JMMO 2015

1. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$x^2+y^4+1=6^z.$$

Решение. Очигледно е дека $z\geq 0$. Ако $z\geq 2$, тогаш

$$x^2+y^4+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

односно

$$x^2+y^4\equiv 3(\mathrm{mod}\,4).$$

Тоа не е можно бидејќи остатоци на квадрати на цели броеви при делење со 4 се 0 или 1. Според тоа $0\leq z<2$.

Ако $z=0$, тогаш $x=y=0$.

Ако $z=1$, тогаш $x^2+y^4=5$, односно

$$(x,y)=\{(2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1)\}.$$

Значи,

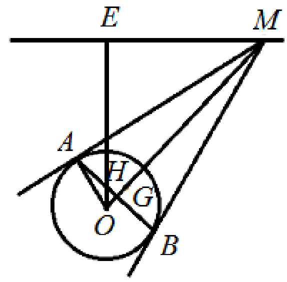
$$(x,y,z)=\{(0,0,0),(2,1,1),(-2,1,1),(2,-1,1),(-2,-1,1)\}$$

се решенијата на дадената равенка.

2. Дадена е кружница k со центар O и радиус r и права p која нема заеднички точки со k. Нека E е подножјето на нормалата спуштена од O кон p. На p е избрана произволна точка M различна од E и од неа се повлечени двете тангенти кон k кои ја допираат оваа кружница во A и B. Ако H е пресекот на AB и OE, докажи дека $\overline{OH}=\frac{r^2}{\overline{OE}}$.

Решение. Нека G е пресекот на OM и AB. Бидејќи $\triangle OGH\sim\triangle OEM$ добиваме $\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OM}}$ од каде следува

$$\overline{OE}\cdot\overline{OH}=\overline{OM}\cdot\overline{OG}. \qquad (1)$$



Од друга страна, бидејќи $\triangle AOG\sim\triangle MOA$, имаме $\frac{\overline{OA}}{\overline{OG}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$. Значи,

$$\overline{OM}\cdot\overline{OG}=\overline{OA}^2. \qquad (2)$$

Конечно, од равенствата (1) и (2) следува

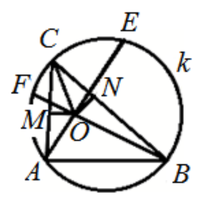
$$\overline{OH}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OE}}=\frac{r^2}{\overline{OE}}.$$

3. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c е точно неравенството
$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17)\geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1).$$
Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако двапати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме
$$\begin{aligned}16a^2+8b+17&=(16a^2+1)+8b+16\\&\geq 8a+8b+16\\&=8(a+b+2)\\&=8(a+1+b+1)\\&\geq 8\cdot 2\sqrt{(a+1)(b+1)}\\&=2^4\sqrt{(a+1)(b+1)}.\end{aligned}\qquad(1)$$
На потполно ист начин добиваме
$$16b^2+8c+17\geq 2^4\sqrt{(b+1)(c+1)}\qquad(2)$$
$$16c^2+8a+17\geq 2^4\sqrt{(c+1)(a+1)}\,.\qquad(3)$$
Ако ги помножиме неравенства (1), (2) и (3) добиваме
$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17)\geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1)\,.$$
Во (1) знак за равенство важи кога $16a^2=1$ и $a=b$. Односно $a=b=\frac{1}{4}$.
Со аналогни размислувања од (2) и (3) следува дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{4}$.

4. Нека ABC е остроаголен триаголник и k е кружницата опишана околу него. Точката O во внатрешноста на триаголникот е таква што $\overline{CE}=\overline{CF}$, каде E и F се точки од k и E лежи на AO, а F лежи на BO. Докажи дека O лежи на симетралата на аголот во темето C ако и само ако триаголникот е рамнокрак со основа $\overline{AB}$.

