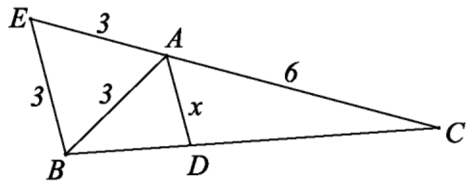
Ристо Малчески
Скопје, Македонија

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ – ГЕОМЕТРИЈА

Една од дисциплините која е застапена на секоја математичка олимпијада, како за учениците од основното образование, така и за учениците од средното образование е Геометријата. На многу олимпијади кои се одржуваат во два натпреварувачки дена, како што е Меѓународната математичка олимпијада, се задаваат по две геометриски задачи, во секој натпреварувачки ден по една. Во продолжение ќе дадеме повеќе геометриски задачи, наменети за подготовка за математичките олимпијади за учениците до 15,5 години. Меѓутоа, да забележиме дека некои од разгледани задачи може да се дел од олимпијадите и за учениците од средното образование.

1. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle A = 120^\circ$, $\overline{AB} = 3$ и $\overline{AC} = 6$. Симетралата на $\measuredangle A$ ја сече страната BC во точката D. Определи ја должината на отсечката AD.

   Решение. Нека $\overline{AD} = x$ и нека E е точка на продолжинието на отсечката AC преку точката A таква што $\overline{AE} = 3$. Триаголникот ABE е рамностран, па затоа $\overline{BE} = 3$. Бидејќи $\measuredangle DAB = \measuredangle ABE = 60^\circ$, заклучуваме дека $BE \parallel DA$, па затоа триаголниците ADC и EBC се слични. Според тоа, $\frac{x}{3} = \frac{6}{9}$, од каде следува $x = 2$.

2. Впишаната кружница во правоаголен триаголник ABC ја допира хипотенузата AB во точката D. Докажи дека плоштината на правоаголникот со страни со должини $\overline{AD}$ и $\overline{DB}$ е еднаква на плоштината на триаголникот ABC.

   Решение. Да означиме $a = \overline{BC}$ и $b = \overline{AC}$ (види цртеж долу десно). Од $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$ следува

$$x^2+2xy+y^2=a^2+b^2, \qquad (1)$$

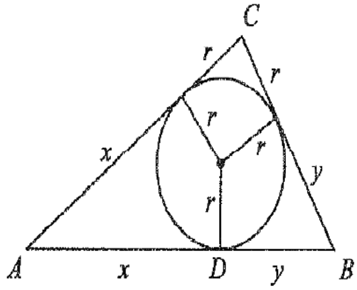
а од $r=b-x=a-y$ следува

$$y-x=a-b$$

и затоа

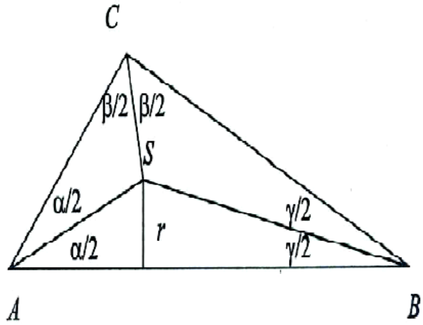
$$x^2-2xy+y^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (2)$$

Ако од (2) ја одземеме (1) добиваме $4xy=2ab$, па затоа $xy=\frac{1}{2}ab$, што и требаше да се докаже.



3. Триаголник е поделен на три помали триаголници со отсечки кои го поврзуваат центарот на вписаната кружница со темињата на триаголникот. Ако еден од добиените триаголници е сличен со почетниот триаголник, определи ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник, S е центарот на вписаната кружница и α,β,γ се соодветните агли (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека триаголникот BCS е сличен на почетниот триаголник ABC. Тогаш $\frac{\beta}{2}=\alpha$ и $\frac{\gamma}{2}=\beta$, т.е. $\beta=2\alpha$ и $\gamma=2\beta=4\alpha$.



Заменуваме во $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ и добиваме $7\alpha=180^\circ$, т.е. $\alpha=\frac{180^\circ}{7}$, $\beta=\frac{360^\circ}{7}$ и $\gamma=\frac{720^\circ}{7}$.

