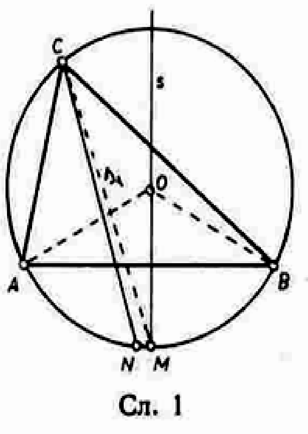
Војислав Андрић (Ваљево)

О ЈЕДНОЈ ТЕОРЕМИ И НЕКИМ ЊЕНИМ ПРИМЕНАМА

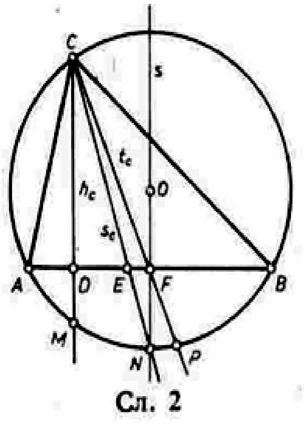
Веома често решавање појединих математичких проблема подразумева познавање неких мање познатих чињеница. У овом тексту ће бити формулисана и доказана једна таква теорема и решено неколико задатака у којима је подесно да се она примени.

Теорема. У сваком троуглу симетрала унутрашњег угла и симетрала странице наспрам тог угла секу се у тачки која припада кружној линији описаној око тог троугла.

Доказ. Нека је у $\triangle ABC$ тачка O центар кружне линије k описане око троугла и нека су праве s и s_1 симетрала странице AB и симетрала угла γ. Нека права s сече кружну линију k у тачки M а права s_1 у тачки N (сл. 1). Тада је $\sphericalangle ACN=\sphericalangle BCN=\frac{\gamma}{2}$ јер је CN симетрала угла γ. Угао $\sphericalangle AOB=2\gamma$ као централни угао угла $\sphericalangle ACB$, па је $\sphericalangle BOM$ једнак γ, јер је s симетрала угла $\sphericalangle AOB$. Због тога је $\sphericalangle BCM=\frac{1}{2}\sphericalangle BOM=\frac{\gamma}{2}$ као периферијски угао над луком BM. Како је $\sphericalangle BCM=\sphericalangle BCN=\frac{\gamma}{2}$, то се краци CM и CN поклапају, па је и $M\equiv N$, односно $k\cap s\cap s_1=\{M\}$.



Сл. 1



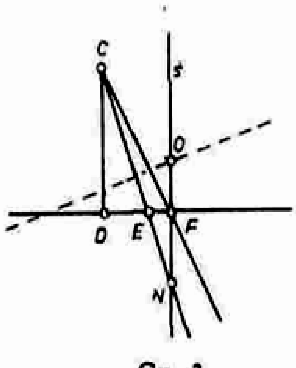
Сл. 2

У циљу бољег споразумевања и краћег записивања са h_c, s_c, t_c означимо дужине висине CD, симетрале угла CE и тежишне дужи CF из темена C, где су D, E, F други крајеви одговарајућих дужи (сл. 2). Нека праве одређене висином, симетралом угла и тежином дужи из темена C секу кружну линију описану око троугла ABC у тачкама M, N, P. Са O смо означили центар те кружне линије а са s симетралу дужи AB.

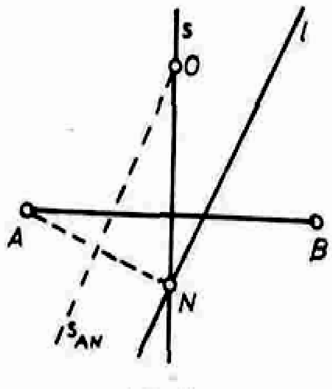
Пример 1. Дате су дужи h_c, s_c, t_c ($h_c \leq s_c \leq t_c$). Конструисати $\triangle ABC$.

Очигледно је да, ако знамо дужине h_c, s_c и t_c, онда лако можемо конструисати правоугле троуглове CDE и CDF. Како је F други крај тежишне дужи, F је средина дужи AB, па је симетрала s дужи AB нормална на EF и пролази кроз F. Како се s и права CE секу на кружној линији описаној око троугла (тачка N), то је CN једна од тетива те кружне линије. Центар O кружне линије описане око троугла добијамо сада у пресеку симетрале тетиве CN и симетрале s (сл. 3).

Задатак има јединствено решење ако је $h_c < s_c < t_c$. Колико решења се добија ако је $h_c = s_c = t_c$?



Сл. 3



Сл. 4

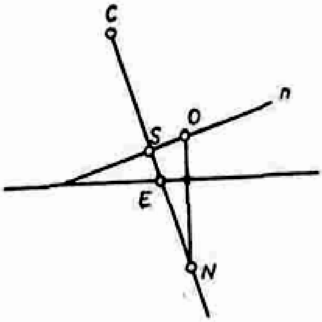
Пример 2. Дате тачке A и B су темена троугла ABC а дата права l је симетрала угла γ тог троугла. Конструисати $\triangle ABC$.

Ако имамо темена A и B, имамо и дуж AB, па лако добијамо симетралу s дужи AB. Како се s и l секу у тачки N на кружној линији описаној око троугла ABC, непосредно налазимо центар O те кружне линије, јер је $\{0\} = s \cap s_{AN}$. Конструкцијом кружне линије k добијамо троугао ABC јер је $\{C\} = k \cap l$ (сл. 4).

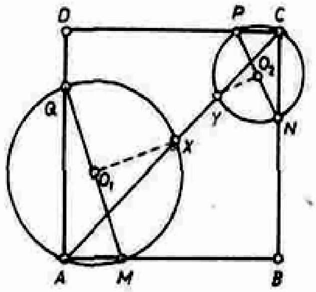
Пример 3. Дате су тачке C, O, E. Реконструисати троугао ABC.

Очигледно је да дуж CE представља само један део тетиве CN. Како је O центар кружне линије описане око троугла, то права n — симетрала тетиве CN, пролази кроз O, нормална је на CE и сече CE у некој тачки S. Јасно је да је $CS=SN$. Права AB пролази кроз E и нормална је на ON. Темена A и B се лако добијају коришћењем особине $OA=OB=OC=ON$ (сл. 5).

Задатак је могао бити решен и описивањем кружне линије $k(O, OC)$



Сл. 5



Сл. 6

Пример 4. Дате тачке M,N,P,Q припадају страницама AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Конструисати квадрат $ABCD$.

Дијагонала AC је симетрала угла MAQ и симетрала угла NCP. Симетрала дужи MQ и симетрала дужи NP секу кружне линије описане око троугла AMQ односно око троугла CNP у тачкама X и Y које припадају симетрали AC (сл. 6).

Конструкција. Над дужима MQ и NP као пречницима конструишемо кружне линије $k_1(O_1, O_1Q)$ и $k_2(O_2, O_2P)$. Права кроз O_1 нормална на MQ сече k_1 у тачки X а права кроз O_2 нормална на NP сече k_2 у тачки Y. Права XY сече кружне линије k_1 и k_2 у тачкама A и C.

Задаци

1. Конструисати троугао ABC ако су дате тачке M,N,P у којима висина h_c, симетрала угла γ и тежишна дуж t_c секу кружну линију описану око троугла ABC.

2. Дате су тачке C, M и O. Конструисати тругао ABC, ако је C теме, M тачка у којој симетрала угла γ сече кружну линију описану око троугла и O је центар те кружне линије.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија