**Сојузен натпревар 1990**

**I година**

**1.** Нека $n$ е природен број. Докажи го равенството

$$(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2+(\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n})^2=(\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5)^2 .$$

**Решение.** Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2=\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5+\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n},$$

т.е. на равенството

$$(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}0\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 .$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{n-1}0\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9&=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\cdot10^{n+1}+80\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n-1}+9\\&=\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot10^{n+1}+\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot80+9\\&=\frac{10^{2n}-2\cdot10^{n}+1}{9}=\left(\frac{10^{n}-1}{3}\right)^2\\&=(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2.\end{aligned}$$

**2.** Даден е остроаголен триаголник $ABC$ со $\measuredangle ACB=60^\circ$. Докажи дека центарот на опишаната кружнца околу тој триаголник припаѓа на симетралата на еден од аглите кои ги формираат висините повлечени од темињата $A$ и $B$.

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle AHB=\measuredangle B'HA'&=120^\circ\\&=2\measuredangle ACB=\measuredangle AOB,\end{aligned}$$

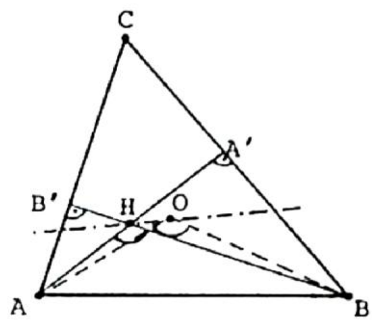
па затоа четириаголникот $ABOH$ е тетивен. Оттука следува

$$\measuredangle OHB=\measuredangle OAB=30^\circ .$$

Но,

$$\measuredangle A'HB=\measuredangle ACB=60^\circ ,$$

па затоа правата $OH$ е симетрала на $\measuredangle A'HB$.




**3.** Нека $a_1<a_2<\ldots<a_n$ се дадени реални броеви. Ако

$$f:\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\to\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

е биекција таква што

$$a_1+f(a_1)<a_2+f(a_2)<\ldots<a_n+f(a_n),$$

тогаш $f$ е идентичното пресликување. Докажи!

**Решение.** Нека $f(a_k) = a_1$ и $k > 1$. Тогаш

$$a_1 + f(a_1) < a_2 + f(a_2) < ... < a_k + f(a_k) = a_k + a_1,$$

па затоа мора да важи инклузијата

$$\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{k-1})\} \subseteq \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}.$$

Но, $f(a_k) = a_1$ и бидејќи $f$ е биекција добиваме $f(a_i) \neq a_1$, за $i = 1, 2, ..., k-1$. Значи, важи $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{k-1})\} \subseteq \{a_2, ..., a_{k-1}\}$, што е противречност бидејќи $f$ е биекција. Од добиената противречност следува $f(a_1) = a_1$.

Сега тврдењето на задачата следува ако претходните размислувања ги повториме за множествата $\{a_i, ..., a_n\}, i = 2, 3, ...n$.

**4.** На таблата се запишани броевите 1 и 2. Дозволено е допишување на нови броеви на следниов начин: Ако на таблата се запишани броевите $a$ и $b$, тогаш може да се запише бројот $ab + a + b$. Дали на овој начин може да се добие бројот:

а) 13121, б) 12131.

**Решение.** Воочуваме дека ако $c = a + b + ab$, тогаш $c + 1 = (a+1)(b+1)$. Затоа наместо запишаните броеви на таблата може да ги разгледуваме броевите кои се зголемени за 1. Тогаш секој нов број е производ на некои два броја кои се веќе запишани на таблата. На почетокот ги имаме броевите $2 = 1+1$ и $3 = 2+1$, па затоа сите нови броеви се од видот $2^n \cdot 3^m$, каде $m, n \in \mathbb{N}$. Но,

$$13121 + 1 = 13122 = 2 \cdot 3^8 \quad \text{и}$$

$$12131 + 1 = 12132 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337,$$

што значи дека бројот 13121може да се добие на опишанио начин, а додека бројот 12131 не може да се добие на опишаниот начин.

**II година**

**1.** Определи ги сите парови различни природни броеви $(x, y)$ такви што со замена на местата на последните две цифри на бројот $x^2$ се добива бројот $y^2$.

**Решение.** Да забележиме дека ако парот $(x, y)$ го задоволува условот на здачата, тогаш и парот $(y, x)$ го задоволува условот на здачата. Затоа доволно е да ги определиме паровите $(x, y)$ за кои важи $x > y$.

Нека

$$x^2 = \overline{a_1 a_2 ... a_k pq} \text{ и } y^2 = \overline{a_1 a_2 ... a_k qp}.$$

Тогаш

$$x^2 - y^2 = 9(p - q).$$

Ќе докажеме дека $d = p-q$ не може да е ниту еден од броевите 9, 8, 7 и 6.

а) Ако $d=9$, тогаш $p=9$ и $q=0$, што не е можно бидејќи бројот $x^2$ не може да има двоцифрен завршеток 90.

б) Ако $d=8$, тогаш $(p,q)=(9,1)$ или $(p,q)=(8,0)$. Ова повторно не е можно, бидејќи двоцифрениот завршеток на $x^2$ не може да биде ниту 91, ниту 80.

в) Ако $d=7$, тогаш $(p,q)\in\{(7,0),(8,1),(9,2)\}$, што повторно не е можно бидејќи двоцифрениот завршеток на $x^2$ не може да биде ниту 92, ниту 81, ниту 70.

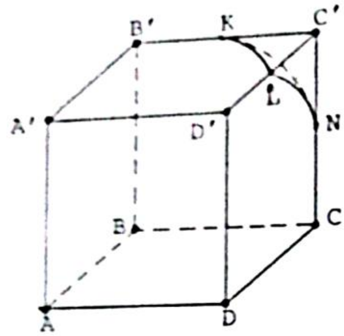
г) Ако $d=6$, тогаш $(p,q)\in\{(6,0),(7,1),(8,2),(9,3)\}$, што од исти причини како погоре не е можно.

Значи, $d\le 5$. Од ова пак следува

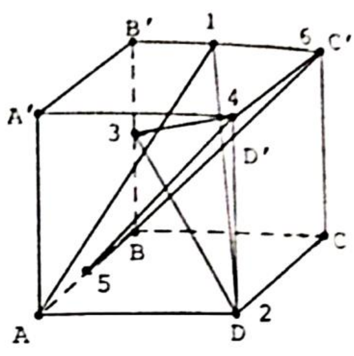
$$2y+1\le x+y\le (x-y)(x+y)=9d\le 45,$$

од каде следува $y\le 22$. Со проверка на сите вредности за $y$ од 1 до 22, лесно се проверува дека $y=13$ или $y=14$, т.е. бараните парови се $(13,14)$ и $(14,13)$.

**2.** Искршената линија, на која секој сегмент има должина 3 и чии темиња припаѓаат на ѕидовие на коцка со раб 2, поврзува две најоддалечени темиња на таа коцка. Кој е најмалиот број сегменти што може да ги има таквата искршена линија?



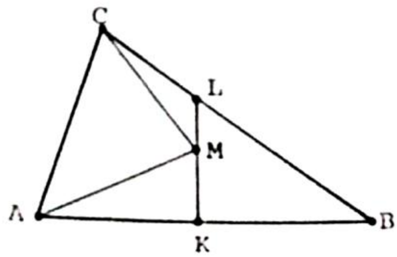

**Решение.** Нека искршената линија почнува во темето $A$ и завршува во темето $C'$. Сферата со радус 3 и центар во $A$ ја сече површината на коцката во три лаци: $KL, LN, NK$, каде $K, L, N$ се средините на рабовите $B'C', C'D', C'C$, соодветно, цртеж десно. Тоа значи дека следното теме $M$ на искршената линија лежи на еден од овие лаци. Ако точката $M$ не се поклопува со ниту една од точките $K, L, N$, тогаш сферата со радиус 3 и центар $M$ минува низ точката $A$ и преостанатите точки од коцката ги содржи во својата внатрешност. Затоа искршената линија минува низ една од точките $K, L, N$. Нека тоа е точката $K$. Сега единствен сегмент со должина 3 се добива ако искршената линија минува низ темето $D$ (Зошто?). Продолжувајќи ја постапката добиваме дека искршената линија од $A$ до $C'$ мора да содржи најмалку шест сегменти. Една таква искршена линија е прикажана на цртежот лево.



**3.** Даден е триаголник $ABC$. Нека $K$ е точка од отсечката $AB$, $L$ е точка од отсечката $BC$, а $M$ точка од отсечката $KL$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{P_{ABC}} \geq \sqrt[3]{P_{AKM}} + \sqrt[3]{P_{MLC}} .$$

**Решение.** Имаме:




$$\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}} = \frac{P_{AKM}}{P_{AKL}} \cdot \frac{P_{AKL}}{P_{ABL}} \cdot \frac{P_{ABL}}{P_{ABC}} = \frac{KM}{KL} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BL}{BC} ,$$

па затоа

$$\sqrt[3]{\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{KM}{KL} + \frac{AK}{AB} + \frac{BL}{BC}\right) .$$

Аналогно се докажува дека

$$\sqrt[3]{\frac{P_{MLC}}{P_{ABC}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{ML}{KL} + \frac{KB}{AB} + \frac{LC}{BC}\right) .$$

Ако ги собереме последните две равенства и помножиме со $\sqrt[3]{P_{ABC}}$, го добиваме бараното неравенство.

