Тогаш нивниот производ е $n(n+1)(n+2)(n+3)$, во кој два од броевите се парни, при што еден од нив е делив со четири, а најмалку еден е делив со 3. Според тоа тој е делив со производот $2 \cdot 3 \cdot 4$ т.е. со 24.

б) Производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ го запишуваме во видот

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= [n(n+3)][(n+2)(n+1)] = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 - 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека не е квадрат на природен број за секој природен број n .

2А. Ако $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ и $ac > 0$, тогаш $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$. Докажи!

Решение. Имаме, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{a+c}{ac} = \frac{2}{b} \Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$. Според тоа

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} &= \frac{a + \frac{2ac}{a+c}}{2a - \frac{2ac}{a+c}} + \frac{c + \frac{2ac}{a+c}}{2c - \frac{2ac}{a+c}} = \frac{a^2 + 3ac}{2a^2} + \frac{c^2 + 3ac}{2c^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{c}{a} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{a}{c} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Притоа го користевме неравенството $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$, кое важи за $ac > 0$. Знакот за еднаквост важи за $a = c$.

2Б. Миле и Златко пишуваат домашна работа. Кога кај нив дошол Горан и ги запрашал по кои предмети пишуваат домашна работа тие одговориле:

Миле „Ако јас пишувам по математика, тогаш Златко пишува по македонски“

Златко: „Јас пишувам по македонски или Миле не пишува по математика“

Горан се подзамислил и рекол: „Вие или двајцата ја зборувате вистината или двајцата не ја зборувате вистината“

Дали Горан ја зборува вистината?

Решение. Со p и q да ги означиме следниве искази:

p : „Миле пишува домашна работа по математика“

q : „Златко пишува домашна работа по македонски“

Тогаш речениците на Миле и Златко се:

Миле: $p \Rightarrow q$

Златко: $q \vee \neg p$

Бидејќи исказната формула $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$ е тавтологија добиваме дека Миле и Златко или истовремено ја зборуваат вистината или истовремено не ја зборуваат вистината. Значи Горан ја зборува вистината.

3А. Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC , тогаш кружниците опишани околу триаголниците ABH , BCH и CAH имаат еднакви радиуси. Докажи!

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$, нека k_1 и k_2 се кружници опишани околу триаголниците ABH и BCH и нека HL и HM се дијаметри на k_1 и k_2 (види цртеж). Доволно е да докажеме дека $\overline{HL} = \overline{HM}$. Бидејќи $\angle HBL = 90^\circ = \angle HBM$, следува дека точките L, B и M се колинеарни. Ќе докажеме дека $\angle HLM = \angle HML$.

$$(1) \quad \angle HLB = \angle HAB,$$

како периферни агли над лакот HB од кружницата k_1 .

$$(2) \quad \angle HMB = \angle HCB,$$

како периферни агли над лакот HB од кружницата k_2 .

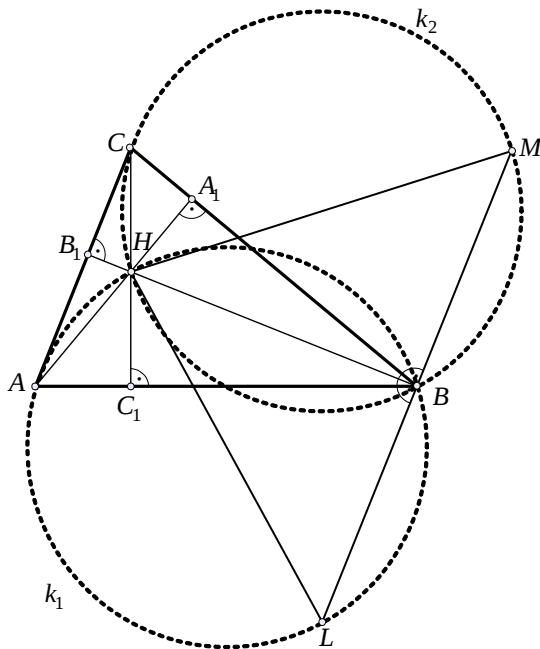
Од сличноста на правоаголните триаголници HAC_1 и HCA_1 следува $\angle HAC_1 = \angle HCA_1$, т.е.

$$(3) \quad \angle HAB = \angle HCB.$$

Од (1), (2) и (3) следува дека

$$\angle HLB = \angle HMB, \text{ т.е. } \angle HLM = \angle HML.$$

Значи $\triangle LMN$ е рамнокрак, па $\overline{HL} = \overline{HM}$, т.е. дијаметрите на кружниците k_1 и k_2 се еднакви.



