Ристо Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

За два и повеќе позитивни реални броеви во математиката се дефинираат повеќе видови средини, кои претставуваат специфични големини дефинирани меѓу објекти кои можеме да ги споредуваме со мерење. За позитивни реални броеви најпознати се аритметичката, геометриската, хармониската и квадратната средина, кои се сметаа за класични средини и се определени како што следува.

Нека $a,b>0$. Броевите

$$A=A(a,b)=\frac{a+b}{2},\ G=G(a,b)=\sqrt{ab},$$

$$H=H(a,b)=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b} \text{ и } K=K(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска* и *квадратна средина*, соодветно. Ќе докажеме дека за средините се точни неравенствата $H\le G\le A\le K$, т.е. неравенствата

$$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (1)$$

при што знаци за равенство важат ако и само ако $a=b$.

Навистина, од очигледното неравенство $(a-b)^2\ge 0$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$a^2-2ab+b^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab},$$

т.е. точно е средното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Аналогно, од неравенството $(a-b)^2\ge 0$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$(a+b)^2\ge 4ab \Leftrightarrow ab(a+b)^2\ge 4a^2b^2 \Leftrightarrow ab\ge(\frac{2ab}{a+b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b},$$

т.е. точно е левото неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Конечно, од очигледното неравенство $0\le(a-b)^2$ последователно добиваме

$$2ab\le a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow (\frac{a+b}{2})^2\le\frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

т.е. точно е десното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

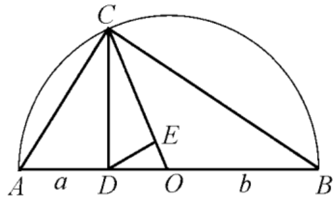
Во претходните разгледувања за неравенствата (1) дадовме алгебарски докази. Во следните разгледувања ќе покажеме како истите неравенства може да се докажат со помош на некои елементарни геометриски знаења. За таа цел ќе разгледаме два примера.

Пример 1. Во правоаголен триаголник ABC нека CD е висината над хипотенузата, точката O е центар на опишаната кружница околу триаголникот, $\overline{AD}=a$, $\overline{DB}=b$ и $DE\perp CO$, цртеж 1. Тогаш од својствата на триаголникот ABC следува

$$\overline{OC}=\overline{OA}=\tfrac{\overline{AB}}{2}=\tfrac{a+b}{2}=A(a,b)\,. \qquad (2)$$

Понатаму, $\sphericalangle CAD=\sphericalangle BCD$, како агли со нормални краци, па затоа правоаголните триаголници ADC и CDB се слични. Но, тоа значи дека $\overline{CD}:a=b:\overline{CD}$, па затоа

$$\overline{CD}=\sqrt{ab}=G(a,b)\,. \qquad (3)$$



Цртеж 1

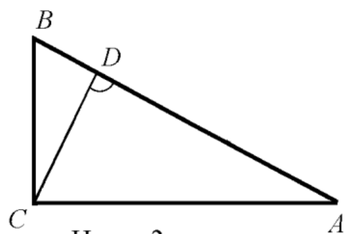
Правоаголните триаголници OCD и DCE имаат заеднички агол при темето C, што значи дека тие се слични, па затоа $\overline{CD}:\overline{CO}=\overline{CE}:\overline{CD}$, т.е. $\overline{CE}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CO}}$ и ако во последното равенство замениме од (2) и (3) добиваме

$$\overline{CE}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CO}}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}=H(a,b)\,. \qquad (4)$$

Од правоаголниот триаголник COD добиваме $\overline{CD}\le\overline{CO}$, при што знак за равенство се достигнува ако и само точките D и O се совпаѓаат, т.е. ако и само ако $a=b$. Слично, од правоаголниот триаголник CDE добиваме $\overline{CE}\le\overline{CD}$, при што знак за равенство се достигнува ако и само ако точките D и E се совпаѓаат, т.е. ако и само ако точките D и O се совпаѓаат, што значи ако и само ако $a=b$. Конечно, $\overline{CE}\le\overline{CD}\le\overline{CO}$, па од (2), (3) и (4) следува $H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)$, што значи дека за позитивните броевите a и b точни се првите две неравенства во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Пример 2. Нека $a\ge b>0$ и да конструираме правоаголен триаголник ABC, цртеж 2, таков што $\overline{AB}=\frac{a+b}{2}=A(a,b)$ и $\overline{BC}=\frac{a-b}{2}$, при што случајот $a=b$ е граничен и притоа триаголникот дегенерира во отсечка. Тогаш од Питагоровата теорема следува дека должината на другата катета е:

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(\tfrac{a+b}{2})^2-(\tfrac{a-b}{2})^2}\\&=\sqrt{ab}=G(a,b),\end{aligned} \qquad (5)$$



Цртеж 2

а должината на нејзината проекција на нејзината проекција врз хипотенузата е

$$\overline{AD}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}=H(a,b)\,. \qquad (6)$$

Понатаму, од правоаголниот триаголник ADC имаме $\overline{AD} \le \overline{AC}$, а од правоаголниот триаголник ABC имаме $\overline{AC} \le \overline{AB}$, што значи $\overline{AD} \le \overline{AC} \le \overline{AB}$. Сега, ако во последната низа неравенства замениме од (5), (6) и $\overline{AB} = \frac{a+b}{2}$ добиваме $H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b)$, што значи дека за позитивните броевите a и b точни се првите две неравенства во (1).

Сега, нека за триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \frac{a+b}{2} = A(a,b)$ и $\overline{BC} = \frac{a-b}{2}$. Тогаш, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(\tfrac{a+b}{2})^2 + (\tfrac{a-b}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}} = K(a,b),$$

и како $\overline{AC} \le \overline{AB}$ добиваме $A(a,b) \le K(a,b)$, т.е. точно е и последното неравенство во (1).