**4.** Еден цар сака да изгради дворец во кој ќе има 1990 соби на едно ниво и таков што ќе важат следниве услови:

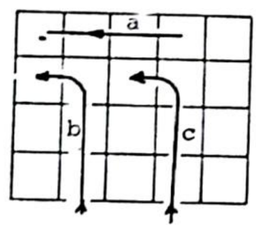
($i$) бројот на вратите на секоја соба е 0, 1 или 2,

($ii$) меѓу две соби има најмногу една врата; од секоја соба на улица води најмногу една врата,

($iii$) бројот на соби со врата на улица е 19, а бројот на соби со точно една врата е 90.

Дали е можно да се изгради ваков дворец?

**Решение.** Да претпоставиме дека таков дворец постои. Имаме три типа на максимални вериги кои ги поврзуваат собите и тоа:




a) се тргнува од соба и се завршува во соба,

b) се тргнува од улица и се излегува на улица,

c) се тргнува од улица и се завршува во соба.

Со отфрлање на сите вериги од типот a) бројот на соби со една врата ќе се промени за парен број и значи ќе биде повторно парен број, а бројот на врати према улица ќе остане 19. Потоа, со отфрлање на сите вериги од типот b) бројот на соби со една врата останува непроменет, па тој ќе биде парен број, а бројот на врати према улица ќе се промени за парен број, што значи дека ќе остане непарен број. Сега остануваат само вериги од типот c) и затоа бројот на соби со една врата ќе се совпадне со бројот на врати према улица, што не е можно бидејќи едниот број е парен, а другиот број е непарен.

Конечно, од добиената противречност следува дека не може да се изгради дворец кој ќе ги задоволува условите кои ги бара царот.

**III и IV година**

**1.** Квадар со димензии $m\times n\times p$ ($m,n,p$ се природни броеви) е составен од $mnp$ единични коцки. На секој единична коцка е придружен еден реален број. За секој квадрат со димензии $m\times1\times1$ или $1\times n\times1$ или $1\times1\times p$, составен од единичните коцки важи: броевите придружени на единичните коцки од овие квадари, земени по ред, формираа аритметичка прогресија. Збирот на броевите придружени на коцките кои се во темињата на почетниот квадар е еднаков на $a$. Определи го збирот на сите броеви кои се придружени на единичните коцки.

**Решение.** Прво да ги разгледаме броевите придружени на долниот слој на квадарот. Тие се:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

За збирот на броевите од $i-$тата редица важи

$$A_i=\tfrac{n}{2}(a_{i1}^{(1)}+a_{in}^{(1)}),$$

а за збирот на сите бреови во долниот слој имаме:

$$\begin{aligned} N_1=\sum_{i=1}^{m}A_i&=\tfrac{n}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{21}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{2n}^{(1)}+\dots+a_{mn}^{(1)}) \\ &=\tfrac{n}{2}\cdot\tfrac{m}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{mn}^{(1)}). \end{aligned}$$

Аналогно, за збирот на броевите придружени на $k-$тиот слој се добива

$$N_1=\tfrac{n}{2}\cdot\tfrac{m}{2}(a_{11}^{(k)}+a_{m1}^{(k)}+a_{1n}^{(k)}+a_{mn}^{(k)}),$$

а за збирот на сите броеви придружени на квадарот се добива

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p}N_i&=\tfrac{mn}{4}(a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)}+\dots+a_{11}^{(p)}+a_{m1}^{(1)}+a_{m1}^{(2)}+\dots+a_{m1}^{(p)}+ \\ &\quad+a_{1n}^{(1)}+a_{1n}^{(2)}+\dots+a_{1n}^{(p)}+a_{mn}^{(1)}+a_{mn}^{(2)}+\dots+a_{mn}^{(p)}) \\ &=\frac{mnp}{8}(a_{11}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{mn}^{(1)}+a_{11}^{(p)}+a_{m1}^{(p)}+a_{1n}^{(p)}+a_{mn}^{(p)}) \\ &=\frac{mnpa}{8}. \end{aligned}$$

**2.** Нека $x_0=1990$ и $x_n=-\frac{1990}{n}(x_0+x_1+\dots+x_{n-1})$, за $n\geq1$. Пресметај го збирот

$$x_0+2x_1+2^2x_2+\dots+2^{1990}x_{1990}.$$

**Решение.** Од

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} = -\tfrac{n}{1990} x_n ,$$