3Б. Ако две кружници се концентрични и притоа дијаметарот на едната е двапати поголем од дијаметарот на другата, тогаш аголот што го зафаќаат тангентите повлечени од која било точка на поголемата кружница кон помалата кружница е 60° .

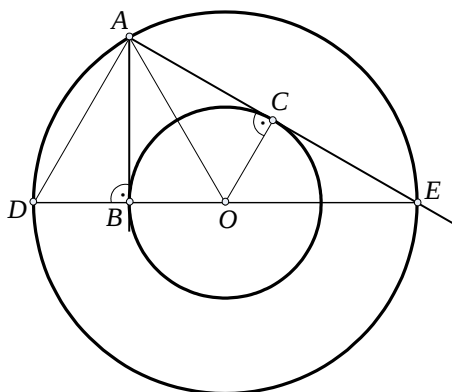
Решение. Нека AB и AC се тангентите повлечени од точката A на малата кружница. Во правоаголникот триаголник OAB е:

$$\overline{OB} = r, \overline{OA} = 2r, \text{ т.е. } \overline{OA} = 2\overline{OB}.$$

Значи катетата OB е двапати помала од хипотенузата OA , па следува дека

$$\angle OAB = 30^\circ.$$

Аналогно наоѓаме $\angle OAC = 30^\circ$, па следува $\angle BAC = 60^\circ$.



4. Одреди го најголемиот природен број помал од вредноста на изразот $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\dots\sqrt{6}}}}_{2001 \text{ корени}} + \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots\sqrt[3]{6}}}}_{2001 \text{ корени}}$, ако се знае дека $\sqrt[3]{6} > 1,8$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{6} > 2,4$ и $\sqrt[3]{6} > 1,8$ добиваме

$$4,2 < \sqrt{6} + \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}} + \sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}.$$

Од друга страна е:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6+3}}} = 3$$

и

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}} < \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6+2}}} = 2$$

па затоа

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}} < 5.$$

Значи бараниот број е 4.

II година

1A. Нека a и b се корени на равенката $x^2 - 3cx - 8d = 0$, а c и d се корени на равенката $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Пресметај го збирот $a+b+c+d$, ако a, b, c, d се различни реални броеви.

Решение. Од Виетовите формули имаме $a+b=3c$, $c+d=3a$, $ab=-8d$, $cd=-8b$. Ако ги собереме првите две равенки добиваме $a+b+c+d=3(a+c)$. Од нив наоѓаме: $b=3c-a$, $d=3a-c$ и со замена во другите две равенки добиваме: $a(3c-a)=-8(3a-c)$, $c(3a-c)=-8(3c-a)$.

Ако овие две равенки ги одземеме добиваме: $c^2 - a^2 = 32(c - a)$.

Бидејќи $a \neq c$, следува $a + c = 32$. Тогаш $a + b + c + d = 3(a + c) = 32 \cdot 3 = 96$.

1Б. Со формулата $y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ е определено множество параболи.

а) Одреди го геометриското место на темињата на овие параболи;

б) Реша ја равенката $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$.

Решение. а) Нека $T(x, y)$ е темето на параболата $y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1$, тогаш

$$x = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}, \quad y = -\frac{1}{k+1}.$$

Со елиминирање на k од горните равенки го добиваме бараното геометриско место: $y = x - 1$. Според тоа геометриското место на темињата на параболите е права.

б) Бидејќи $D = 4k^2 - 4(k^2 - 1) = 4$, добиваме $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{k-1}{k+1}$.

2А. Реша го во $\mathbb{R}$ системот равенки $x + \sqrt{y} = 3$, $y + \sqrt{z} = 3$, $z + \sqrt{x} = 3$.

Решение. $x - y = \sqrt{z} - \sqrt{y}$, $y - z = \sqrt{x} - \sqrt{z}$, $z - x = \sqrt{y} - \sqrt{x}$. Да претпоставиме дека $x \leq y$. Тогаш $\sqrt{z} - \sqrt{y} \leq 0$ т.е. $z \leq y$. Понатаму следува $\sqrt{x} - \sqrt{z} \geq 0$, т.е. $x \geq z$, а оттука $y \leq x$. Значи $x = y$. Аналогно добиваме $x = z$. Според тоа $x = y = z$. Затоа е доволно да ја решиме равенката $x + \sqrt{x} = 3$, т.е. $\sqrt{x} = 3 - x$, каде што $x \in [0, 3]$.