Решение. Од $\overline{CE}=\overline{CF}$ следува дека
$$\measuredangle CAE=\measuredangle CBF\,,\qquad(1)$$
како агли над еднакви тетиви.



Да претпоставиме прво дека триаголникот е рамнокрак. Тогаш, од тоа што O е внатрешна точка за ABC и (1), следува дека
$$\measuredangle BAO=\measuredangle BAC-\measuredangle CAO=\measuredangle ABC-\measuredangle CBO=\measuredangle ABO\,,$$

што значи дека триаголникот ABO е рамнокрак со основа $\overline{AB}$, т.е.

$$\overline{AO} = \overline{BO} \ . \qquad (2)$$

Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, следува дека

$$\overline{AC} = \overline{BC} \ . \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $\triangle AOC \cong \triangle BOC$, од каде $\measuredangle ACO = \measuredangle BCO$, т.е. O лежи на симетралата на аголот кај темето C.

Нека сега точката O лежи на симетралата на аголот кај темето C и нека M и N се подножните точки на нормалите повлечени од точката O кон страните AC и BC, соодветно. Правоаголните триаголници CON и COM се складни, бидејќи $\measuredangle ACO = \measuredangle BCO$ и CO е заедничка страна, па

$$\overline{CN} = \overline{CM} \qquad (4)$$

и

$$\overline{ON} = \overline{OM} \ . \qquad (5)$$

Од (1) и (5) следува дека правоаголните триаголници BON и AOM се складни, па затоа

$$\overline{BN} = \overline{AM} \ . \qquad (6)$$

Со собирање на (4) и (6) добиваме дека $\overline{AC} = \overline{BC}$ (точките M и N се во внатрешноста на страните, бидејќи триаголникот е остроаголен).

5. Нека A и B се два идентични конвексни многуаголници, со плоштина 2015. Многуаголникот A е разделен на многуаголници со плоштини $A_1, A_2, ..., A_{2015}$, а многуаголникот B на многуаголници со плоштина $B_1, B_2, ..., B_{2015}$. Со 2015 бои се обоени $A_1, A_2, ..., A_{2015}$, $B_1, B_2, ..., B_{2015}$ така што A_i е различно обоен од A_j и B_i е различно обоен од B_j, за $i \neq j$. По поклопувањето на многуаголниците A и B, пресметан е збирот на плоштините на деловите кои што имаат иста боја.

   Докажи дека постои боење на многуаголниците за кое овој збир е најмалку 1.

   Решение. По поклопувањето на дадените многуаголници ги добиваме многуаголниците

$$C_{ij} = A_i \cap B_j, \ i, j \in \{1, 2, ..., 2015\}.$$

Многуаголниците $B_1, B_2, ..., B_{2015}$ може да се обојат на $2015!$ начини. Нека е дадено едно боење на $A_1, A_2, ..., A_{2015}$. За произволно боење на

$B_1, B_2, ..., B_{2015}$ кое го означуваме со n, нека O_n го означува збирот на плоштината на деловите обоени со иста боја од двата многуаголници. Тогаш

$$O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} c_{ij} P(C_{ij}) \ ,$$

каде што $c_{ij} = 1$ ако A_i и B_j се обоени со иста боја и $c_{ij} = 0$ во останатите случаи. Добиваме дека

$$\sum_{n=1}^{2015!} O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} d_{ij} P(C_{ij}) \,,$$

каде што d_{ij} е бројот на боења на $B_1, B_2, ..., B_{2015}$ во кои A_i и B_j имаат иста боја. Очигледно е дека $d_{ij} = 2014!$. Според тоа,

$$\sum_{n=1}^{2015!} O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} d_{ij} P(C_{ij}) = 2014! \cdot 2015 = 2015!.$$

Конечно, од

$$O_1 + O_2 + ... + O_{2015!} = 2015!$$

следува дека постои $k \in \{1, 2, ..., 2015!\}$ за кое што $O_k \geq 1$, што и требаше да се докаже.