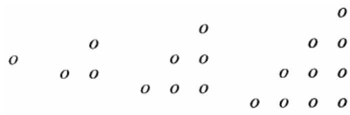
Алија Муминагиќ, Данска
Ристо Малчески, Македонија

ТРИАГОЛНИ БРОЕВИ 2

Во [1] триаголните броеви се дефинирани како броеви точки распоредени во облик на триаголник (цртеж десно), т.е. како броеви од видот



$$t_n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Понатаму, во [1] – [4] се докажани повеќе својства на триаголните броеви.

Во оваа статија ќе разгледаме неколку задачи за триаголните броеви.

Задача 1. Докажи дека

$$t_{(n-1)^2+(n-1)-1} + t_{n^2+n-1} = n^4 .$$

Решение. Според (1) имаме:

$$\begin{aligned} t_{(n-1)^2+(n-1)-1} + t_{n^2+n-1} &= \frac{((n-1)^2+(n-1)-1)((n-1)^2+(n-1))}{2} + \frac{(n^2+n-1)(n^2+n)}{2} \\ &= \frac{(n^2-n-1)(n^2-n)}{2} + \frac{(n^2+n-1)(n^2+n)}{2} \\ &= \frac{(n^2-n)^2-(n^2-n)+(n^2+n)^2-(n^2+n)}{2} \\ &= \frac{n^4-2n^3+n^2-n^2+n+n^4+2n^3+n^2-n^2-n}{2} \\ &= n^4, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 2. Пресметај го збирот

$$S = \frac{1}{4\cdot 1^4+1} + \frac{2}{4\cdot 2^4+1} + \ldots + \frac{2020}{4\cdot 2020^4+1} .$$

Решение. *Прв начин.* Имаме:

$$\begin{aligned} 4k^4+1 &= 4k^4+4k^2+1-4k^2 \\ &= (2k^2+1)^2-(2k)^2 \\ &= (2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1), \end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned} \frac{k}{4k^4+1} &= \frac{k}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)} = \frac{1}{4}\frac{2k^2+2k+1-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2k^2+2k+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(k-1)^2+k^2} - \frac{1}{k^2+(k+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Според тоа,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+\ldots+\frac{2020}{4\cdot 2020^4+1}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^2+1^2}-\frac{1}{1^2+2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2+2^2}-\frac{1}{2^2+3^2}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2019^2+2020^2}-\frac{1}{2020^2+2021^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2020^2+2021^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2021^2-1+2020^2}{2020^2+2021^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2020\cdot 2022+2020^2}{2020^2+2021^2}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2020\cdot 4042}{2020^2+2021^2}=\frac{1010\cdot 2021}{2020^2+(2020+1)^2}=\frac{1010\cdot 2021}{2020^2+2020^2+2\cdot 2020+1}\\
&= \frac{1010\cdot 2021}{1+2\cdot 2020^2+2\cdot 2020}=\frac{1010\cdot 2021}{1+2\cdot 2020\cdot 2021}.
\end{aligned}
$$

Втор начин. Последователно ги пресметуваме парцијалните збирови на дадената сума и наоѓаме:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{5}=\frac{\frac{1\cdot 2}{2}}{1+4\cdot\frac{1\cdot 2}{2}}=\frac{t_1}{1+4t_1},\\
S_2 &= \frac{\frac{2\cdot 3}{2}}{1+4\cdot\frac{2\cdot 3}{2}}=\frac{t_2}{1+4t_2},\\
S_3 &= \frac{\frac{3\cdot 4}{2}}{1+4\cdot\frac{3\cdot 4}{2}}=\frac{t_3}{1+4t_3},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

па затоа логично е да претпоставиме дека

$$S_n=\frac{t_n}{1+4t_n}\text{, за секој } n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Од (2) следува дека формулата (3) е точна за $n=1,2,3$. Нека претпоставиме дека (3) е точна за некој $n=k$, т.е. $S_k=\frac{t_k}{1+4t_k}$. Тогаш, ако искористиме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ важи $t_{k+1}-t_k=k+1$ (види [1]), добиваме

$$
\begin{aligned}
\frac{t_{k+1}}{1+4t_{k+1}}-\frac{t_k}{1+4t_k} &= \frac{t_{k+1}+4t_{k+1}t_k-t_k-4t_{k+1}t_k}{(1+4t_{k+1})(1+4t_k)}\\
&= \frac{k+1}{(1+2(k+1)(k+2))(1+2k(k+1))}\\
&= \frac{k+1}{(2k^2+6k+5)(2k^2+2k+1)}\\
&= \frac{k+1}{4(k+1)^4+1},
\end{aligned}
$$

па затоа

$$\frac{t_{k+1}}{1+4t_{k+1}}=\frac{t_k}{1+4t_k}+\frac{k+1}{4(k+1)^4+1}=S_k+\frac{k+1}{4(k+1)^4+1}=S_{k+1},$$