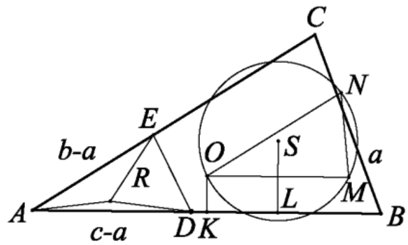
4. Во триаголникот ABC страната BC е најмала. На страните AB и AC дадени се редоследно точки D и E такви што $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{BC}$. Докажи дека радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ADE е еднаков на растојанието меѓу центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. Нека K и L се подножјата на нормалите повлечени на страната AB соодветно од центарот на опишаната кружница O и центарот на впишаната кружница S во триаголникот ABC, (цртеж десно). Нека $OM \parallel AB$ и $ON \parallel AC$ се тетиви на кружницата $k(S, \overline{SO})$. Тогаш $\overline{OM} = 2\overline{KL}$. Бидејќи $\overline{KL} = \overline{KB} - \overline{BL}$, добиваме

$$\overline{KL} = \frac{c}{2} - (\frac{a+b+c}{2} - b) = \frac{b-a}{2},$$

па е $\overline{OM} = b - a$.

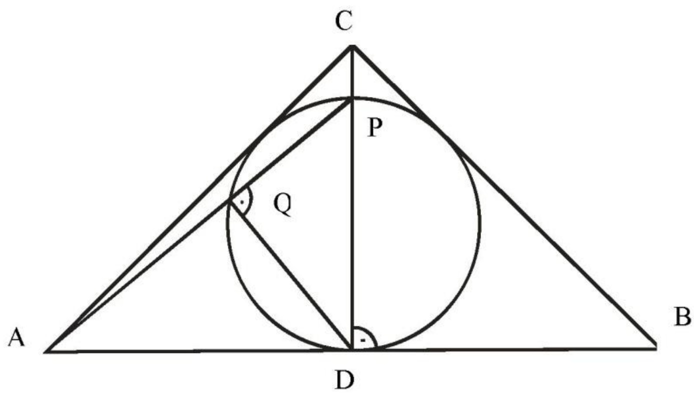
Аналогно се докажува: $\overline{ON} = c - a$.



Бидејќи $\overline{AD} = c - a$ и $\overline{AE} = b - a$ и бидејќи $\measuredangle BAC = \measuredangle MON$ (агли со паралелни краци), заклучуваме дека $\triangle ADE \cong \triangle OMN$, според признакот САС. Од складноста на триаголниците ADE и OMN следува дека се еднакви радиусите на кружниците кои се опишани околу нив, односно дека $\overline{OS} = R$.

5. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC е впишана кружница. Нека CD е висината над хипотенузата ($D \in AB$), и нека P е втората пресечна точка на висината CD и впишаната кружница. Во кој однос кружницата ја дели отсечката AP?

Решение. Нека втората пресечна точка на AP и кружницата е Q (види цртеж). Треба да се определи $\overline{PQ} : \overline{QA}$. Од $\measuredangle QPD = \measuredangle DPA$ следува дека правоаголните триаголници QPD и DPA се слични, па затоа важи $\overline{PQ} : \overline{QD} = \overline{PD} : \overline{AD}$. Аналогно,од сличноста на триаголниците QDA и DPA следува $\overline{DQ} : \overline{QA} = \overline{PD} : \overline{AD}$. Последните две равенства ги множме и добиваме



$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QA}}=(\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}})^2.$$

Нека должината на катетата на рамнокракиот правоаголен триаголник е a. Тогаш $\overline{AD}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{PD}=2r$, каде r е радиусот на впишаната кружница. Сега, од $2P_{ABC}=r(a+b+c)$ и $2P_{ABC}=a^2$ следува

$$r=\frac{a^2}{a+a+a\sqrt{2}}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}.$$

Конечно,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QA}}=(\frac{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}})^2=(\frac{2}{\sqrt{2}+1})^2=4(\sqrt{2}-1)^2=4(3-\sqrt{2}).$$

6. Нека a и b се должини на две страни на триаголник. Како да се избере третата страна така што нејзините допирни точки со впишаната и над неа припишаната кружница ја делат на три еднакви дела? За кои a и b таква страна c постои?

Решение. Со P,Q,R да ги означиме допирните точки на впишаната кружница, а со P',Q',R' допирните точки на припишаната кружница со страните a,b,c, соодветно.

