Самоил Малчески, Скопје
Алекса Малчески, Скопје

ТЕОРЕМА НА ПТОЛОМЕЈ

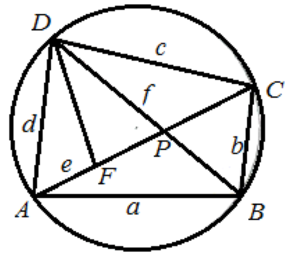
Античкиот научник Клавдиј Птоломеј, кој живеел во II век од н.е. дал забележителен придонес во развојот на астрономијата и геометријата. Имено, тој е автор на теоријата за геоцентричниот систем, која опстојува се до XVII век. Имено, Никола Коперник докажал дека Земјата се врти околу Сонцето, а не обратно како што тврдел Проломеј. Во астрономијата, теоријата на Птоломеј била оповргната, меѓутоа неговите математички достигања се актуелни и денес. Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на познатата теорема на Птоломеј за тетивен четириаголник и нејзината примена.

Теорема. (Птоломеј). Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.

Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со должини на страни a,b,c и d и должини на дијагонали e и f (цртеж десно). Нека $\measuredangle BDC = \measuredangle ADF$. Бидејќи $\measuredangle DBC = \measuredangle DAF$ (агли над тетивата CD во кружницата) следува дека триаголниците AFD и BCD се слични, па затоа

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{BC},$$

т.е.



$$bd = f \cdot \overline{AF}. \qquad (1)$$

Понатаму, $\measuredangle ADB = \measuredangle FDC$ и како $\measuredangle ABD = \measuredangle FCD$ (агли над тетивата AD во кружницата) следува дека триаголниците FCD и ABD се слични, т.е

$$ac = f \cdot \overline{FC}. \qquad (2)$$

Конечно, ако ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$ac + bd = f \cdot \overline{AF} + f \cdot \overline{FC} = f(\overline{AF} + \overline{FC}) = ef. \ \blacksquare$$

Задача 1. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC. Произволна точка M припаѓа на лакот BC на кој не му припаѓа точката M. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

Решение. Од теоремата на Птоломеј, применета на тетивниот четириаголник $ABMC$ добиваме

$$\overline{BM}\cdot\overline{CA}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}=\overline{BC}\cdot\overline{AM}\,. \tag{3}$$

Но, триаголник ABC е рамностран, што значи $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$, па од (3) добиваме

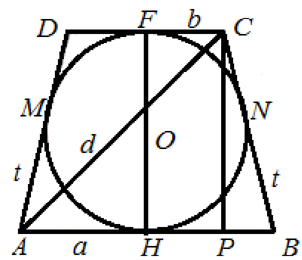
$$\overline{BM}\cdot\overline{AB}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}\cdot\overline{AM}$$

и ако последното равенство го поделиме со $\overline{AB}$ го добиваме бараното равенство. ■

Задача 2. Рамнокрак трапез $ABCD$ со должини на основи a и b е опишан околу кружница $K(O,r)$. Докажи, дека $2r=\sqrt{ab}$.

Решение. Од својствата на тангентните отсечки (види цртеж) следува

$$\overline{AM}=\overline{AH},\ \overline{BN}=\overline{BH},\ \overline{CN}=\overline{CF},\ \overline{DF}=\overline{DM}$$



па затоа

$$\begin{aligned}2t&=(\overline{BN}+\overline{CN})+(\overline{AM}+\overline{DM})\\&=(\overline{BH}+\overline{AH})+(\overline{CF}+\overline{DF})=a+b,\end{aligned}$$

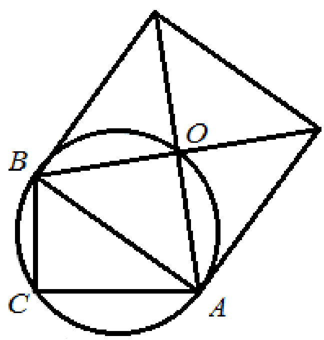
т.е. $t=\frac{a+b}{2}$. Понатаму, околу рамнокрак трапез може да се опише кружница, па од теоремата на Птоломеј следува дека $d^2=t^2+ab$. Од друга страна $\overline{AP}=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$, па од досега изнесеното и од Питагоровата теорема применета на $\triangle APC$ добиваме

$(2r)^2=d^2-(\frac{a+b}{2})^2=t^2+ab-(\frac{a+b}{2})^2=ab$, т.е. $2r=\sqrt{ab}$. ■

Задача 3. Збирот на должните на катетите на правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C е еднаков на m. Над хипотенузата на $\triangle ABC$ е конструиран квадрат така што $\triangle ABC$ и квадратот се наоѓаат од различна страна на правата AB. Определи го растојанието од точката C до центарот на квадратот.

Решение. Нека O е центарот на квадратот. Бидејќи $\measuredangle AOB=90^\circ=\measuredangle ACB$ добиваме дека четириаголникот $AOBC$ е тетивен. Од теоремата на Птоломеј следува дека

$$\overline{AB}\cdot\overline{CO}=\overline{AC}\cdot\overline{OB}+\overline{AO}\cdot\overline{CB}\,. \tag{4}$$

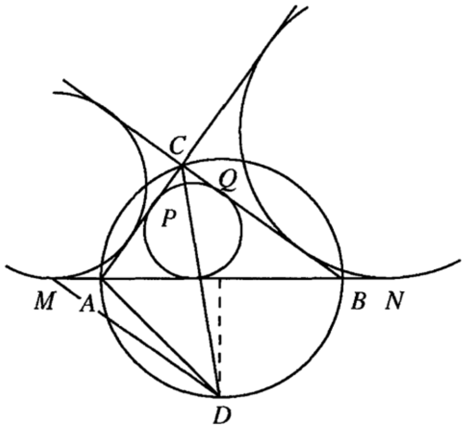


Понатаму, од Питагоровата теорема следува $\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$ и како $\overline{AO}=\overline{BO}$, добиваме дека $\overline{AO}=\overline{BO}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$. Сега од (4) следува