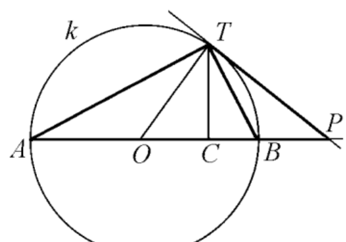
Јасно, и во двата случаја знаци за равенство важат ако и само ако $a = b$, при што едната катета на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на нула, другата катета се совпаѓа со хипотенузата, која во првиот случај се совпаѓа со нормалната проекција на катетата врз хипотенузата. ■

Во претходните примери, користејќи елементарни знаења од геометрија ја докажавме низата неравенства (1). Меѓутоа, оваа низа неравенства може да се докаже и со помош на следниве две задачи, кои ги оставаме на читателот за вежба.

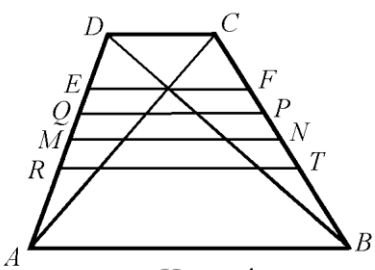
Задача 1. Даден е правоаголен триаголник ABT и около него е опишана кружница $k(O,\overline{OT})$, цртеж 3. Нека PT е тангентата на кружницата k повлечена во точката T и нека $TC \perp AB$. Ако $\overline{AP} = a$ и $\overline{BP} = b$, докажете дека

$$\overline{OP} = A(a,b),\ \overline{TP} = G(a,b) \text{ и } \overline{CP} = H(a,b),$$

а потоа користејќи го очигледното неравенство $\overline{CP} \le \overline{TP} \le \overline{OP}$ докажете ги првите две неравенства во (1). ■



Цртеж 3

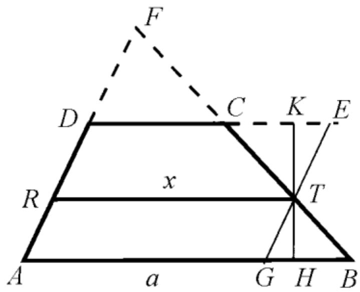


Цртеж 4

Задача 2. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$, $a > b$. Докажи ги следниве тврдења.

1) Ако отсечката EF е паралелна со основите на трапезот $ABCD$ и минува низ пресекот на неговите дијагонали, тогаш $\overline{EF} = H(a,b)$.

2) Ако отсечката PQ е паралелна со основите на трапезот и го дели трапезот $ABCD$ на два слични трапези, тогаш $\overline{PQ} = G(a,b)$.
3) Ако отсечката RT е паралелна со основите на трапезот и го дели трапезот $ABCD$ на два трапези $ABTR$ и $RTCD$ со еднакви плоштини, тогаш $\overline{RT} = K(a,b)$.
4) Ако MN е средна линија на трапезот, тогаш $\overline{MN} = A(a,b)$.
5) За отсечките EF, PQ, MN и RT важи, $\overline{EF} \le \overline{PQ} \le \overline{MN} \le \overline{RT}$.



Цртеж 5

Упатство. За да го докажете тврдењето 3) искористете го цртежот 5.

На крајот од оваа статија ќе се осврнеме на некои елементарни примени на неравенствата меѓу средините на два позитивни броја a и b.

Пример 3. Нека $a>0$. Ако $x+y=a$, тогаш производот xy прима најголема вредност за $x=y=\frac{a}{2}$. Докажи!

Решение. Јасно, најголемата вредност за производот xy се постигнува кога $x>0, y>0$, бидејќи од неравенството $x+y=a>0$ следува дека не може истовремено $x<0$ и $y<0$. Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина за броевите x и y следува неравенството $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$, и од условот $x+y=a$ добиваме дека $xy \le \frac{a^2}{4}$. Според тоа најголемата вредност на производот е $\frac{a^2}{4}$ и таа се достигнува кога $x=y$. Но, $x+y=a$, па затоа $x=y=\frac{a}{2}$. ■

Пример 4. Нека $a>0$. Ако $xy=a, x>0, y>0$ тогаш збирот $x+y$ прима најмала вредност за $x=y=\sqrt{a}$. Докажи!

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрискста средина за броевите x и y следува неравенството $2\sqrt{xy} \le x+y$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$. Но, $xy=a$, па затоа $2\sqrt{a} \le x+y$. Значи, збирот $x+y$ е поголем или еднаков од $2\sqrt{a}$, па неговата најмала вредност ќе биде $2\sqrt{a}$ и ќе се достигне кога $2\sqrt{a}=x+y$. Но, во неравенството $2\sqrt{xy} \le x+y$ равенство се достигнува кога $x=y$, па од $2\sqrt{a}=x+y$ добиваме $x=y=\sqrt{a}$. ■

На крајот од оваа статија на читателот му предлагаме самостојно да ги реши следниве задачи:

Задача 3. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, каде a и b се позитивни броеви такви што $a+b=4$.

Упатство. Забележете дека во случај кога броителот на позитивна дропка е константен, тогаш таа прима најмала вредност кога именителот прима најголема вредност, а потоа искористете го резултатот од пример 3.

Задача 4. Одреди ја најголемата вредност на изразот

а) $\dfrac{x}{9x^2+4}$ б) $\dfrac{x}{2x^2-3x+8}$.

Упатство. а) Забележи дека најголемата вредност се прима за $x>0$. Потоа броителот и именителот подели ги со x и забележи дека дропката има најголема вредност кога именителот прима најмала вредност, па искористи го пример 4.

Задача 5. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $a+b+c=4$ и $a^2+b^2+c^2=8$. Најди ја најголемата вредност за c.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