Од еднаквоста на соодветните тангентни отсечки следува

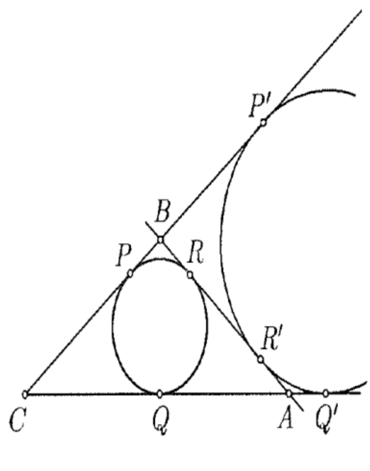
$$\overline{BR}=\overline{BP}=\overline{AR'}=\overline{AQ'}=\frac{c}{3} \text{ и}$$

$$\overline{BR'}=\overline{BP'}=\overline{AR}=\overline{AQ}=\frac{2c}{3}.$$

Бидејќи $\overline{CP'}=\overline{CQ'}$ следува

$$a+\frac{2c}{3}=b+\frac{c}{3}, \text{ т.е. } c=3(b-a).$$

Ваков c постои за $b>a$, а од неравенството на триаголник добиваме $a>\frac{b}{2}$, па бараната страна c постои за $\frac{b}{2}<a<b$.



7. Точките K и M редоследно припаѓаат на страните BC и CD на квадратот $ABCD$, при што AM е симетрала на $\measuredangle KAD$. Докажи дека $\overline{AK}=\overline{DM}+\overline{BK}$.

Решение. Со ротација околу точката A за агол $\frac{\pi}{2}$ триаголникот AMD се пресликува во триаголникот AM_1B. Да означиме $\measuredangle DAM = \alpha$. Тогаш $\measuredangle KAM_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Но,

$$\measuredangle AM_1K = \measuredangle AMD = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

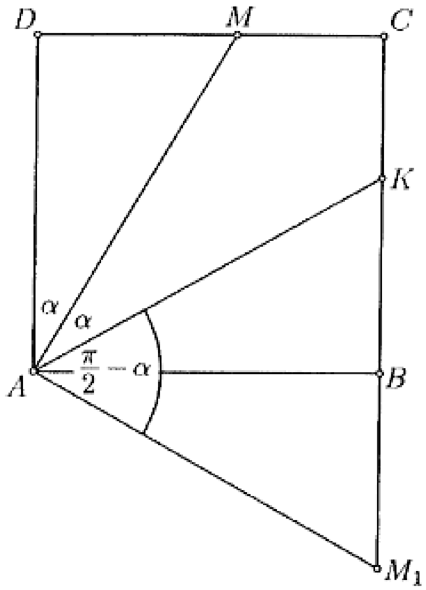
па затоа триаголникот KAM_1 е рамнокрак, што значи $\overline{KA} = \overline{KM_1}$. Понатаму,

$$\overline{KM_1} = \overline{KB} + \overline{BM_1} = \overline{KB} + \overline{DM},$$

па затоа

$$\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK},$$

што и требаше да се докаже.



8. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Нивната заедничка тангента ја допира k_1 во точката C, а k_2 во точката D. Нека B е поблиската точка до правата CD, од точката A. Ако правата CB по втор пат ја сече кружницата k_2 во точката E, докажи дека AD е симетрала на $\measuredangle CAE$.

Решение. Да забележиме дека

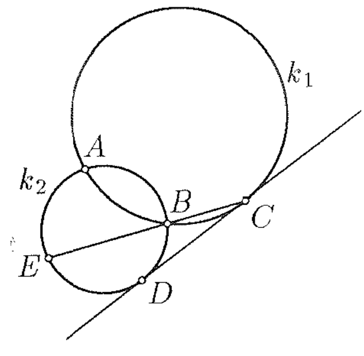
$$\measuredangle EAD = \measuredangle EBD$$

како периферни агли над ист лак (цртеж десно). Понатаму, од теоремата за аголот меѓу тетива и тангента следува

$$\measuredangle CAB = \measuredangle DCB \text{ и } \measuredangle DAB = \measuredangle CDB.$$

Оттука добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD &= \measuredangle CAB + \measuredangle DAB \\ &= \measuredangle DCB + \measuredangle CDB \\ &= \measuredangle EBD,\end{aligned}$$



