Сојузен натпревар 1971

II година

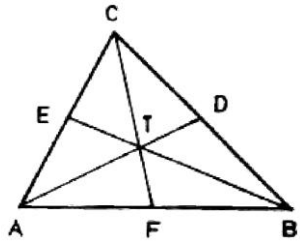
1. Нека AD, BE, CF се тежишните линии, а T е тежиштето на триаголникот ABC. Ако се $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ и $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ се редоследно радиусите на впишаните и опишаните кружници за триаголниците $BDT, DCT, CET, EAT, AFT,$ ABT докажи дека важат равенствата

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6} \text{ и } r_1r_3r_5=r_2r_4r_6.$$

Решение. Ќе го користиме следново тврдење: Ако a,b,c се страни на триаголник, а P, r и ρ се соодветно неговата плоштина, радиус на опишана и радиус на впишана кружница, тогаш $P=\frac{a+b+c}{2}\rho=\frac{abc}{4r}$.

Нека плоштината на триаголникот $ABCD$ е еднаква на $6x$. Тогаш секој од триаголниците $BDT,$ DCT, CET, EAT, AFT, ABT има плоштина еднаква на x (цртеж десно). Користејќи ги наведените формули добиваме:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{BT+TD+DB}{2x}+\frac{CT+TE+EC}{2x}+\frac{AT+TF+FA}{2x}$$
$$=\frac{CT+TD+DC}{2x}+\frac{AT+TE+EA}{2x}+\frac{BT+TF+FB}{2x}$$
$$=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6},$$
$$r_1r_3r_5=\frac{BT\cdot TD\cdot DB}{4x}\cdot\frac{CT\cdot TE\cdot EC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TF\cdot FA}{4x}$$
$$=\frac{CT\cdot TD\cdot DC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TE\cdot EA}{4x}\cdot\frac{BT\cdot TF\cdot FB}{4x}=r_2r_4r_6.$$



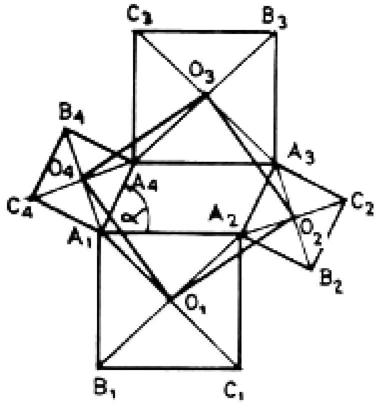
2. Над страните на паралелограмот $A_1A_2A_3A_4$ од надворешната страна се конструирани квадрати $A_1B_1C_1A_2, A_2B_2C_2A_3, A_3B_3C_3A_4, A_4B_4C_4A_1$. Докажи дека средините O_1, O_2, O_3, O_4 на овие квадрати се темиња на квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на четвртините на плоштините на конструираните квадрати зголемен за плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Нека, на пример, $\measuredangle A_2A_1A_4 \leq \frac{\pi}{2}$ (цртеж десно). Триаголниците

$$O_1O_2A_2, O_1O_4A_1, O_3O_2A_3, O_3O_4A_4$$

се складни, бидејќи

$$O_1A_2=O_1A_1=O_3A_3=O_3A_4,$$
$$O_2A_2=O_4A_1=O_2A_3=O_4A_4,$$
$$\measuredangle O_1A_2O_2=\measuredangle O_1A_1O_4=\measuredangle O_3A_3O_2$$
$$=\measuredangle O_3A_4O_4=\frac{\pi}{2}+\alpha.$$



Затоа $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ и $\measuredangle O_1O_2A_2 = \measuredangle O_3O_2A_3$, па понатаму следува

$$\measuredangle O_1O_2O_3 = \measuredangle O_1O_2A_2 + \measuredangle A_2O_2O_3 = \measuredangle O_3O_2A_3 + \measuredangle A_2O_2O_3 = \measuredangle A_2O_2A_3 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Слично се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ се прави, па како сите страни му се еднакви, овој четириаголник е квадрат. Понатаму, важи