Нејзино решение е $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$ па следува дека решение на системот е

$$\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right).$$

2Б. Реша го во $\mathbb{R}$ системот равенки $x + y = z$, $x^2 + y^2 = z$, $x^3 + y^3 = z$.

Решение. Со квадрирање и кубирање на првата равенка добиваме:

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2, \quad z + 2xy = z^2, \quad xy = \frac{1}{2}(z^2 - z) \quad \text{и}$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = z^3, \quad z + \frac{3}{2}(z^2 - z)z = z^3, \quad z(z-1)(z-2) = 0.$$

Ако $z = 0$, тогаш $x + y = 0$, $xy = 0$, па решение е $(0, 0, 0)$.

Ако $z = 1$, тогаш $x + y = 1$, $xy = 0$, па решенија се $(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1)$.

Ако $z = 2$, тогаш $x + y = 2$, $xy = 1$, па решение е $(1, 1, 2)$

Следствено решенија на системот се: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 2)$.

3. Даден е комплексниот број u . Одреди ги сите комплексни броеви z така што $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ е реален број.

Решение. Комплексниот број a е реален број ако и само ако $a = \bar{a}$.

Нека $\frac{u-\bar{u}z}{1-z} = \overline{\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)}$, т.е.

$$\frac{u-\bar{u}z}{1-z} = \frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}},$$

$$u - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{u}z\bar{z} = \bar{u} - u\bar{z} - \bar{u}z + u\bar{z}\bar{z},$$

$$(\bar{u} - u)(1 - z\bar{z}) = 0.$$

Ако u е реален број, тогаш $u = \bar{u}$, па решение е секој $z \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Ако u е комплексен број, тогаш решение е секој $z \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ така што $|z| = 1$.

4. Даден е правоаголникот $ABCD$. Ако $k_1(O_1, R_1)$ е кружницата која минува низ A и D и ја допира BC , а $k_2(O_2, R_2)$ е кружницата која минува низ A и B и ја допира CD , тогаш

$$R_1 + R_2 \geq \frac{5}{8}(a+b),$$

каде што $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$. Докажи!

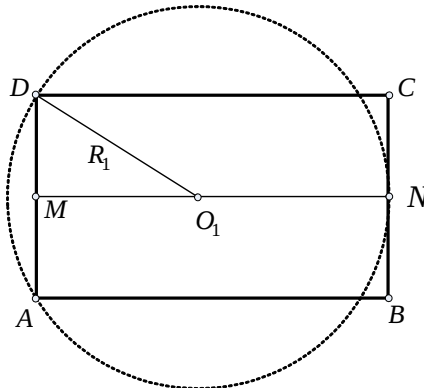
Решение. Нека кружницата k_1 минува низ A и D и ја допира страната BC во точката N . Очигледно е дека N е средина на BC . Нека M е средина на страната AD , тогаш од правоаголниот триаголник MO_1D добиваме:

$$R_1^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MO_1}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (a - R_1)^2.$$

Оттука следува дека $R_1 = \frac{b^2 + 4a^2}{8a}$ и ана-

логно $R_2 = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$. Конечно,

$$R_1 + R_2 = \frac{b^3 + 4a^2b + a^3 + 4ab^2}{8ab} = \frac{(a+b)(a^2 + b^2 + 3ab)}{8ab} \geq \frac{(a+b)(2ab + 3ab)}{8ab} = \frac{5(a+b)}{8}.$$



III година

1. Реши ја неравенката $\lg(5^x + x - 20) > x - x \lg 2$.

Решение. Бидејќи

$$x - x \lg 2 = x(\lg 10 - \lg 2) = x \lg 5 = \lg 5^x.$$

Неравенката го добива видот

$$\lg(5^x + x - 20) > \lg 5^x.$$

Оттука

$$5^x + x - 20 > 0, \quad 5^x + x - 20 > 5^x, \quad \text{па } x > 20.$$

2А. За произволни α, β и γ барем еден од броевите $\sin \alpha \cos \beta$, $\sin \beta \cos \gamma$, $\sin \gamma \cos \alpha$ не е поголем од $\frac{1}{2}$. Докажи!

Решение. Да го претпоставиме спротивно, т.е. дека секој од овие производи е поголем од $\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\sin \alpha \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cos \alpha > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta \cdot 2 \sin \beta \cos \gamma \cdot 2 \sin \gamma \cos \alpha > \frac{1}{8} \cdot 8,$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma > 1,$$

што не е можно, бидејќи $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma \leq 1$.