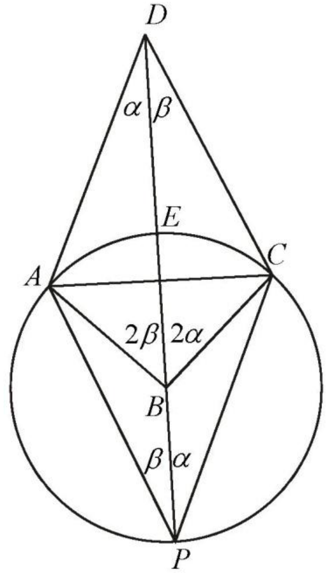
што значи дека $\measuredangle CAD = \measuredangle EAD$, односно AD е симетрала на $\measuredangle CAE$.

9. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, таков што

$$\measuredangle CBD = 2\measuredangle ADB,\ \measuredangle ABD = 2\measuredangle CDB \text{ и } \overline{AB} = \overline{CB}.$$

Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е делтоид.

Решение. Нека $\measuredangle ADB = \alpha$ и $\measuredangle CBD = \beta$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle CBD = 2\alpha$ и $\measuredangle ABD = 2\beta$. Кружницата $k(B, \overline{BA})$ ги содржи темињата A и C. Нека правата BD ја сече кружницата k во точките E и P (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle APE$ е периферски агол на тетивата AE добиваме $\measuredangle APE = \beta$. Аналогно се добива $\measuredangle CPE = \alpha$. Според тоа, четириагоникот $APCD$ е паралелограм. Кај паралелограмот дијагоналите се половат, па затоа BD ја полови дијагоналата AC. Според тоа, триаголникот ABC е рамнокрак и дијагоналата BD ја полови страната AC, што значи дека BD е симетрала на $\measuredangle ABC$. Затоа $2\alpha = 2\beta$, односно $\alpha = \beta$, од каде следува $AC \perp BD$. Значи, во четириаголникот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{CB}$, едната дијагонала ја полови другата и дијагоналите се заемно нормални, па затоа тој е делтоид.



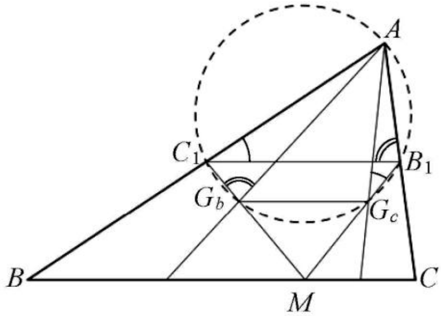
10. Нека точките E и F се подножјата на висините повлечени од темињата B и C на триаголникот ABC. Точката M е подножјето на нормалата повлечена од точката F на страната BC, а точката N е подножјето на нормалата повлечена од точката B на правата EF. Докажи дека правите AC и MN се паралелни.

Решение. Четириаголникот $BFEC$ е тетивен бидејќи $\measuredangle BEC = \measuredangle BFC = 90^\circ$, па затоа $\measuredangle AFE = \measuredangle ACB = \gamma$ (надворешниот агол на тетивниот четириаголник е еднаков на спротивниот внатрешен агол, направи цртеж). Понатаму, $\gamma = \measuredangle AFE = \measuredangle BFN$, како накрсни агли. Четириаголникот $MBNF$ е тетивен ($\measuredangle FNB = \measuredangle FMA = 90^\circ$) па затоа $\gamma = \measuredangle BFN = \measuredangle BMN$. Значи, $\gamma = \measuredangle BMN = \measuredangle ACB$, од каде што следува тврдењето на здачата.

11. На страната BC на триаголникот ABC е избрана точка M така што тежиштето на триаголникот ABM припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот ACM, а тежишето на триаголникот ACM припаѓа

на кружницата опишана околу триаголникот ABM. Докажи дека тежишните линии повлечени од темето M во триаголниците ABM и ACM се еднакви.

Решение. Нека средините на страните AB и AC се редоследно C_1 и B_1, а тежиштата на триаголниците ABM и ACM се редоследно G_b и G_c (види цртеж).