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2A_3A_4} + \tfrac{1}{4}(P_{A_1B_1C_1A_2} + P_{A_2B_2C_2A_3} + P_{A_3B_3C_3A_4} + P_{A_4B_4C_4A_1}) = \\ = P_{A_1A_2A_3A_4} + P_{A_1O_1A_2} + P_{A_2O_2A_3} + P_{A_3O_3A_4} + P_{A_4O_4A_1} \\ = P_{O_1O_2O_3O_4} - P_{O_1O_2A_2} + P_{O_3O_2A_3} - P_{O_3O_4A_4} + P_{O_1O_4A_1} \\ = P_{O_1O_2O_3O_4}. \end{aligned}$$

3. Определи ги природните броеви p и q така што нулите на триномите

$$x^2 - px + q \text{ и } x^2 - qx + p$$

исто така ќе бидат природни броеви.

Решение. Нека се x_1, x_2 решенија на равенката $x^2 - px + q = 0$, а y_1, y_2 на равенката $x^2 - qx + p = 0$, такви што $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$x_1 + x_2 = p,\ x_1x_2 = q,\ y_1 + y_2 = q,\ y_1y_2 = p.$$

а) Нека еден од броевите x_1, x_2, y_1, y_2 е еднаков на 1, на пример $x_1 = 1$. Тогаш $1 + x_2 = p$, $x_2 = q$, па следува

$$y_1 + y_2 - y_1y_2 = q - p = -1, \text{ т.е. } (y_1 - 1)(y_2 -) = 2.$$

Понатаму, лесно се добива дека $\{y_1, y_2\} = \{2,3\}$, т.е. $q = 5, p = 6, x_2 = 5$.

Лесно се проверува дека за $p = 6, q = 5$ паровите $(1,5)$ и $(5,1)$ се репенија на равенката $x^2 - 6x + 5 = 0$, а паровите $(2,3)$ и $(3,2)$ на равенката $x^2 - 5x + 6 = 0$. Сличен резултат добиваме за $p = 5, q = 6$.

б) Нека $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, y_1 \geq 2, y_2 \geq 2$. Тогаш

$$p = x_1 + x_2 \leq x_1x_2 = q = y_1 + y_2 \leq y_1y_2 = p,$$

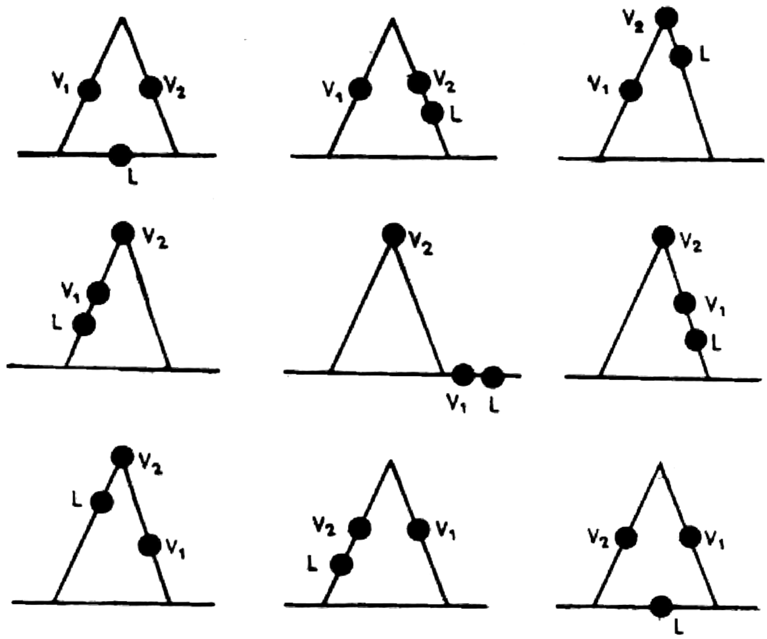
од каде добиваме $p = q = x_1 + x_2 = x_1x_2 = y_1 + y_2 = y_1y_2$. Нека, на пример $x_1 \leq x_2$. Тогаш од $x_1 + x_2 = x_1x_2 \geq 2x_2$ следува $x_1 \geq x_2$. Значи, $x_1 = x_2$, па затоа $2x_1 = x_1^2$, т.е. $x_1 = x_2 = 2$. Според тоа, $p = q = x_1 + x_2 = 4$. Парот $(2,2)$ навистина е решение на равебката $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Конечно, паровите (p,q) се $(5,6), (6,5), (4,4)$.