т.е. формулата (3) важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Конечно, ако во (3) ставиме $n=2020$ добиваме

$$S=\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+\ldots+\frac{2020}{4\cdot 2020^4+1}=\frac{t_{2020}}{1+4t_{2020}}=\frac{\frac{2020\cdot 2021}{2}}{1+4\cdot\frac{2020\cdot 2021}{2}}=\frac{1010\cdot 2021}{1+2\cdot 2020\cdot 2021}. \blacksquare$$

Да ги разгледаме низата триаголни броеви $t_r = \frac{r(r+1)}{2}$, $r \in \mathbb{N}$ и низата квадратни броеви $k_s = s^2$. Во задача 7 во [1] е докажано дека природниот број m е триаголне ако и само ако бројот $8m+1$ е квадратен, а во задача 8 во [1] е докажано дека низата триаголни броеви содржи бесконечно многу квадратни броеви. Во врска со низите триаголни и квадратни броеви ќе ја решиме следнава задача.

Задача 3 ([1]). Ако $\frac{r(r+1)}{2} = t_r = k_s = s^2$, докажи дека

$$t_{3r+4s+1} = (2r+3s+1)^2. \tag{4}$$

Решение. Нека $\frac{r(r+1)}{2} = t_r = k_s = s^2$. Тогаш

$$\begin{aligned} t_{3r+4s+1} &= \frac{(3r+4s+1)[(3r+4s+1)+1]}{2} = \frac{(3r+4s+1)^2+3r+4s+1}{2} \\ &= \frac{9r^2+16s^2+1+24rs+6r+8s+3r+4s+1}{2} = \frac{9r^2+16\frac{r(r+1)}{2}+24rs+9r+12s+2}{2} \\ &= \frac{17r(r+1)+24rs+12s+2}{2} = \frac{34s^2+24rs+12s+2}{2} \\ &= 17s^2+12rs+6s+1. \end{aligned} \tag{5}$$

Од друга страна имаме:

$$\begin{aligned} (2r+3s+1)^2 &= 4r^2+9s^2+1+12rs+4r+6s \\ &= 9s^2+4r(r+1)+12rs+6s+1 \\ &= 9s^2+8s^2+12rs+6s+1 \\ &= 17s^2+12rs+6s+1. \end{aligned} \tag{6}$$

Конечно, равенството (4) следува од равенствата (5) и (6). ■

Забелешка 1. Користејќи ја задача 3 лесно се докажува дека низата триаголни броеви содржи бесконечно многу квадратни броеви. Навистина, за $s = r = 1$ имаме $t_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1^2 = k_1$, па од задача 3 следува

$$t_{3\cdot1+4\cdot1+1} = (2\cdot1+3\cdot1+1)^2, \text{ т.е. } t_8 = 6^2 = k_6.$$

Понатаму, за $r = 8$ и $s = 6$ добиваме

$$t_{3\cdot8+4\cdot6+1} = (2\cdot8+3\cdot6+1)^2, \text{ т.е. } t_{49} = 35^2 = k_{35} \text{ итн.}$$

Решението на задачата 3 е лесно и елегантно, но е чудно што некој воочил дека $(3r+4s+1)$ – от триаголен број е еднаков на $(2r+3s+1)$ – от квадратен број. Затоа е логично да се запрашаме како е дојдено до ова тврдење, бидејќи со непосредна проверка тоа скоро и да не е можно. Одговорот на ова прашање го дава решението на следнава задача.

Задача 4. Определи ги природните броеви p и q за кои важи

$$\frac{p(p+1)}{2}=q^2 .$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{p(p+1)}{2}=q^2$$

$$p^2+p=2q^2$$

$$4p^2+4p=8q^2$$

$$4p^2+4p+1=8q^2+1$$

$$(2p+1)^2=8q^2+1.$$

Во последната равенка воведуваме замена $2p+1=x$ и $y=q$ и ја добиваме равенката $x^2=8y^2+1$, која е Пеловата (John Pell, 1611-1685, англиски математичар) равенка од видот

$$x^2-dy^2=1 \tag{7}$$

за $d=8$. Познато е дека сите решенија (x_n,y_n) на равенката (7) се дадени со формулата

$$x_n+y_n\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n,\ n\in\mathbb{N} \tag{8}$$

каде (x_0,y_0) е минималното решение на (7). Во нашиот случај тоа е парот $(x_0,y_0)=(3,1)$, па од (8) добиваме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$x_n+y_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n, \tag{9}$$

Ако во (9) наместо n ставиме $n+1$, добиваме

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^{n+1}. \tag{10}$$

Понатаму, равенството (10) го делиме со равнството (9) и последователно добиваме

$$\frac{x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}}{x_n+y_n\sqrt{8}}=\frac{(3+\sqrt{8})^{n+1}}{(3+\sqrt{8})^n}$$

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})(x_n+y_n\sqrt{8})$$

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{8}=3x_n+8y_n+(x_n+3y_n)\sqrt{8}$$