Четириаголникот $ABMG_c$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle ABM = 180^\circ - \measuredangle AG_cM = \measuredangle AG_cB_1.$$

Од $C_1B_1 \parallel BC$ следува $\measuredangle ABM = \measuredangle AC_1B_1$, па затоа $\measuredangle AG_cB_1 = \measuredangle AC_1B_1$. Бидејќи двата агли се над отсечката AB_1 заклучуваме дека четириаголникот $AC_1G_cB_1$ е тетивен, т.е. точката G_c припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот AB_1C_1. Аналогно се докажува дека и точката G_b припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот AB_1C_1. Според тоа, точките A, C_1, G_b, G_c, B_1 лежат на иста кружница. Бидејќи G_b и G_c се тежишта на триаголниците ABM и ACM, добиваме $\overline{MG_b} : \overline{G_bC_1} = \overline{MG_c} : \overline{G_cB_1} = 2:1$. Значи, $\triangle MB_1C_1 \sim \triangle MG_cG_b$, од каде следува дека $G_bG_c \parallel C_1B_1$. Според тоа, четириаголникот $C_1G_bG_cB_1$ е тетивен трапез, па затоа

$$\measuredangle G_bC_1B_1 = 180^\circ - \measuredangle G_bG_cB_1 = \measuredangle G_cB_1C_1,$$

што значи дека трапезот е рамнокрак, т.е. триаголникот B_1C_1M е рамнокрак, па затоа $\overline{MC_1} = \overline{MB_1}$

12. На страните AB и AC на остроаголниот триаголник ABC, со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O, избрани се точки P и Q такви што четириаголникот $APHQ$ е паралелограм. Докажи дека важи

$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PQ}}{\overline{QA}\cdot\overline{QO}}=2.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Нека правата која минува низ средината K на отсечката AH и е нормална на OK ги сече страните AB и AC соодветно во точките P' и Q'. Со M и N редоследно да ги означиме средините на страните AB и AC, направи цртеж. Бидејќи

$$\measuredangle OMP'=\measuredangle OKP'=90^\circ,\quad \measuredangle ONQ'=\measuredangle OKQ'=90^\circ,$$

четириаголниците $OMP'K$ и $ONQ'K$ се тетивни. Отсечките MK и NK се средни линии на триаголниците ABH и ACH, па затоа $MK\parallel BH,\ NK\parallel CH$, т.е. $MK\perp AC, NK\perp AB$, па затоа

$$\measuredangle OP'K=\measuredangle OMK=\measuredangle BAC,\quad \measuredangle OQ'K=\measuredangle ONK=\measuredangle BAC.$$

Значи, триаголникот $OP'Q'$ е рамнокрак и K е средина на отсечката $P'Q'$, па затоа $AP'HQ'$ е паралелограм бидејќи дијагоналите му се полови, од каде следува $P\equiv P', Q\equiv Q'$.

Понатаму, правоаголните триаголници BPH, CQH и OPK се слични, па затоа

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OK}}=\frac{\overline{PH}}{\overline{PK}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{OP}},\quad \frac{\overline{CH}}{\overline{OK}}=\frac{\overline{QH}}{\overline{QK}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{OQ}}.$$

Користејќи ги горните равенства и очигледните равенства

$$\overline{PK}=\overline{QK}=\frac{\overline{PQ}}{2}, \overline{AP}=\overline{QH}, \overline{AQ}=\overline{PH},$$

добиваме дека важи

$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PQ}}{\overline{QA}\cdot\overline{QO}}=\frac{\overline{QC}\cdot\overline{PQ}}{\overline{PA}\cdot\overline{PO}}=2.$$

13. Нека I е центар на впишаната кружница, а A_1 и B_1 се соодветно средините на страните BC и AC на даден триаголник ABC. Со M и N да ги означиме средините на оние лаци AC и BC на опишаната кружница околу триаголникот ABC кои го содржат преостанатото теме на триаголникот. Ако точките M,I,N се колинеарни, докажи дека

$$\measuredangle AIB_1=\measuredangle BIA_1=90^\circ.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $MN\perp CI$. Нека K е пресечната точка на MN и CI, направи цртеж. Имаме

$$\measuredangle CNK = \measuredangle CNM = \measuredangle CAM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle AMC = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2},$$

$$\measuredangle NCK = \measuredangle NCI = \measuredangle BCN - \measuredangle BCI = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle BNC - \tfrac{\gamma}{2} = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{\beta}{2},$$