4. Скретниците A, B и обиколницата C се поврзани со железнички пруги AC, BC и со пругата AB со доволно долги продолжетоци AD и BE. На пругата

AC се наоѓа вагон V_1, на пругата BC вагон V_2, а на пругата AB локомотива L. На обиколницата може да дојде секој од двата вагони, но не и локомотивата. Служејќи се со обиколницата и скретниците со помош на локомотивата префрли го вагонот V_1 на местото на вагонот V_2, а вагонот V_2 на местото на вагонот V_1, така што на крајот локомотивата пак ќе биде на своето место.

Решение. Еден начин на преместување на вагоните и враќање на локомотивата на своето место е прикажан на долните цртежи.



III година

1. Нека a, b, p, q, r, s се природни броеви такви што

$$qr - ps = 1 \text{ и } \frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}.$$

Докажи дека $b \geq q + s$.

Решение. Од условот $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ следува $aq - bp > 0, br - as > 0$ и $qr - ps > 0$, а како $aq - bp, br - as, qr - ps$ се цели броеви, добиваме

$$aq - bp \geq 1, br - as \geq 1.$$

Понатаму,

$$b(qr - ps) = q(br - as) + s(aq - bp) \geq q + s$$

и како $qr - ps = 1$, добиваме $b \geq q + s$.

2. Даден е триаголник ABC и реален број k. Нека точките P,Q,R се определени со релациите

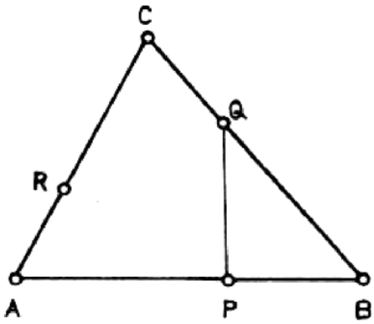
$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CR}=k\overrightarrow{CA}.$$

Докажи дека

$$AB^2+BC^2+CA^2=g(k)(PQ^2+QR^2+RS^2),$$

каде g е некоја функција од k. Определи ја и испитај ја оваа функција.

Решение. Нека $AB=c, BC=a, CA=b$. Тогаш (цртеж десно):



$$\begin{aligned}PQ^2&=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-2k(1-k)ac\cos B\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-2k(k-1)ac\tfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-k(k-1)(a^2+c^2-b^2).\end{aligned}$$

Аналогно се добива

$$QR^2=(1-k)^2a^2+k^2b^2-k(1-k)(a^2+b^2-c^2),$$

$$RP^2=(1-k)^2b^2+k^2c^2-k(1-k)(b^2+c^2-a^2),$$

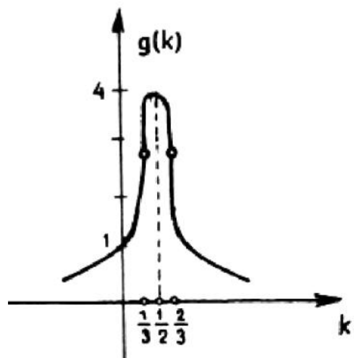
па патаму лесно следува

$$\begin{aligned}PQ^2+QR^2+RP^2&=((1-k)^2+k^2-k(k-1))(a^2+b^2+c^2)\\&=(3k^2-3k+1)(a^2+b^2+c^2),\end{aligned}$$

$$AB^2+BC^2+CA^2=a^2+b^2+c^2=\tfrac{1}{3k^2-3k+1}(PQ^2+QR^2+RP^2).$$

Според тоа,

$g(k)=\frac{1}{3k^2-3k+1}=\frac{1}{(3(k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4})}>0$, за секој $k\in\mathbb{R}$.



Понатаму, $\lim\limits_{k\to\pm\infty}g(k)=0$,

$$g'(k)=\tfrac{3-6k}{(3k^2-3k+1)^2},\ g''(k)=\tfrac{-54k^2+54k-12}{(3k^2-3k+1)^3}.$$

Функцијата g строго монотоно расте на интервалот $(-\infty,\frac{1}{2})$, строго монотоно опаѓа на интервалот $(\frac{1}{2},+\infty)$ и има максимум $g(\frac{1}{2})=4$. Таа има превојни точки $(\frac{1}{3},3)$ и $(\frac{2}{3},3)$. Графикот на функцијата е прикажан на цртежот десно.

