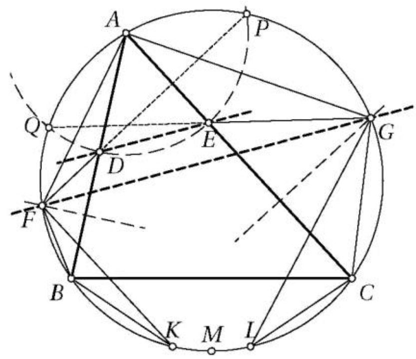
LIX олимпијада

1. Нека Γ е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC. Точките D и E се наоѓаат на отсечките AB и AC, соодветно, така што важи $\overline{AD} = \overline{AE}$. Симетралите на отсечките BD и CE ги сечат пократките лаци AB и AC на кружницата Γ во точките F и G, соодветно. Докажи дека правите DE и FG се паралелни (или се совпаѓаат).

Решение. *Прв начин.* Да ги разгледаме точките K и L на кружницата Γ такви што $\measuredangle FBK = \measuredangle FDA$ и $\measuredangle GCL = \measuredangle GEA$. Бидејќи $\overline{FB} = \overline{FD}$ и $\measuredangle FKB = \measuredangle FDA$ важи $\triangle FBK \cong \triangle FDA$. Аналогно важи $\triangle GCL \cong \triangle GEA$. Според тоа, $\overline{FK} = \overline{FA}$ и $\overline{GL} = \overline{GA}$, а исто така и $\overline{KB} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{LC}$, од каде следува $KL \parallel BC$. Ако сега M е средина на пократкиот лак BC, тогаш важи



$$MG + AF = ML + LG + FK = KM + GA + FK = FM + GA,$$

од каде следува $AF \perp FG$. Бидејќи $AM \perp DE$, добиваме $DE \parallel FG$.

Втор начин. Нека правите FD и GE по втор пат ја сечат кружницата Γ во точките P и Q, соодветно. Од сличностите $\triangle DAP \sim \triangle DFB$ и $\triangle EAQ \sim \triangle EGC$ следува $\overline{AP} = \overline{AD} = \overline{AE} = \overline{AQ}$, што значи дека точките P, D, E, Q се конциклични. Сега $\measuredangle QGF = \measuredangle QPF = \measuredangle QPD = \measuredangle QED$, т.е. $FG \parallel DE$.

2. Определи ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постојат реални броеви $a_1, ..., a_{n+2}$ такви што $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ и

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Решение. *Прв начин.* Индексите ги разгледуваме по модул n. Од условот на задачата следува $a_{i+2}^2 = a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2}$, па со собирање по $i = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_{i+1} a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+3}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(a_i^2 + a_{i+3}^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

при што значк за равенство важи ако и само ако $a_i = a_{i+3}$.

Бидејќи не се сите членови на низата еднакви (во спротивно ќе важи $a_1 = a_1^2 + 1$, што не е можно), следува дека $3 \mid n$. Од друга страна, ако $3 \mid n$, низата

$$a_{3i-2} = a_{3i-1} = -1,\ a_{3i} = 2, \text{ за } i = 1, 2, ..., \tfrac{n}{3} - 1$$

ги задоволува условите на задачата.

Втор начин. Индексите ги разгледуваме по модул n. Во низата не може да постојат два последователни ненегативни членови. Навистина, ако на пример $a_1, a_2 > 0$, тогаш $a_3, a_4 \geq 1$ и понатаму $a_4 < a_5 < a_6 < ...$ што не е можно.

Да претпоставиме дека постојат два последователни негативни членови, на пример $a_1, a_2 < 0$. Тогаш $a_3 > 1$, па затоа $a_4 < 0$ и $a_5 = a_3 a_4 + 1 < 1$. Ако $a_5 \geq 0$, тогаш $a_6 = a_4 a_5 + 1 \geq a_4 a_3 + 1 = a_5$, односно $a_6 \geq 0$, што не е можно. Значи, $a_5 < 0$. Со индукција се докажува дека $a_{3k} > 0 > a_{3k+1}, a_{3k+2}$, за секој $k \in \mathbb{N}$, па затоа $3 \mid n$.

Останува случајот кога знакот наизменично се менува: $a_{2i+1} > 0 > a_{2i+2}$, за секој i. Тогаш $a_{2k+1} = a_{2k} a_{2k-1} + 1 < 1$, па е $a_{2k+2} = a_{2k} a_{2k+1} + 1 \geq a_{2k} + 1$, за секој k, што не е можно.

3. *Антипаскалов* триаголник е таблица во облик на рамностран триаголник која се состои од броеви такви што, освен за броевите во последниот ред, важи да секој број е еднаков на апсолутната вредност на разликата на двата броја кои се непосредно под него. На пример, следната таблица е антипаскалов триаголник со четири реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Дали постои антипаскалов триаголник со 2018 реда кој се состои од сите природни броеви од 1 до $1 + 2 + ... + 2018$?