и како $\sqrt{8}$ е ирационален број од последното равенство следува

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+8y_n \\ y_{n+1}=x_n+3y_n. \end{cases} \tag{11}$$

Сега заради $2p+1=x$ и $y=q$ имаме $2p_n+1=x_n$, $y_n=q_n$ и $2p_{n+1}+1=x_{n+1}$, $y_{n+1}=q_{n+1}$ и ако замениме во (11) добиваме

$$\begin{cases} 2p_{n+1}+1=3(2p_n+1)+8q_n \\ q_{n+1}=2p_n+1+3q_n \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} p_{n+1} = 3p_n + 4q_n + 1 \\ q_{n+1} = 2p_n + 3q_n + 1, \end{cases} \tag{12}$$

со што во множеството природни броеви се определени решенијата на равенката $\frac{p(p+1)}{2} = q^2$. ■

Забелешка 2. а) Ако ги споредиме равентвата (12) со равенството (4) забележуваме дека всушност тргнувајќи од парот $(1,1)$ со равенството (4) се зададени редните броеви на сите триаголни броеви кои истовремено се и квадратни броеви, како и редните броеви на сите квадратни броеви кои истовремено се и триаголни броеви. Така, користејќи ги равенствата (12) можеме да ја составиме следнава табела

p	1	8	49	288	1681	...
q	1	6	35	204	1189	...

во која последователно добиваме кој триаголен број е еднаков на кој квадратен број.

б) Од првата равенка во (11) добиваме $8y_n = x_{n+1} - 3x_n$ и ако наместо n ставиме $n+1$ добиваме

$$8y_{n+1} = x_{n+2} - 3x_{n+1}. \tag{13}$$

Сега втората равенка во (11) ја множиме со 8 и добиваме $8y_{n+1} = 8x_n + 24y_n$, па ако замениме $8y_n = x_{n+1} - 3x_n$ добиваме

$$8y_{n+1} = 8x_n + 3(x_{n+1} - 3x_n). \tag{14}$$

Сега од (13) и (14) добиваме $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 8x_n + 3(x_{n+1} - 3x_n)$, односно

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n. \tag{15}$$

Понатаму, ако во (15) ставиме $2p_n + 1 = x_n$, $2p_{n+1} + 1 = x_{n+1}$ и $2p_{n+2} + 1 = x_{n+2}$, по средувањето добиваме дека редните броеви на триаголните броеви кои истовремено се и квадратни броеви се решенија на следнава линеарна диференцна равенка од втор ред:

$$p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n = 2, \tag{16}$$

со почетни услови $p_1 = 1$, $p_2 = 8$. Според тоа, со замена во $s_n = \frac{p_n(p_n+1)}{2}$, за $n = 1, 2, \ldots$ ги добиваме триаголните броеви кои истовремено се и квадратни броеви.

в) Може да се докаже дека сите триаголни броеви кои истовремено се и квадратни броеви се решенија на линеарната диференцна равенка од втор ред

$$s_n = 34s_{n-1} - s_{n-2} + 2,$$

со почетни услови $s_0 = 0, s_1 = 1$.

Задача 5. Ако за триаголните броеви t_m и t_n важи $t_n = 2t_m$, тогаш триаголниот број t_{2m-n} е квадратен број. Докажи!

Решение. Од $t_n = 2t_m$ добиваме $\frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{m(m+1)}{2}$, односно

$$2m(m+1) = n(n+1) \ . \tag{17}$$

Од друга страна, важи:

$$t_{2m-n} = \frac{(2m-n)(2m-n+1)}{2} = \frac{(2m-n)^2+2m-n}{2} = \frac{4m^2-4mn+n^2+2m-n}{2}$$

$$t_{2m-n} = \frac{2m(m+1)-n(n+1)}{2} + (n-m)^2.$$

Ако во последното равенство замениме од равенството (17) добиваме

$$t_{2m-n} = (n-m)^2 \ ,$$

т.е. t_{2m-n} е квадратен број. ■

Забелешка 3. За триаголните броеви $t_{14} = \frac{14(14+1)}{2} = 105$ и $t_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = 210$ важи $t_{20} = 2t_{14}$, па од задачата 5 следува дека триаголниот број $t_{2 \cdot 14-20} = t_8$ е квадратен број. Навистина, како што претходно видовме $t_8 = 36 = 6^2 = k_6$.

Литература

1. Малчески, Р. Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
2. Carstensen, J. Trekanttal, Matematik Magazinet, 63, 2012
3. Carstensen, J., Muminagić, A. Trekanttallene 2, Matematik Magazinet, 63, 2012
4. Problemgruppe, C. A. Trekanttallene 4, Matematik Magazinet, 65, 2012
5. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F. Matematička čitanka 3, Grafički promet d.o.o., Sarajevo, 2011
6. Dakić, B. Matematički panoptikum, Školska knjiga, Zagreb, 1995