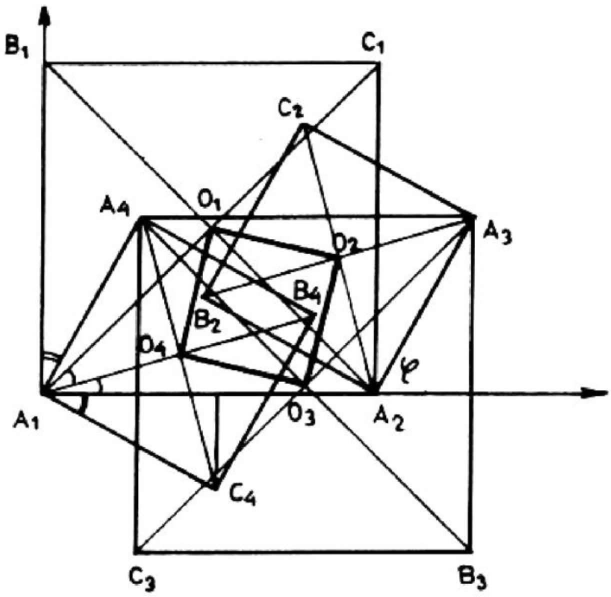
3. Над страните на паралелограмот $A_1A_2A_3A_4$ кон внатрешната страна се конструирани квадрати $A_1B_1C_1A_2, A_2B_2C_2A_3, A_3B_3C_3A_4, A_4B_4C_4A_1$. Докажи дека средините O_1,O_2,O_3,O_4 на овие квадрати се темиња на квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на четвртините на плоштините на конструираните квадрати намален за плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Нека $\measuredangle A_2A_1A_4=\varphi$, $A_1A_2=a$, $A_1A_4=b$. Воведуваме правоаголен координатен систем така што важи:

1) точката A_1 е координатен поочеток,

2) точката A_2 припаѓа на позитивниот дел од $x-$оската,

3) точките A_3 и A_4 имаат позитивни $y-$координати (вид цртеж).



Тогаш добиваме

$$A_1(0,0),\ A_2(a,0),\quad A_3(a+b\cos\varphi,b\sin\varphi),\qquad A_4(b\cos\varphi,b\sin\varphi),$$

$$C_4(b\sin\varphi,-b\cos\varphi),\ B_3(a+b\cos\varphi,b\sin\varphi-a),\ O_1(\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}),$$

$$O_3(\tfrac{a}{2}+b\cos\varphi,b\sin\varphi-\tfrac{a}{2}),\quad O_4(\tfrac{b}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi),\tfrac{b}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi)),$$

$$O_3O_4^2=(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b(\cos\varphi-\sin\varphi)}{2})^2+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b(\sin\varphi+\cos\varphi)}{2})^2$$

$$=\tfrac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\tfrac{b^2}{2},$$

$$O_1O_4^2=(\tfrac{b(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2}-\tfrac{a}{2})^2+(\tfrac{b(\sin\varphi-\cos\varphi)}{2}-\tfrac{a}{2})^2$$

$$=\tfrac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\tfrac{b^2}{2},$$

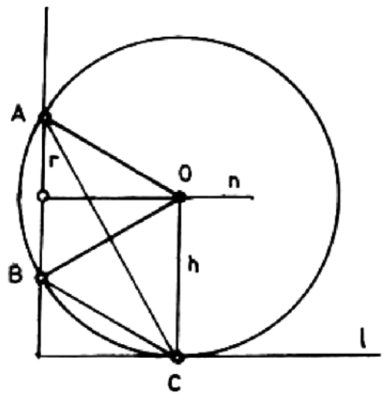
$$O_1O_2^2=(b\cos\varphi)^2+(b\sin\varphi-a)^2=a^2-2ab\sin\varphi+b^2=O_1O_4^2+O_3O_4^2.$$

Според тоа, аголот $O_1O_3O_4$ е прав. Аналогно се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ се прави, а како $O_3O_4=O_3O_4$, заклучуваме дека $O_1O_2O_3O_4$ е квадрат. Неговата плоштина е еднаква на

$$\frac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\frac{b^2}{2}=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2)-ab\sin\varphi.$$

4. Летвичката AB на термометарот кој виси вертикално на ѕидот има должина $2r$. Окото на набљудувачот се наоѓа на права l која е нормална на рамнината на ѕидот и ја сече правата AB во точка чие растојание од средината на отсечката AB е еднакво на $h\,(h>r)$. На кое растојание од ѕидот треба да се наоѓа окото на набљудувачот за да аголот под кој набљудувачот ја гледа летвичката е најголем?

