

ЈЕДНА КОРИСНА ЛЕМА

**Филип Морић, Пале,
Мирослав Тремљ, Бања Лука**

У овом чланку представимо један метод за доказивање неједнакости који може бити користан у одређеним ситуацијама. Метод је заснован на једноставној лемџ. За разумевање леме потребно је основно знање диференцијалног рачуна функција више променљивих (појам парцијалних извода). Као што ће ускоро бити јасно, метод најчешће функционише код полиномних неједнакости у којима су променљиве ненегативне. Кренимо од леме.

Лема 1. Нека је $f : [0, +\infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$ функција таква да је $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ кад год је бар један од бројева $x_1, \dots, x_n$ једнак 0. Ако је за све $x_1, \dots, x_n \geq 0$, тада је $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ за све $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Доказ. Нека је $(x_1, \dots, x_n) \in (0, +\infty)^n$ произвољна тачка. Посматрајмо функцију $\varphi(t) = f(x_1 - t, \dots, x_n - t)$. Имамо да је $\varphi(0) = f(x_1, \dots, x_n)$. Нека је $s = \min(x_1, \dots, x_n)$. Тада је $\varphi(s) \geq 0$, јер је у n -торки $(x_1 - s, \dots, x_n - s)$ бар једна координата једнака 0. Такође,

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x_1} - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n} \leq 0,$$

па је φ опадајућа функција. Зато је $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(0) \geq \varphi(s) \geq 0$. $\square$

Дати услов значи да је извод функције у правцу вектора $(-1, -1, \dots, -1)$ негативан, а крећући се по том правцу можемо из било које унутрашње тачке доћи до тачке код које је бар једна координата једнака 0. При том кретању вредност функције се није повећала. Како примењујемо лему? Да бисмо доказали неједнакост облика $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ уз услов $x_1, \dots, x_n \geq 0$, довољно је урадити две ствари.

1. Проверити да неједнакост важи у случају да је нека променљива једнака 0 (другим речима, проверавамо да неједнакост важи на граници задате области).
2. Проверити да је сума парцијалних извода функције f по свим променљивим ненегативна.

Други услов не мора увек бити испуњен и метод функционише у случају да је тај услов испуњен и да смо ми у стању то да докажемо. Ако је функција f полином, тада се други услов своди на полиномну неједнакост мањег степена од полазне неједнакости, па се проблем поједностављује или се чак своди на исту неједнакост само мањег степена (у том случају примењујемо индукцију). Погледајмо како то све изгледа на примерима.

Пример 1. Доказати да за ненегативне бројеве a, b, c, d важи неједнакост

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(abc + bcd + cda + dab) \geq (a + b + c + d)^3.$$

Решење. Прво проверимо да неједнакост важи ако је нека променљива једнака 0. Због симетричности можемо узети $d = 0$. Треба доказати неједнакост

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a + b + c)^3.$$

Та неједнакост се своди на

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2,$$

што је позната Шурова неједнакост.

Сад проверимо други услов. Неједнакост коју треба доказати је

$$12(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 30(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 12(a + b + c + d)^2,$$

што се своди на очигледну неједнакост

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 0.$$

Овим је доказана дата неједнакост.

Следећи пример је нешто сложенији. Користећи изложени метод доказујемо познату Мјурхедову теорему (за случај целобројних експонената). О Мјурхедовој теорему види нпр. у књизи КАДЕЛБУРГ, ЂУКИЋ, ЛУКИЋ, МАТИЋ, *Неједнакости*, коју је издало Друштво математичара Србије, у Београду 2003. године (стр. 86).

Напомене.

1. Ако су $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ два низа реалних бројева, онда је $a \succ b$ уколико су задовољена следећа три услова:

1° $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$;

2° $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k$, за свако $k, 1 \leq k < n$;

3° $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

2. За фиксиран низ ненегативних експонената $(a_1, \dots, a_n)$ и n ненегативних реалних променљивих $(x_1, \dots, x_n)$, са $T_{(a_1, \dots, a_n)}(x_1, \dots, x_n)$ означавамо суму $n!$ сабирака облика $x_{\pi(1)}^{a_1} \cdot x_{\pi(2)}^{a_2} \cdot \dots \cdot x_{\pi(n)}^{a_n}$, при чему је π пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$.

Пример 2. Дате су n -торке ненегативних целих бројева $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$, такве да $a \succ b$. Тада је

$$T_{(a_1, \dots, a_n)}(x_1, \dots, x_n) \geq T_{(b_1, \dots, b_n)}(x_1, \dots, x_n)$$

за све $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Решење. Тврђење доказујемо индукцијом по $a_1 + \dots + a_n + n$. База индукције се лако проверава. Претпоставимо да је тврђење тачно за све случајеве кад је $a_1 + \dots + a_n + n < N$ и докажимо неједнакост у случају $a_1 + \dots + a_n + n = N$. Доказ изводимо применом наше леме. Прво треба проверити неједнакост кад је нпр. $x_n = 0$ (то је довољно због симетричности). Ако је $b_n > 0$ десна страна неједнакости постаје 0 кад се уврсти $x_n = 0$, па нема шта да се доказује. Нека је $b_n = 0$. Тада је и $a_n = 0$. Неједнакост се своди на

$$T_{(a_1, \dots, a_{n-1})}(x_1, \dots, x_{n-1}) \geq T_{(b_1, \dots, b_{n-1})}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

што је тачно на основу индуктивне претпоставке, јер је $a_1 + \dots + a_{n-1} + (n-1) < N$.