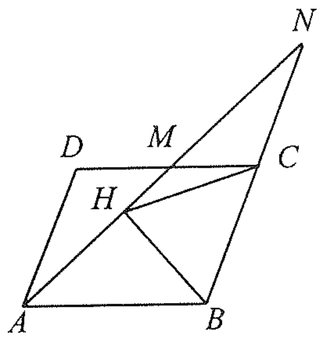
од каде што следува дека триаголникот CNK е правоаголен. Условот за колинеарност на точките M, I, N васушност значи дека $K \equiv I$, односно $\measuredangle CIN = \measuredangle CIM = 90^\circ$. Бидејќи $MB_1 \perp AC$ и $NA_1 \perp BC$, добиваме дека четириаголниците CA_1IN и CB_1IM се тетивни, со опишани кружници чии дијаметри се соодветно CN и CM. Затоа

$$\measuredangle CIA_1 = \measuredangle CNA_1 = \tfrac{\alpha}{2}, \quad \measuredangle CIB_1 = \measuredangle CMB_1 = \tfrac{\beta}{2},$$

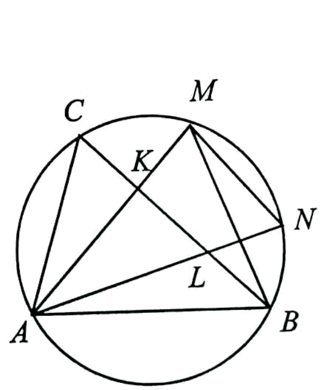
па тврдењето на задачата сега непосредно следува од познатите релации $\measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

14. Даден е паралелграм $ABCD$. Точката M е средина на страната CD и H е подножје на нормалата повлечена од темето B на правата AM. Докажи дека триаголникот BCH е рамнокрак.

Решение. Нека N е точка на правата BC таква што C е средина на отсечката BN (види цртеж). Лесно се докажува дека точките A, M, N се колинеарни, па затоа триаголникот BHN е правоаголен со прав агол во темето H. Бидејќи по конструкција C е средина на хипотенузата BN, важи $\overline{CH} = \overline{CB}$ (радиус на опишана кружница), што значи дека триаголникот BCH е рамнокрак.



15. Триаголникот ABC е впишан во кружница. Низ темето A се повлечени тетиви кои ја сечат страната BC во точките K и L и лакот BC во точките M и N, соодветно. Ако четириаголникот $KLMN$ е тетивен, докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.



Решение. Имаме, $\measuredangle BAN = \measuredangle BMN$, како периферискi агли над иста тетива. Од исти причини важи и $\measuredangle AMB = \measuredangle ACB$ (види цртеж). Сега

$$\measuredangle KMN = \measuredangle KMB + \measuredangle BMN = \measuredangle AMB + \measuredangle BMN .$$

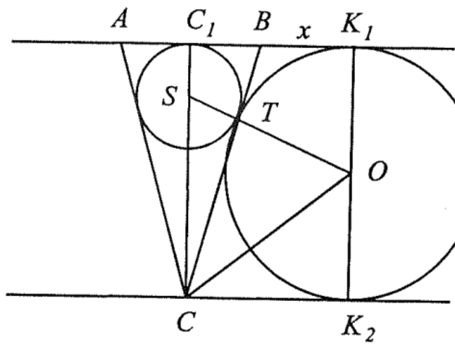
Четириаголникот $KLMN$ е тетивен, па затоа $\measuredangle KMN = \measuredangle ALK$. Од друга страна $\measuredangle ALK$ е надворешен агол на триаголникот ABL, па затоа важи

$$\measuredangle BAN + \measuredangle ACB = \measuredangle ALK = \measuredangle LAB + \measuredangle LBA,$$

од каде $\measuredangle ACB = \measuredangle LBA = \measuredangle CBA$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак.

16. Меѓу две паралелни прави поставени се кружница со дијаметар 1, која ги допира двете прави, и рамнокрак триаголник, чија основа лежи на едната права, а врвот на другата права. Познато е дека кружницата и триаголникот имаат точно една заедничка точка и дека таа точка лежи на вписаната кружница на триаголникот. Определи го радиусот на вписаната кружница на триаголникот.