Решение. Нека k е кружницата која ги содржи точките A и B и точка $C\in l$ и нека O е центарот на таа кружница (цртеж десно). Од точката C набљудувачот ја гледа отсечката AB под агол $\measuredangle BCA=\frac{1}{2}\measuredangle BOA$. Овој агол е најголем ако растојанието на точката O (центар на кружницата која има заеднички точки со правата l) до правата AB е најмало можно. Лесно се докажува дека тоа се постигнува ако k ја допира правата l и во тој случај растојанието од точката C до правата AB е еднакво на $\sqrt{h^2-r^2}$ и тоа е бараното растојание.



IV година

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви поголеми од 1, а m е природен број. Докажи дека

$$\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n} a_j)^{-m}\geq n(n-1)^m.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x_j=\log_{a_j}(a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n)$, $j\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш броевите $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни, па од неравенството меѓу срединита од ред m и аритметичката средина и својствата на логаритмите добиваме

$$\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n} a_j)^{-m}=n\frac{x_1^m+x_2^m+...+x_n^m}{n}\geq n(\frac{x_1+x_2+..x_n}{n})^m=n(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}\log_{a_j} a_i)^m$$

$$=n(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}(\log_{a_j} a_i+\log_{a_i} a_j)^m\geq\frac{1}{n^{m-1}}(2\tbinom{n}{2})^m=n(n-1)^m.$$

Во претпоследното неравенство го користевме неравенството

$$\log_{a_j} a_i+\log_{a_i} a_j=\log_{a_j} a_i+\frac{1}{\log_{a_j} a_i}\geq 2.$$

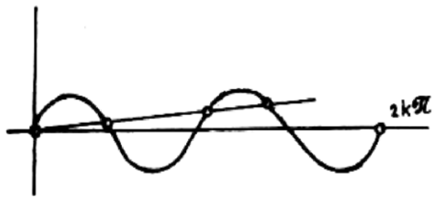
Знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2. Нека n е природен број. Колку решенија има равенката

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{n\pi}{2}\ ?$$

Решение. Нека b_n е бројот на пресечните точки на правата $f(x) = \frac{2x}{n\pi}$ и синусоидата $g(x)\sin x$ за кои $x > 0$. Да забележиме дека ако $f(a) = g(a)$, тогаш $a = \frac{n\pi}{2}\sin a \leq \frac{n\pi}{2}$, т.е. позитивните нули на функцијата $f(x) - g(x)$ припашаат на интервалот $I_n = (0, \frac{n\pi}{2}]$.

а) Нека $n = 4k$. Тогаш $I_n = (0, 2k\pi]$. Ќе докажеме дека интервалот $(0, 2\pi]$ содржи една нула на функцијата $f(x) - g(x)$, а секој интервал $(2(j-1)\pi, 2j\pi]$, каде $j \in \{2, 3, ..., k\}$ содржи две нули на функцијата (цртеж десно). За $j = 1$ тоа лесно се проверува за интервалот $(0, 2\pi]$. За $k > 1$ и $j \in \{2, 3, ..., k\}$ добиваме



$$h(x) = f(x) - g(x) = \sin x - \frac{x}{2k\pi}, \qquad h(2(j-1)\pi) = -\frac{j-1}{k} < 0,$$

$$h(2(j-1)\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{4k-4j+3}{4k} > 0, \qquad h(2(j-1)\pi + \pi) = -\frac{2j-1}{2k} < 0.$$

Од непрекинатоста на фунцкијата h, конвексноста на синусот на интервалот

$$(2(j-1)\pi, 2(j-1)\pi + \pi], \quad j \in \{2, 3, ..., k\}$$

и негативноста на синусот на интервалите $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), ..., ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ следува наведеното тврдење. Според тоа, $b_{4k}\, 2(k-1) + 1 = 2k - 1$.