2Б. Реши ја равенката

$$\sin 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos^2 x.$$

Решение. Ако $\cos x = 0$, тогаш $\sin^2 x = 1, \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$, па равенката нема решение. Дадената равенка ја делиме со $\cos^2 x$ и добиваме

$$\sqrt{2} \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2 - \sqrt{2} = 0,$$

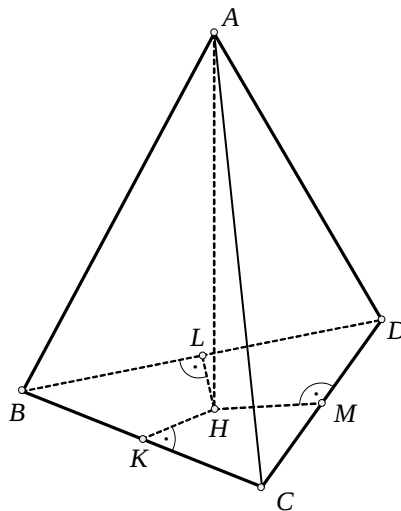
$$(\operatorname{tg} x - 1)(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{2} - 2) = 0$$

Значи $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$. Решенија на овие две равенки се: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

$$x_2 = \frac{\pi}{8} + m\pi, \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

3А. Рабовите AB, AC и AD од тетраедарот $ABCD$ се дијаметри на топките T_{AB} , T_{AC} и T_{AD} . Докажи дека овие три топки го препокриваат тетраедарот.

Решение. Од темето A спуштаме нормала AH на сидот BCD на тетраедарот. Од точката H спуштаме нормали HL , HM и HK на страните BD , DC и CB на триаголникот BCD . Ќе докажеме дека секоја од пирамидите $ABKL$, $ACKM$ и



$ADML$ е препокриена со топките T_{AB} , T_{AC} и T_{AD} соодветно.

Да ја разгледаме пирамидата $ABKL$. Од конструкцијата е јасно дека

$$\angle AKB = \angle ALB = \angle AHB = 90^\circ,$$

па според тоа точките K, H, L припаѓаат на сферата S_{AB} . Според тоа отсечките BL , BH и BK припаѓаат на топката, а исто така и AL , AH и AK . Следствено, триаголниците AKB , AHK и ALB како и четириаголникот $BLHK$ припаѓаат на топката T_{AB} . Значи, пирамидата $ABHKL$ е препокриена со топката T_{AB} .

3Б. Радиусите на опишаната и впишаната кружница на на еден правоаголен триаголник се однесуваат како $5:2$, соодветно. Одреди ги острите агли во триаголникот.

Решение. Нека R е радиус на опишаната кружница, а r радиус на впишаната кружница во правоаголниот триаголник. Ако $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$ тогаш

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = 1. \quad (1)$$

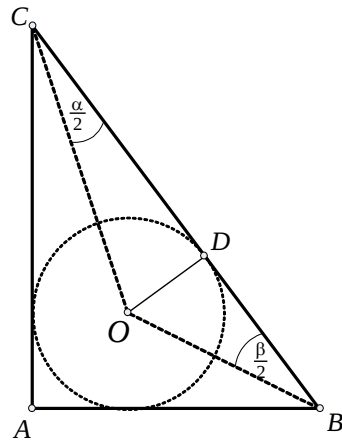
Важи

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{OD} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \overline{OD} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \\ &= r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}) \end{aligned}$$

Бидејќи $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$ добиваме:

$$2R = r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}).$$

Оттука $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2\frac{R}{r} = 5$. Триаголникот ABC е правоаголен, па $\alpha + \beta = 90^\circ$. Значи $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$. Од равенството (1) следува дека $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 6$. Земајќи $\alpha < \beta$ и решавајќи го системот равенки $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 5$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 6$, добиваме дека $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 3$ и $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2$. Оттука $\alpha = 2\operatorname{arccotg} 3$, $\beta = 2\operatorname{arccotg} 2$.



4. Ако a, b, c, d се страни на конвексен четириаголник, s - полупериметар, а 2ϕ збирот на два негови спротивни агли, тогаш неговата плоштина е

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \phi}.$$

Докажи!

Решение. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Да означиме:

$$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AD} = d,$$

$$\overline{CD} = c \text{ и } \beta + \delta = 2\phi.$$

Со дијагоналата AC тој е поделен на два триаголника. Тогаш неговата плоштина е

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{ab}{2} \sin \beta + \frac{cd}{2} \sin \delta.$$

Оттука

$$2P = ab \sin \beta + cd \sin \delta.$$

Со квадрирање на последното равенство се добива

$$4P^2 = a^2 b^2 \sin^2 \beta + c^2 d^2 \sin^2 \delta + 2abcd \sin \beta \sin \delta.$$

Ако во последната равенка замениме $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$, $\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta$ и ја дополниме до полн квадрат се добива

$$4P^2 = (ab + cd)^2 - (ab \cos \beta - cd \cos \delta)^2 - 2abcd(1 + \cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta).$$

Бидејќи $1 + \cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi$, со замена во последното равенство се добива

$$4P^2 = (ab + cd)^2 - (ab \cos \beta - cd \cos \delta)^2 - 4abcd \cos^2 \phi. \quad (1)$$

Нека $\overline{AC} = e$. Од триаголниците ABC и ACD со примена на косинусната теорема се добива:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, \quad e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta.$$

Со одземање на овие две равенки се добива:

$$ab \cos \beta - cd \cos \delta = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2).$$

Со замена на последното равенство во (1) се добива

$$4P^2 = (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 4abcd \cos^2 \phi,$$

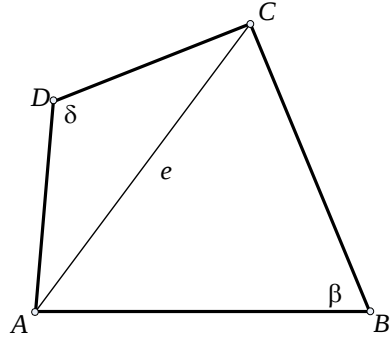
а оттука

$$4P^2 = \frac{1}{4}(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 4abcd \cos^2 \phi$$

$$P^2 = \frac{-a+b+c+d}{2} \cdot \frac{a-b+c+d}{2} \cdot \frac{a+b-c+d}{2} \cdot \frac{a+b+c-d}{2} - abcd \cos^2 \phi \quad (2)$$

Од условот на задачата $\frac{a+b+c+d}{2} = s$, па со замена во (2) добиваме

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \phi}.$$



IV година

1А. Во бесконечна аритметичка прогресија, чии членови се цели броеви, еден член на прогресијата е квадрат на природен број. Докажи дека прогресијата има бесконечно многу членови кои се квадрати на природни броеви.

Решение. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија чии членови се цели броеви со разлика d . Ако членот $a = m^2$, каде $m \in \mathbb{N}$, тогаш

$$(m + kd)^2 = m^2 + d(2mk + k^2d)$$

е исто така член на прогресијата.

1Б. Биномните коефициенти на вториот, третиот и четвртиот член во развојот на биномот $(1+x)^n$ образуваат аритметичка прогресија. Пресметај го n .

Решение. Имаме $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$. Со средување се добива $n^2 - 9n + 14 = 0$. Решенија се $n_1 = 7$ и $n_2 = 2$, но за $n_2 = 2$ задачата нема смисла. Значи $n = 7$.

1А. Реши ја неравенката

$$(\sqrt{2} + 1)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \leq (\sqrt{2} - 1)^{-\frac{x}{6}}.$$

Решение. Бидејќи важи $(\sqrt{2} - 1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$, неравенството го добива обликот $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \leq (\sqrt{2} + 1)^{\frac{x}{6}}$. Оттука $\frac{|x|-1}{x+1} \leq \frac{x}{6}$, т.е. $\frac{6|x|-6-x^2-x}{6(x+1)} \leq 0$.

Ако $x \geq 0$, тогаш $\frac{5x-6-x^2}{6(x+1)} \leq 0$ и решение е $x \in [0, 2] \cup [3, \infty)$.

Ако $x < 0$, тогаш $\frac{-7x-6-x^2}{6(x+1)} \leq 0$ и решение е $x \in [-6, -1] \cup (-1, 0)$.

Конечно $x \in [-6, -1) \cup (-1, 2] \cup [3, \infty)$.

2Б. Кружница со радиус r ги допира краците на аголот $\alpha = 60^\circ$, втората помала кружница ги допира краците на аголот α и првата кружница, третата кружница ги допира краците на аголот α и втората кружница и т.н. Пресметај го збирот од:

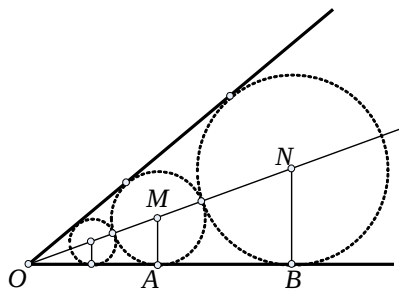
- периметрите
- плоштините на сите кругови.