Решение. Нека триаголникот е ABC, S е центарот на вписаната во него кружница, O е центарот на дадената кружница и T е допирната точка (цртеж десно). Нека C_1 е подножјето на висината повлечена од темето C, а K_1K_2 е дијаметарот на кружницата нормален на двете паралелни



прави. Тогаш $\overline{BC_1} = \overline{BT} = \overline{BK_1} = x$ (тангентни отсечки). Од друга страна $\overline{CT} = \overline{CK_2} = 2x$, па со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник CC_1B добиваме $2^2 + x^2 = (3x)^2$, т.е. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Триаголниците BC_1C и STC се слични, па важи $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{CT}}$, од каде за радиусот на вписаната кружница на триаголникот добиваме $\overline{ST} = x^2 = \frac{1}{2}$.

Задачи за самостојна работа

17. Во внатрешната област на паралелограмот $ABCD$ е дадена точка P таква што $\measuredangle ADP = \measuredangle ABP$ и $\measuredangle DCP = 30^\circ$. Определи го $\measuredangle DAP$.

18. Точките D,E и F припаѓаат редоследно на страните AB,BC и CA на остроаголниот триаголник ABC, при што отсечките AE,BF и CD не се подолги од $\sqrt{3}\,cm$. Докажи дека плоштината на триаголникот ABC не е поголема од $\sqrt{3}\,cm^2$.

19. Во правоаголен триаголник ABC на катетите BC и CA ($\overline{BC} > \overline{CA}$) земени се точки M и N такви што $\overline{BM} = \overline{AC}$ и $\overline{AN} = \overline{CM}$. Определи го аголот меѓу правите BN и AM.

20. Даден е триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека D е подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето C, а k е кружницата која ја допира отсечката BD во точката E, отсечката CD во точката F и опишаната кружница околу триаголникот ABC во точката G.

а) Докажи дека точките A,F и G се колинеарни.

б) Изрази го радиусот на кружницата k во зависност од должините на страните на триаголникот ABC.

21. Во остроаголен разностран триаголник ABC аголот во темето C е еднаков на 60°. Нека се A' и B', редоследно подножјата на висините повлечени од темињата A и B, а T е тежиштето на триаголникот ABC. Полуправите $A'T$ и $B'T$ ја сечат опишаната кружница на дадениот триаголник редоследно во точките M и N. Докажи дека $\overline{MN} = \overline{AB}$.

22. Нека M е произволна точка на отсечокот AD на симетралата на внатрешниот агол на триаголникот $ABC\,(D \in BC)$. Права паралелна на BC која минува низ M ја сече страната AB во точка N. Да ги означиме вторите пресечни точки на правите AM и CM со опишаната кружница околу триаголникот ABC со K и L, соодветно. Докажи дека точките K,N и L се колинеарни.

23. Нека D е произволна точка на страната AB на триаголникот ABC, чиј центар на впишаната кружница е I. Точките P и Q се пресеците на симетралата на отсечката AB и полуправите AI и BI, соодветно. Кружницата опишана околу триаголникот ADP ја сече отсечката AC

во точка E различна од A. Кружницата опишана околу триаголникот BDQ ја сече отсечката BC во точка F, различна од B. Со K да ја означиме пресечната точка на овие кружници, различна од D. ДОкажи дека точките E, F, K, I лежат на една кружница.

24. Дијагоналите на паралелограмот $ABCD$ со остар агол во темето A, се сечат во точката E. Кружницата опишана околу триаголникот ACD ги сече правите AB, BC, BD уште во точките K, L, P, во овој редослед. Кружницата опишана околу триаголникот CEL ја сече правата BD уште во точката M. Докажи дека $\overline{KD} \cdot \overline{KM} = \overline{KL} \cdot \overline{PC}$.

25. Дијагоналите AD, BE, CF на шестаголникот $ABCDEF$ впишан во кружница се сечат во точката S, при што отсечките AB и CF се паралелни, а правите DE и CF се сечат во точката M. Нека N е точка таква што M е средина на отсечката SN. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот ADN минува низ средината на отсечката CF.

26. Складни кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Нека P е произволна точка од лакот AB на кружницата k_2 кој е внатре во кружницата k_1 и нека правата AP ја сече k_1 уште во точката C, а полуправата CB ја сече k_2 уште во точката D. Нека симетралата на $\measuredangle CAD$ ја сече кружницата k_1 уште во точката E, а кружницата k_2 уште во точката F, а полуправата FB ја сече k_1 уште во точката Q. Ако X е една од пресечните точки на кружниците опишани околу триаголниците CDP и EQF, докажи дека триаголникот CFX е рамностран.