б) Нека $n = 4k + 1$. Тогаш $I\ = (0, (2k + \frac{1}{2})\pi]$. Интервалот $(0, 2k\pi)$ содржи точно $2k - 1$ нула на функцијата $h(x)$, а интервалот $(2k\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ уште две нули на оваа функција, при што десниот крај на интервалот, т.е. бројот $(2k + \frac{1}{2})\pi$ е една од тие нули. Затоа $b_{4k+1} = 2k + 1$.

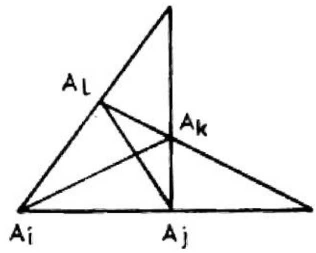
в) Нека $n = 4k + 2$. Тогаш $I_n = (0, (2k+1)\pi]$ и $b_{4k+2} = b_{4k+1} = 2k + 1$, бидејќи интервалот $(0, 2k\pi]$ содржи $2k - 1$ нули на функцијата $h(x)$, а интервалот $(2k\pi, (2k+1)\pi]$ содржи две нули на оваа функција, што што првата и втората половина на овој интервал содржат по една нула.

г) Нека $n = 4k + 3$. Тогаш $I_n = (0, (2k + \frac{3}{2})\pi]$ и $b_{4k+3} = b_{4k+1} = 2k + 1$, бидејќи интервалот $(0, (2k + \frac{3}{2})\pi]$ содржи точно две нули на функцијата $h(x)$.

Според тоа, за секој n важи $b_n = 2[\frac{n-1}{4}]+1$. Конечно, ако ги земеме предвид и негативните нули на функцијата $h(x)$ добиваме дека батраниот број е $4[\frac{n-1}{4}]+2$.

3. Во рамнината се дадени точките $A_1, A_2, ..., A_n$ така што никои три од нив не се колинеарни. Нека p_{ij} е правата определена со точките A_i и A_j. Определи го максималниот број пресечни точки на правите p_{ij} и p_{kl}, при што i, j, k, l се различни елементи од множеството $\{1, 2, ..., n\}$.

Решение. Ќе го определиме бројот на пресечните точки кои се разликуваат од точките $A_1, A_2, ..., A_n$. Секоја 4-комбинација $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ елементи на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ определува најмногу три нови пресечни точки (цртеж десно). Бидејќи бројот на 4-комбинации на елементите на ова множество е $\binom{n}{4}$, добиваме дека бројот на пресечните точки кои се разликуваат од точките $A_1, A_2, ..., A_n$ е најмногу $3\binom{n}{4}$.



4. Дадени се функциите
$$f_n(x) = \frac{1-\cos x \cos 2x ... \cos nx}{x^2}, n \in \mathbb{N}.$$

а) Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f_n$.

б) Определи ја врската меѓу f_n и f_{n-1}.

в) Пресметај го f_n.

Решение. а) Да забележиме дека $f_1(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2$ и дека за $n > 1$ важи

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1-\cos x\cos 2x ... \cos nx}{x^2} = \frac{1-\cos nx + \cos nx - \cos x \cos 2x ... \cos nx}{x^2} \\ &= \frac{1-\cos nx}{x^2} + \frac{1-\cos x\cos 2x ... \cos(n-1)x}{x^2}\cos nx \\ &= \frac{n^2}{2}(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2 + f_{n-1}(x)\cos nx. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{n^2}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2 + \lim_{x\to 0} f_{n-1}(x)\cos nx = \frac{n^2}{2} + \lim_{x\to 0} f_{n-1}(x),$$

па од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = f_n$.

b) Од решението под а) следува дека $f_n = \frac{n^2}{2} + f_{n-1}$, за $n > 1$.

c) Ако ги собереме равенствата

$$f_k = \frac{k^2}{2} + f_{k-1}\text{, за } k = 2,3,4,\ldots,n$$

добиваме

$$f_n = f_1 + \frac{1}{2}(2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$