прво за $n = k$ , а потоа за $n = k-1$ добиваме

$$\begin{aligned} x_k &= -\tfrac{1990}{k}(x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-2} + x_{k-1}) = -\tfrac{1990}{k}(-\tfrac{1990}{k-1} x_{k-1} + x_{k-1}) \\ &= -\tfrac{1990-k+1}{k} x_{k-1} = \ldots = (-1)^k \tbinom{1990}{k} x_0. \end{aligned}$$

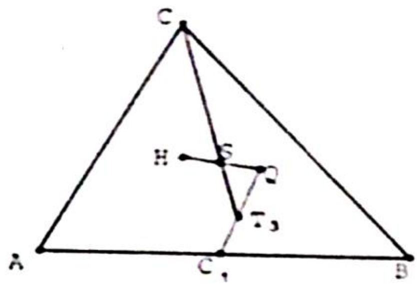
Според тоа,

$$\sum_{k=0}^{1990} 2^k x_k = x_0 \sum_{k=0}^{1990} 2^k (-1)^k \tbinom{1990}{k} = (1-2)^{1990} x_0 = x_0 = 1990 .$$

**3.** Нека $S$ е центарот на опишаната кружница, а $H$ е ортоцентарот на триагоникот $ABC$. Понатаму, нека $Q$ е точка таква што $S$ е средина на отсечката $HQ$ и нека $T_1, T_2$ и $T_3$ се тежиштата на триаголниците $BCQ, CAQ$ и $ABQ$, соодветно. Докажи дека

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = \tfrac{4}{3} R ,$$

каде што $R$ е радусот на опишаната кружниа околу триаголникот $ABC$.




**Решение.** Нека $C_1$ е средината на $AB$. Да ги разгледаме триаголниците $CHT$ и $C_1ST$ каде $T$ е тежиштето на триаголникот $ABC$. Користејќи ја теоремата на Ојлер, според која тежиштето $T$ лежи на отсечката $HS$ и притоа важи $HT = 2TS$ , и користејќи дека $C_1S \parallel CH$ добиваме $\overrightarrow{SC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ . Тогаш

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CT_3} &= \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QT_3} = \overrightarrow{CQ} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{QC_1} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SQ} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{QC_1} \\ &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{HS} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{QC_1} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{HS} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SC_1}) \\ &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{HS} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{QS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH}) = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{HS} + \tfrac{2}{3}(-\overrightarrow{HS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CH}) \\ &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{HS} + \tfrac{2}{3}(-\overrightarrow{HS} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{HS})) = \tfrac{4}{3}\overrightarrow{CS}. \end{aligned}$$

Значи точките $C, S$ и $T_3$ се колинеарни и притоа важи $CT_3 = \frac{4}{3}CS = \frac{4}{3}R$ . Аналогно се докажува $AT_1 = \frac{4}{3}R$ и $BT_2 = \frac{4}{3}R$ .

**4.** Колку различни бинарни релации постојат во множество од $n$ елементи, кои што не се симетрични и антисиметрични?

(За една бинарна релација велиме дека е антисиметрична ако за кои било два различни елементи $a$ и $b$ за кои $a$ е во релација со $b$ важи дека $b$ не е во релација со $a$ .)

**Решение.** За кои било два елементи $a$ и $b$ од некое множество со $n$ елементи, и релација $\rho$, постојат четири можности:

($i$) $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho$,

($ii$) $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\notin\rho$,

($iii$) $(a,b)\notin\rho$ и $(b,a)\in\rho$,

($iv$) $(a,b)\notin\rho$ и $(b,a)\notin\rho$.

Тогаш бројот на сите бинарни релации е еднаков на $2^n\cdot 4^{\binom{n}{2}}$, каде множителот $2^n$ се јавува заради паровите со еднакви компоненти. Антисиметрични релации има $2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}$, бидејќи од четирите можности не е дозволена само првата. Симетрични релации има $2^n\cdot 2^{\binom{n}{2}}$, бидејќи во овој случај не се дозволени две од четирите можности и тоа втората и третата. Релации што се и симетрични и антисиметрични има $2^n$. Конечно, од принципот на вклучување и исклучување следува дека бараниот број е

$$2^n\cdot 4^{\binom{n}{2}}-2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}-2^n\cdot 2^{\binom{n}{2}}+2^n=2^n\cdot(4^{\binom{n}{2}}-3^{\binom{n}{2}}-2^{\binom{n}{2}}+1).$$