Други услов је мало незгоднији за проверу, али ми ћемо прескочити техничке детаље. Налажењем парцијалних извода добијамо да треба доказати неједнакост

$$\begin{aligned} & a_1 T_{(a_1-1, \dots, a_n)} + a_2 T_{(a_1, a_2-1, \dots, a_n)} + \dots + a_k T_{(a_1, \dots, a_k-1, \dots, a_n)} \\ & \geq b_1 T_{(b_1-1, \dots, b_n)} + b_2 T_{(b_1, b_2-1, \dots, b_n)} + \dots + b_\ell T_{(b_1, \dots, b_\ell-1, \dots, b_n)}, \end{aligned}$$

при чему су k и ℓ максимални индекси такви да је $a_k > 0$ и $b_\ell > 0$ (приметимо да n -торке у овом запису нису обавезно уређене). По дефиницији мајорације може се доказати да за $i \leq j$ и $a_1 + \dots + a_i \geq b_1 + \dots + b_j$ важи

$$(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n)^* \succ (b_1, \dots, b_j - 1, \dots, b_n)^*$$

(знак $*$ означава да одговарајуће n -торке треба уредити у опадајућем редоследу). Користећи то заједно са индуктивном претпоставком добијамо да добијена неједнакост заиста важи.

Доказаћемо још једну „тешку“ неједнакост. То је Шуранијева неједнакост, која представља генерализацију Шурове неједнакости.

Пример 3. Ако је $x_1, \dots, x_n \geq 0$, доказати да је

$$(n-1)(x_1^n + \dots + x_n^n) + nx_1 \dots x_n \geq (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}).$$

Решење. Ову неједнакост такође доказујемо индукцијом по n . База се лако проверава. Остaje нам индуктивни корак. Под претпоставком да је тачна неједнакост за $n-1$ променљивих треба да докажемо неједнакост за n променљивих. Наравно, користимо лему. Прво ставимо $x_n = 0$. Добијена неједнакост се своди на специјалан случај Мјурхедове теореме, јер $(n, 0, \dots, 0) \succ (n-1, 1, 0, \dots, 0)$. Сад рачунамо парцијалне изводе. Остaje да се докаже

$$(n^2 - 3n + 1)(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) + n \sum x_1 \dots x_{n-1} \geq (n-1) \sum x_1^{n-2} x_2.$$

Довољно је доказати неједнакост за $n-1$ променљивих

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n-1}(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) + nx_1 \dots x_{n-1} \geq \frac{n-1}{n-2} \sum x_1^{n-2} x_2,$$

јер се сабирањем n таквих неједнакости (за све варијанте променљивих) добија жељена неједнакост. Сад примењујемо индуктивну претпоставку и добијамо да је

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 - 3n + 1}{n-1}(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) + nx_1 \dots x_{n-1} \\ & \geq \frac{n^2 - 3n + 1}{n-1}(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) + \\ & + \frac{n}{n-1}((x_1 + \dots + x_{n-1})(x_1^{n-2} + \dots + x_{n-1}^{n-2}) - (n-2)(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1})) \\ & = \frac{1}{n-1}(x_1^{n-1} + \dots + x_{n-1}^{n-1}) + \frac{n}{n-1} \sum x_1^{n-2} x_2 \geq \\ & \geq \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-2} \sum x_1^{n-2} x_2 + \frac{n}{n-1} \sum x_1^{n-2} x_2 \\ & = \frac{n-1}{n-2} \sum x_1^{n-2} x_2, \end{aligned}$$

при чему смо поново користили Мјурхедову теорему. Неједнакост је доказана.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

1. Доказати да за $a, b, c \geq 0$ важи

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2.$$

2. Можете ли изменити лему, тако да уместо вектора $(-1, \dots, -1)$ буде неки други вектор?

3. Доказати да за $a, b, c \geq 0$ важи

$$4(a + b + c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).$$

Упутство. Можда је потребно променити вектор?

4. (Заими, Марку, 2006.) Доказати следећу генерализацију Шуранијеве неједнакости: за произвољне $x_1, \dots, x_n \geq 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ важи

$$(n-1)(x_1^{n+k} + \dots + x_n^{n+k}) + x_1 \dots x_n (x_1^k + \dots + x_n^k) \geq (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{n+k-1} + \dots + x_n^{n+k-1}).$$

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 2007/08 година**