Višedimenzionalne kugle

Josip Matejaš[1], *Zagreb*

Sažetak

Formule za površinu i volumen kugle dobro su poznate. Ovdje se pobliže upoznajemo s kuglama u četiri, pet i više dimenzija te izvodimo formule za njihov volumen.

Uvod, ili gdje je četvrta dimenzija?

Svi smo, još u osnovnoj školi, upoznali koordinatni sustav u ravnini. Dva međusobno okomita pravca (koordinatne osi) čije sjecište nazivamo ishodište i na kojima su zadane jedinične dužine. Na taj je način svaka točka ravnine jednoznačno određena s dva broja, dvije koordinate. Kažemo da je ravnina prostor s dvije dimenzije, dvodimenzionalan svijet. Na sličan način, ako promatramo samo jedan pravac, zaključujemo da je on jednodimenzionalan svijet. Svaka njegova točka jednoznačno je određena jednom koordinatom. Ako sada okomito na promatranu ravninu kroz ishodište postavimo još jedan pravac (treću koordinatnu os) dobivamo trodimenzionalni svijet u kojem svakoj točki jednoznačno pripadaju tri koordinate. Takav je svijet u kojem mi živimo i krećemo se. Ove tri osi određuju tri međusobno nezavisna smjera kretanja u prostoru: lijevo-desno, naprijed-nazad i gore-dolje. Svaki drugi smjer kretanja može se dobiti kao superpozicija (zbroj) pomaka u ta tri smjera.

Da li, osim ove tri, postoji i četvrta dimenzija? Pitanje na koje su mnogi mislioci i znanstvenici pokušavali (i pokušavaju) odgovoriti. Neki su skloni zaključku da je četvrta dimenzija vrijeme. To nije prihvatljiv odgovor jer je vrijeme kvalitativno potpuno različita veličina od preostale tri. Mi tražimo četvrtu prostornu dimenziju. To znači da se pitamo da li je moguće postaviti četvrtu koordinatnu os kroz ishodište a koja je istovremeno okomita na sve tri? Kako god to pokušali izvesti odgovor će biti negativan. Zašto? Upravo zato što se mi nalazimo u trodimenzionalnom svijetu i unutar njega pokušavamo postaviti četvrtu os što je nemoguća misija. Isto kao da pokušamo treću os postaviti u ravnini u kojoj se nalaze prve dvije. Nećemo uspjeti! Tek kad se "uzdignemo" izvan ravnine rješenje postaje jednostavno. Četvrta os mora biti postavljena izvan našeg trodimenzionalnog svijeta i to okomito na sve moguće pravce koji mu pripadaju. Upravo u toj činjenici krije se i odgovor koji se čini vrlo prihvatljiv. Problem je u nama, u našoj svijesti. Četvrta i više dimenzije postoje, kao i tri poznate, svuda oko nas samo ih naša svijest koja funkcionira trodimenzionalno ne raspoznaje. Pokušajmo s jednim jednostavnim primjerom. Ima ljudi koji ne raspoznaju neke boje (daltonisti). Iako se svakodnevno susreću s tim bojama ne prepoznaju ih jer zbog nekog urođenog poremećaja njihova svijest nema informaciju o tim bojama. Slično je s četvrtom dimenzijom. Ona

---

[1] Autor je docent na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu, bavi se numeričkom matematikom (trenutno točnošću nekih dijagonalizacijskih metoda za određivanje vlastitih i glavnih vrijednosti matrica), e-mail: jmatejas@efzg.hr

se ne nalazi duboko pod zemljom ili negdje u svemirskim prostranstvima, ona je svuda oko nas i u nama a može se spoznati jedino razvojem naše svijesti na višu razinu. Takve zapise nalazimo još kod drevnih istočnjačkih religija.

Napomenimo da se mnogi fenomeni poput nastajanja i nestajanja predmeta, teleportacije i telekineze i sl. pokušavaju objasniti pomoću četvrte dimenzije. Zamislimo na trenutak veliki ravni stol (ravninu) i na njemu različite dvodimenzionalne predmete (npr. izrezane iz komada papira). Predmeti se mogu pomicati po stolu u svim smjerovima. Međutim, ako neki predmet podignemo sa stola (recimo samo za 1 mm) on istog trena, za ostale "promatrače" s tog stola, jednostavno nestaje iz njihovog svijeta. Slično tome kad bi neko "superiorno biće" iz viših dimenzija neki predmet iz našeg svijeta samo malo pomaknulo u smjeru četvrte dimenzije on bi za nas trenutno nestao. Isto tako može se i bilo gdje trenutno pojaviti.

U matematici međutim, četvrta i više dimenzije uvode se vrlo jednostavno dodavanjem novih komponenti. Tako za bilo koji prirodni broj n možemo definirati realni n-dimenzionalni prostor,

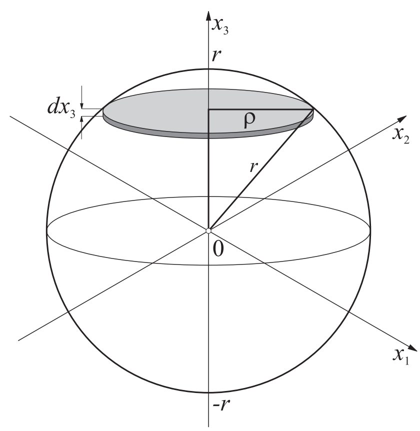
$$\mathbf{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \dots, n\right\}.$$

Geometrijski možemo predočiti prostore $\mathbf{R}$ (pravac), $\mathbf{R}^2$ (ravnina) i $\mathbf{R}^3$ (prostor) o čemu smo upravo govorili.

Kugle u n dimenzija

Znamo da u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini s koordinatnim osima x_1 i x_2 jednadžba $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, $r > 0$ definira kružnicu polumjera r sa središtem u ishodištu a nejednadžba $x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2$ krug omeđen tom kružnicom. Slično je u prostoru $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ sfera i $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2$ kugla polumjera r. Poopćenjem ovih (ne)jednakosti dobivamo definiciju (kugle) sfere u n dimenzija. Dakle, n-dimenzionalna kugla $K_n(r)$ polumjera $r > 0$ sa središtem u ishodištu je skup

$$K_n(r) = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) :\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2\right\}. \tag{1}$$



Primijetimo da je za $n = 1$ jednodimenzionalna kugla $K_1(r) = \left\{x_1 : x_1^2 \leqslant r^2\right\} = \left\{x_1 : |x_1| \leqslant r\right\}$ a to je zatvoreni interval (dužina) duljine $2r$. Napomenimo da je duljina $2r$ u stvari volumen te jednodimenzionalne kugle (dužine) jer je duljina u jednodimenzionalnom prostoru istovjetna s volumenom (o tome detaljnije u zadnjem odjeljku). Za $n = 2$ imamo krug a za $n = 3$ kuglu u uobičajenom smislu te riječi. Ako u definiciji (1) fiksiramo $x_n \in [-r, r]$ dobivamo $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant r^2-x_n^2 = \rho^2$ a što je definicija za $K_{n-1}(\rho)$. Dakle, presjek n-dimenzionalne kugle $K_n(r)$ hiperravninom okomitom na os x_n je $(n-1)$-dimenzionalna kugla $K_{n-1}(\rho)$, $\rho = \sqrt{r^2 - x_n^2}$ (vidi sliku). Ovu činjenicu iskoristit ćemo za određivanje volumena (zapremine) kugle $K_n(r)$.

Volumen kugli u n dimenzija

Za razumijevanje ovog odjeljka potrebno je elementarno poznavanje određenih integrala i osnovnih tehnika integriranja (metoda supstitucije). Površine i volumeni mogu se računati pomoću određenih integrala. Ako se neko geometrijsko tijelo ili lik proteže duž neke osi (pravca) x u granicama od a do b te ako presjek okomito na os x ima površinu $S(x)$ tada je volumen tog tijela $V = \int_a^b S(x)dx$. Na primjer volumen kugle s naše slike je $V = \int_{-r}^r \rho^2\pi dx_3$, $\rho^2 = r^2 - x_3^2$. Slično tome, a u skladu s razmatranjem na kraju prethodnog odjeljka, kugla $K_n(r)$ definirana relacijom (1) ima volumen

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\rho(x_n))\, dx_n = \int_{-r}^{r} V_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x_n^2}\right) dx_n, \quad V_1(r) = 2r. \tag{2}$$

Dakle, V_2 računamo pomoću V_1, V_3 pomoću V_2 itd. Kako $V_1(r)$ znamo, formulom (2) možemo odrediti volumen bilo koje n-dimenzionalne kugle $K_n(r)$.

Uvedemo li u integral (2) supstituciju $x_n = r\sin\varphi$ tada se granice integracije mijenjaju, $x_n = \pm r \Rightarrow \varphi = \pm\pi/2$. Pri tome je $dx_n = r\cos\varphi\, d\varphi$ i $\sqrt{r^2 - x_n^2} = r\cos\varphi$. Sada formula (2) poprima oblik

$$V_n(r) = r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_{n-1}(r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \quad V_1(r) = 2r. \tag{3}$$

Volumen $V_n(r)$ sada možemo odrediti bilo formulom (2) ili (3) ovisno koja nam je za pojedini n prikladnija. U nastavku ćemo izvesti formule za volumene kugli $K_n(r)$ u prvih sedam dimenzija. U izvodu nam trebaju sljedeća dva pomoćna rezultata. Prvo, primjenom adicionih formula i formula za dvostruke kutove dobije se:

$$\begin{aligned}
\cos^2\varphi &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\\
\cos^4\varphi &= \frac{1}{8}(3 + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\\
\cos^6\varphi &= \frac{1}{32}(10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi).
\end{aligned} \tag{4}$$

Drugo, za svaki $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...$ vrijedi:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2k\varphi)\, d\varphi = \left.\frac{\sin(2k\varphi)}{2k}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2k}\left[\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right] = 0. \tag{5}$$

Volumen kugle u dvije dimenzije (krug)

Koristeći relaciju (3) imamo

$$\begin{aligned} V_2(r) &= r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1(r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r\cos\varphi\cdot\cos\varphi\, d\varphi = 2r^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi \\ &= 2r^2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = r^2\left.\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = r^2\pi. \end{aligned}$$

Za drugi član u gornjem integralu mogli smo iskoristiti i formulu (5).

Volumen kugle u tri dimenzije

Koristeći relaciju (2) imamo

$$\begin{aligned} V_3(r) &= \int\limits_{-r}^{r} V_2\left(\sqrt{r^2 - x_3^2}\right) dx_3 = \int\limits_{-r}^{r}(r^2 - x_3^2)\,\pi\, dx_3 = \pi\left.\left(r^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3}\right)\right|_{-r}^{r} \\ &= \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}r^3\pi. \end{aligned}$$

Volumen kugle u četiri dimenzije

Koristeći relacije (3) i (4) imamo

$$\begin{aligned} V_4(r) &= r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_3(r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}r^3\cos^3\varphi\cdot\pi\cdot\cos\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{4}{3}r^4\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}r^4\pi\cdot\frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Uvažimo li relaciju (5) dobivamo

$$V_4(r) = \frac{4}{3}r^4\pi \cdot \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\,d\varphi = \frac{1}{6}r^4\pi \cdot 3\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}r^4\pi\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}r^4\pi^2,$$

Volumen kugle u pet dimenzija

Koristeći relaciju (2) imamo

$$\begin{aligned}
V_5(r) &= \int\limits_{-r}^{r} V_4\left(\sqrt{r^2 - x_5^2}\right) dx_5 = \int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{2}\left(r^2 - x_5^2\right)^2 \pi^2\,dx_5 = \frac{\pi^2}{2}\int\limits_{-r}^{r}\left(r^4 - 2r^2x_5^2 + x_5^4\right) dx_5 \\
&= \frac{\pi^2}{2}\left(r^4x_5 - \frac{2}{3}r^2x_5^3 + \frac{x_5^5}{5}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{\pi^2}{2}\left[\left(r^5 - \frac{2}{3}r^5 + \frac{r^5}{5}\right) - \left(-r^5 + \frac{2}{3}r^5 - \frac{r^5}{5}\right)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{16}{15}r^5 = \frac{8}{15}r^5\pi^2.
\end{aligned}$$

Volumen kugle u šest dimenzija

Koristeći relacije (3) i (4) imamo

$$\begin{aligned}
V_6(r) &= r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} V_5(r\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = r\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{15}r^5\cos^5\varphi\cdot\pi^2\cdot\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8}{15}r^6\pi^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{8}{15}r^6\pi^2\cdot\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi\right) d\varphi.
\end{aligned}$$