Решение. Нека

$$\overline{AM} = r_1, \overline{BN} = r, \overline{OM} = a, \overline{MN} = b.$$

Од сличноста на триаголниците OBV и

$$OAM \text{ се добива } \frac{r}{r_1} = \frac{a+b}{a}.$$



Од друга страна $\sin 30^\circ = \frac{r_1}{a}$, па $a = 2r_1$. Значи

$$r = r_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right) = r_1 \left(1 + \frac{b}{2r_1}\right) = r_1 \left(1 + \frac{r+r_1}{2r_1}\right).$$

Добиваме дека $r_1 = \frac{r}{3}$. Аналогно $r_2 = \frac{r_1}{3} = \frac{r}{9}$, и т.н.

а) Збирот од периметрите е

$$2\pi(r + r_1 + r_2 + \dots) = 2\pi\left(r + \frac{r}{3} + \frac{r}{9} + \dots\right) = 2\pi r \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3\pi r$$

б) Збирот од плоштините е

$$\pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots) = \pi\left(r^2 + \frac{r^2}{3^2} + \frac{r^2}{3^4} + \dots\right) = \pi r^2 \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8} \pi r^2.$$

3. Дадени се концентричните кружници a и b со центар O и точката $P \neq O$ во внатрешноста на помалата кружница. Полуправата l со почетна точка P ги сече кружниците a и b во точки A и B , соодветно. Докажи дека должината $\overline{AB}$ е најголема ако полуправата l е нормална на правата OP .

Решение. Воведуваме правоаголен координатен систем со координатен почеток во O . Не се губи од општоста ако претпоставиме дека точката P лежи на y -оската.

Нека $d = \overline{OP}$, а r и R се радиуси на помалата и поголемата кружница, соодветно. Тогаш равенката на полуправата l е $y = kx + d$, $x \geq 0$ (не се губи од општоста ако се претпостави дека $x \geq 0$). Ако l е дел од y -оската, ќе сметаме дека $k = \infty$. Нека

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$. Тогаш важи $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ и

$y_A = kx_A + d$, $x_A \geq 0$. Од овие две равенки добиваме

$$(1+k^2)x_A^2 + 2kdx_A + d^2 - r^2 = 0.$$

Од $r > d$ следува дека $(1+k^2)r^2 - d^2 > 0$, па равенката има две реални решенија.

Но, од $r > d$ добиваме $(kd)^2 < r^2 - d^2 + (kr)^2$, т.е. $(kd)^2 < (1+k^2)r^2 - d^2$. Бидејќи $x_A \geq 0$, го земаме само решението:

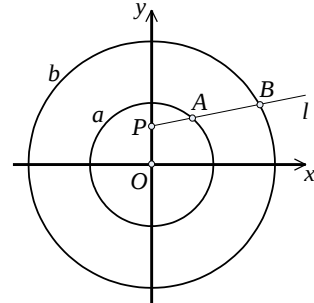
$$x_A = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)r^2 - d^2}}{1+k^2}.$$

Аналогно

$$x_B = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)R^2 - d^2}}{1+k^2}.$$

Според тоа $y_A = kx_A + d$, $y_B = kx_B + d$, па растојанието меѓу точките $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ е:

$$D(k) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}}}.$$



Последниот израз има најголема вредност ако именителот е најмал, т.е. ако $\frac{d^2}{1+k^2}$ има најголема вредност, а таа се достигнува за $k=0$. Оттука следува дека полуправата l е нормална на правата OP .

4. Правоаголник $ABCD$ е пресечен со m прави паралелни со страната AB и m прави паралелни со страната BC . Најди го бројот на добиените правоаголници.

Решение. Хоризонтални прави заедно со AB и CD има $m+2$, исто колку и вертикални прави. Секои две хоризонтални прави определуваат еден правоаголник, па бројот на така добиените правоаголници е $\binom{m+2}{2}$.

Бројот на правоаголниците определени од вертикалните прави е исто така $\binom{m+2}{2}$.

Значи вкупниот број на правоаголници е

$$\binom{m+2}{2}^2 = \frac{(m+2)^2(m+1)^2}{4}.$$