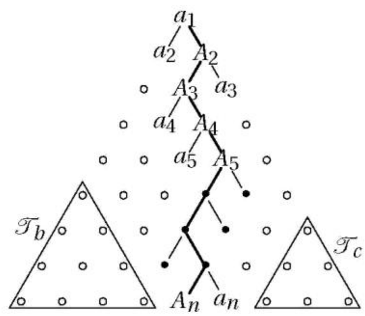
Решение. *Одговор*: НЕ.

Да ставиме $n = 2018$. Нека $a_1 = A_1$ е бројот во горниот ред, а за $i = 2, 3, ..., n$ нека a_i и A_i се броевите непосредно под бројот A_{i-1}, при што $A_i - a_i = A_{i-1}$. Бидејќи

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

следува дека $(a_1, a_2, ..., a_n)$ е пермутација на броевите $1, 2, ..., n$ и $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Да разгледаме два антипаскалови триаголници: F_b, определен со броевите лево од парот (a_n, A_n), F_c, определен со броевите десно од парот (a_n, A_n).



Да забележиме дека во $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ нема броеви помали од $n+1$. Нека триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$ се составени од k и $n-2-k$ редови. На ист начин како и во големиот триаголник, да ги означиме соодветно со $b_1 = B_1$ и $c_1 = C_1$ броевите во горните редови на триаголниците $\mathcal{T}_b$ и $\mathcal{T}_c$, а со b_i и B_i ($2 \le i \le k$), односно c_j и C_j ($2 \le j \le n-2-k$), соодветно паровите броеви непосредно под B_{i-1} и B_{j-1}, при што $B_i - b_i = B_{i-1}$ и $C_j - c_j = C_{j-1}$. Бидејќи $b_i, c_j \ge n+1$, важи

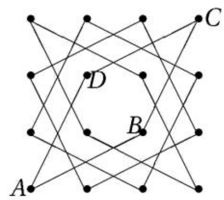
$$n^2+n-3 \ge B_k + C_l = b_1 + \ldots + b_k + c_1 + \ldots + c_l$$
$$\ge (n+1)+(n+2)\ldots+(2n-2) = \tfrac{3n^2-7n+2}{2},$$

што не е точно за $n \ge 9$.

Забелешка. Антипаскалов триаголник составен од сите броеви од 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ не постои ниту за еден $n \ge 6$. За $n=5$ единствениот пример (до симетрија) е прикажан на цртежот десно.

5
4 9
7 11 2
8 1 12 10
6 14 15 3 13

4. *Позиција* е секоја точка (x, y) во рамнината таква што x и y се природни броеви не поголеми од 20.
На почетокот, сите 400 позиции се слободни. Ана и Бојан играат игра во која наизменично повлекуваат потези, при што Ана игра прва. Во секој свој потез Ана поставува нов црвен жетон на слободна позиција така што растојанието меѓу секои две позиции на кои се наоѓаат црвени жетони е различно од $\sqrt{5}$. Во секој свој потез Бојан поставува нов син жетон на некоја слободна позиција. (Позицијата на која се наоѓа син жетон може да биде на било кое растојание од другите позиции на кои се наоѓа некој жетон.) Играта завршува кога некој од играчите не може да повлече потез.
Определи го најголемиот број K така што Ана сигурно може да постави K црвени жетони, без разлика како Бојан ги поставува сините жетони.
Решение. *Одговор*: $K = 100$.



Квадратната решетка 20×20 на која се игра играта може да се подели на 25 подрешетки 4×4, секоја од кои може да се подели на 4 циклуси $ABCDA$ во кои $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \sqrt{5}$. Бојан може да ја спречи Ана во ист циклус да постави повеќе од еден црвен жетон – доволно е а секој нејзин потез да одговори со поставување на свој жетон во спротивната точка на истиот циклус (на пример, ако Ана стави жетон во точката A, Бојан става жетон во точката C). На овој начин Ана не може да постави повеќе од 100 жетони,

Од друга страна, позиции (i, j) во кои i и j се со иста парност има 200 и никои две не се на растојание $\sqrt{5}$. Со поставување на црвени жетони само на вакви позиции Ана ќе успее да постави најмалку 100 жетони.

5. Нека $a_1, a_2, ...$ е бесконечна низа природни броеви. Да претпоставиме дека постои природен број $N > 1$ таков што за секој $n \geq N$ вредноста на изразот

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

е природен број. Докажи дека постои природен број M таков што $a_m = a_{m+1}$ за секој $m \geq M$.

Решение. Ја користиме вообичаената ознака $v_p(a) = k$ ако $k \in \mathbb{Z}$ е степенот на простиот број p во каноничното разложување на рационалниот број a.

Од условот на задачата следува дека $D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}$ е цел број за секој $n \geq N$. За фиксирано n и прост број p да означиме $v_p(a_1) = A, v_p(a_n) = B$ и $v_p(a_{n+1}) = C$. Разликуваме два случаи:

1) $B < A$. Бидејќи $v_p(\frac{a_n}{a_1}) = B - A < 0$, а D_n е цел број, следува дека $B - C = v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}) = B - A$ или $C - A = v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1}) = B - A$, па мора $C \in \{A, B\}$.

2) $B \geq A$. Ако $C > B$ или $C < A$, тогаш $v_p(D_n) = \min\{v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}), v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})\} < 0$ што не е можно. Според тоа, $A \leq C \leq B$.

Во двата случаја имаме $\min\{v_p(a_1), v_p(a_n)\} \leq v_p(a_{n+1}) \leq \max\{v_p(a_1), v_p(a_n)\}$.

Бидејќи ова важи за секој прост број p, следува дека

$$d_n = \text{NZD}(a_1, a_n) \mid a_{n+1} \mid s_n = \text{NZS}(a_1, a_n).$$

Оттука следува

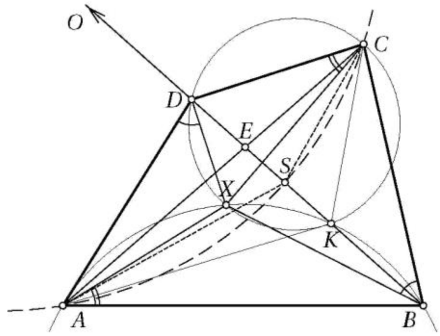
$$d_n \leq d_{n+1} \leq s_{n+1} \leq s_n, \text{ за секој } n \geq N.$$

Според тоа, низите d_n и s_n се константни почнувајќи од некој член, да кажеме $n \geq M$, па тогаш имаме $a_1 a_n = d_n s_n = d_M s_M = a_1 a_M$, т.е. $a_n = a_M$.

6. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA}$. Точката X се наоѓа во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ и важи

$$\measuredangle XAB = \measuredangle XCD \text{ и } \measuredangle XBC = \measuredangle XDA.$$

Докажи дека $\measuredangle BXA + \measuredangle DXC = 180^\circ$.



Решение. *Прв начин*. Со E да го означиме пресекот на дијагоналите AC и BD. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека точката X е во триаголникот ABE. Нека кружниците ABX и CDX по втор пат се сечат во точката K. Од

$$\measuredangle XKD = \measuredangle XCD = \measuredangle XAB$$

$$= 180^\circ - \measuredangle BKX$$

следува K е на правата BD. Уште повеќе, бидејќи X е во внатрешноста на кружниците BDA и BDC (навистина $\measuredangle BXD = \measuredangle BAD + \measuredangle XBA + \measuredangle ADX = \measuredangle BAD + \measuredangle CBA > 180^\circ - \measuredangle DCB$) точката K лежи на отсечката BE.

Симетралите на $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ ја сечат отсечката BD во иста точка S таква што $\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$, при што точките A, S, C лежат на Аполониевата кружница со центар O на правата BD. Ако сега K' е точка на отсечката BE таква што $\measuredangle K'CS = \measuredangle SCE$, тогаш од

$$\measuredangle ASK = 180^\circ - \measuredangle ASO = 90^\circ + \measuredangle ACS$$

следува дека S е центар на впишаната кружница на триаголникот ACK. Оттука $\measuredangle AK'B + \measuredangle CK'D = 180^\circ$. Меѓутоа, бидејќи

$$\measuredangle AKC = \measuredangle AKX + \measuredangle XKC = \measuredangle ABX + 180^\circ - \measuredangle CDX = \measuredangle ABC + 180^\circ - \measuredangle CDA$$
$$= \measuredangle ABC + \measuredangle DAC + \measuredangle ACD = \measuredangle ABC + \measuredangle K'AB + BCK' = \measuredangle AK'C,$$

точките K и K' се совпаѓаат. Значи,

$$\measuredangle AXB + \measuredangle CXD = \measuredangle AKB + \measuredangle CKD = 180^\circ.$$

Втор начин. Во ова решение аглите се ориентирани со пресметувања по модул 180°. Нека F е пресекот на правите AB и CD, G е пресекот на правите AD и BC, а O е центарот на Аполониевата кружница k за точките B и D која минува низ A и C. Од $\measuredangle XAB = \measuredangle XCD$ и $\measuredangle XBC = \measuredangle XDA$ следува дека точката X припаѓа на кружниците ACF и BDG.

При инверзија во однос на кружницата k, точката G се пресликува во точка G', A и C се фиксни, а B и D се пресликуваат една во друга. Според тоа, кружницата BDG се пресликува сама во себе, а точката G' е на неа. Бидејќи

$$\measuredangle AG'C = \measuredangle AG'O + \measuredangle OG'C = \measuredangle OAG + \measuredangle GCO = \measuredangle ABO + \measuredangle ODC = \measuredangle AFC$$

точката G' исто така припаѓа на кружницата AFC. Сега имаме:

$$\measuredangle AXD = \measuredangle AXG' + \measuredangle G'XD = \measuredangle ACG' + \measuredangle G'BD = \measuredangle ACO + \measuredangle OCG' + \measuredangle G'BO$$
$$= \measuredangle ACO + \measuredangle CGO + \measuredangle OGD = \measuredangle ACO + \measuredangle CGA.$$

Слично се добива $\measuredangle CXB = \measuredangle CAO + \measuredangle AGC$, па затоа $\measuredangle AXD + \measuredangle CXB = 180^\circ$.