Uvažimo li relaciju (5) dobivamo

$$V_6(r) = \frac{8}{15}r^6\pi^2\cdot\frac{1}{32}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 10\,d\varphi = \frac{1}{60}r^6\pi^2\cdot 10\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{6}r^6\pi^2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{6}r^6\pi^3.$$

Volumen kugle u sedam dimenzija

Koristeći relaciju (2) imamo

$$V_7(r) = \int\limits_{-r}^{r} V_6\left(\sqrt{r^2 - x_7^2}\right) dx_7 = \int\limits_{-r}^{r}\frac{1}{6}\left(r^2 - x_7^2\right)^3\pi^3\,dx_7$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \int_{-r}^{r} \left(r^6 - 3r^4x_7^2 + 3r^2x_7^4 - x_7^6\right) dx_7 = \frac{\pi^3}{6} \left(r^6x_7 - r^4x_7^3 + \frac{3}{5}r^2x_7^5 - \frac{x_7^7}{7}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= \frac{\pi^3}{6} \cdot 2\left(r^7 - r^7 + \frac{3}{5}r^7 - \frac{1}{7}r^7\right) = \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{16}{35}r^7 = \frac{16}{105}r^7\pi^3.$$

I tako dalje ... ! Čitatelji mogu nastaviti sami. Za kontrolu navodimo još nekoliko slučajeva:

$$V_8(r) = \frac{1}{24}r^8\pi^4, \qquad V_9(r) = \frac{32}{945}r^9\pi^4, \qquad V_{10}(r) = \frac{1}{120}r^{10}\pi^5, \quad \dots$$

Vidimo da je za neparni n prikladnija formula (2), a za parni (3). Isto tako zgodno je primijetiti da se potencija od π povećava za 1 za svaki sljedeći parni n. Može se pokazati da vrijede sljedeće općenite formule posebno za parni i neparni n. Za svaki $k = 1, 2, 3, \dots$ je

$$V_{2k}(r) = \frac{1}{k!}r^{2k}\pi^k, \qquad V_{2k+1}(r) = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}r^{2k+1}\pi^k.$$

Mjerenje volumena u n dimenzija

Znamo da se volumen u našem trodimenzionalnom svijetu mjeri kubičnim jedinicana, npr. m^3, dm^3, cm^3, ... Svaka ta jedinica je kocka (nazovimo je 3-kocka) brida 1 m, 1 dm, 1 cm, ... Slično se površina (volumen u dvije dimenzije) mjeri kvadratnim jedinicama a jedinica je kvadrat (kocka u dvije dimenzije, 2-kocka). U jednodimenzionalnom svijetu volumen je ustvari, s našeg stajališta, duljina pa se mjeri dužnim jedinicama m, dm, cm, ... a jedinica je jedinična dužina (kocka u jednoj dimenziji, 1-kocka). Kako se volumen mjeri u četiri dimenzije? Jedinica za mjerenje je četverodimenzionalna kocka (nazovimo je 4-kocka) jediničnog brida, pa imamo m^4, dm^4, cm^4, ... Kako izgleda 4-kocka? Znamo da je "obična" 3-kocka omeđena sa 6 kvadrata (2-kocke), ima 12 bridova (1-kocke) i 8 vrhova (točke ili 0-kocke). 4-kocka je, međutim, omeđena s osam 3-kocki (po svakoj od 4 koordinatne osi dvije 3-kocke na suprotnim stranama). Dvije susjedne 3-kocke imaju po jednu stranu (2-kocku) zajedničku, tako da 4-kocka ima 24 dvodimenzionalna ruba (to su 2-kocke tj. kvadrati). Svaka tri susjedna kvadrata imaju po jednu zajedničku stranicu (dužinu, 1-kocku) pa tako 4-kocka ima 32 jednodimenzionalna brida (dužine). Na kraju 4-kocka ima 16 vrhova a u svakom se spajaju 4 brida. Možete li zamisliti tu "monstruoznu" četverodimenzionalnu kocku omeđenu s 8 trodimenzionalnih kocki a kojoj su rubovi 24 kvadrata, 32 dužine su bridovi i ima 16 vrhova? Previše zahtjevno u svakom pogledu! A da ne govorimo o kockama u pet ili više dimenzija.