$\overline{AB}\cdot\overline{CO}=\overline{AO}(\overline{AC}+\overline{CB})=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}(\overline{AC}+\overline{CB})=m\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$, т.е. $\overline{CO}=\frac{m}{\sqrt{2}}$. ■

Задача 4. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ се допира до страните AC и

BC, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, во точките P и Q, соодветно, а припишаните кружници кон AC и BC се допираат до AB во точките M и N, соодветно. Ако точките M, N, P и Q лежат на една кружница, определи го $\measuredangle ACB$.



Решение. Симетралата на AB и симетралата на $\measuredangle ACB$ се сечат во средината D на лакот AB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Бидејќи

$$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{CQ} = p - c$$

условот на задачата е еквивалентен на $\overline{DM} = \overline{DP}$. Ако ги одземеме равенствата

$$\overline{DP}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CP}^2 - 2\overline{DC} \cdot \overline{CP} \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{DA} \cdot \overline{AM} \cos\frac{\gamma}{2}$$

добиваме

$$\overline{DC} - \overline{DA} = 2(p-c)\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Од теоремата на Птоломеј имаме $\overline{DC} = \frac{(a+b)\overline{DA}}{c}$. Бидејќи $c = 2\overline{DA}\cos\frac{\gamma}{2}$, заклучуваме $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = 90^\circ$. ■

Во следната теорема, со помош на комплексни броеви ќе го докажеме познатото неравенство на Птоломеј.

Теорема 2 (неравенство на Птоломеј). За произволни точки A, B, C, D во рамнината точно е неравенството

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \quad (5)$$

Доказ. Нека a, b, c, d се комплексните броеви придружени во комплексната рамнина на точките A, B, C, D соодветно. Тогаш

$$(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) = (a-c)(b-d).$$

Од неравенството на триаголник за комплексни броеви го добиваме неравенството

$$|(a-b)(c-d)| + |(b-c)(a-d)| \geq |(a-c)(b-d)|,$$

т.е. неравенството

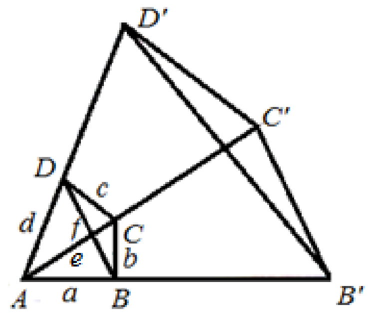
$$|a-b| \cdot |c-d| + |b-c| \cdot |a-d| \geq |a-c| \cdot |b-d|,$$

кое всушност е неравенството (5) запишано со помош на комплексните броеви придружени на точките A, B, C, D. ■

Во случај кога точките A, B, C и D се темиња на конвексен четириаголник ќе презентираме друга доказ на неравенството на Птоломеј.

Теорема 2' (неравенство на Птоломеј). Ако точките A, B, C и D се темиња на конвексен четириаголник, тогаш точно е неравенството (5). Знак за равенство важи ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

Доказ. Нека е даден четириаголникот $ABCD$ (цртеж десно). На полуправите AB, AC и AD соодветно избираме точки B', C и D' такви што



$\overline{AB}\cdot\overline{AB'}=1, \overline{AC}\cdot\overline{AC'}=1$ и $\overline{AD}\cdot\overline{AD'}=1$.

Според тоа, $\overline{AB}\cdot\overline{AB'}=\overline{AC}\cdot\overline{AC'}$, односно $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB'}:\overline{AC'}$. Но, триаголниците ABC и $AB'C'$ имаат заеднички агол во темето A, па од последното равенство следува дека тие се слични. На потполно ист начин заклучуваме дека и триаголниците ADC и $AC'D'$ се слични. Затоа $\measuredangle ABC=\measuredangle AC'B'$ и $\overline{AC}:\overline{AB'}=\overline{BC}:\overline{C'B'}$. При ознаките на цртежот од последната пропорција и од $\overline{AB'}=\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{a}$ следува $\overline{C'B'}=\frac{b}{ae}$. На потполно аналоген начин докажуваме дека $\overline{C'D'}=\frac{c}{de}$ и $\overline{D'B'}=\frac{f}{ad}$. Конечно, од претходните три равенства и нареванството на триаголник применето за точките B', C' и D' добиваме $\overline{B'D'}\le\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$, т.е. $\frac{f}{ad}\le\frac{b}{ae}+\frac{c}{de}$, од каде следува $ef\le ac+bd$, т.е. точно е неравенството (5).

Јасно, ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен, тогаш од теоремата на Птоломеј следува дека во (5) важи знак за равенство.

Обратно, нека во (5) важи знак за равенство. Тоа значи дека за точките B', C' и D' важи $\overline{B'D'}=\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$, т.е. тие се колинеарни. Според тоа,

$$180^\circ=\measuredangle B'C'A+\measuredangle D'C'A=\measuredangle ADC+\measuredangle ABC,$$

од што следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. ■

На крајот ви предлагаме самостојно да ја решите обратната задача на задача 1.

Даден е рамностран триаголник ABC и точка M таква што четириаголникот $ABMC$ е конвексен. Ако $\overline{MA}=\overline{MB}+\overline{MC}$, докажи дека точката M припаѓа на опишаната круница околу триаголникот ABC.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