ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2012/2013.

Београд, 2013.

Организациони одбор 55. Државног такмичења из математике

1. Милибор Саковић, директор Прве економске школе
2. Дејан Недић, директор Друге економске школе
3. Дејан Ковачевић, председник Градске општине Стари град
4. Актив наставника Прве економске школе
5. Актив наставника математике Друге економске школе

Покровитељи 55. Државног такмичења из математике

1. Факултет за инжењерски менаџмент, Београд
2. Градска општина Стари град

Редакција и обрада: Марко Радовановић

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа,
школска година 2012/2013.

1. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд

2. Баралић Ђорђе, Математички институт САНУ, Београд

3. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад

4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад

5. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

6. Ђорић Милош, Математички факултет, Београд

7. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

8. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

9. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд

10. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

11. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

12. Матић др Иван, Дјук, САД

13. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић", Ниш

14. Пејчев Александар, Машински факултет, Београд

15. Петковић др Марко, ПМФ, Ниш

16. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд, председник

17. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

18. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

19. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

20. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица
2. Рожњик мр Андреа, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.01.2013.

Први разред – А категорија

1. Дужина висине AD троугла ABC једнака је половини дужине странице BC. Доказати да угао код темена A датог троугла не може бити туп.

2. Наћи остатак при дељењу полинома $x^{2011}+1$ полиномом $(x+1)^2$.

3. Да ли постоји природан број n такав да декадни запис броја $n!$ има облик

$$n! = \dots 2012\underbrace{0\dots0}_{k},$$

за неки природан број k?

4. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ такав да је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 120^\circ$. Тачке P и Q изабране су тако да су $\triangle ACP$ и $\triangle BDQ$ једнакостранични, и притом тачке P и Q леже у оним полуравнима са ивицама AC и BD у којима нису тачке B и A, редом. Доказати да се праве PQ, AD и BC секу у једној тачки.

5. Колико се највише жетона може поставити на поља табле 7×7 тако да ниједан правоугаоник површине 6 (са страницама дуж страница поља) не садржи више од једног жетона?

Други разред – А категорија

1. На страницама AC и AB једнакостраничног троугла ABC дате су тачке M и N, редом, тако да је $MC : MA = NA : NB = 2 : 1$. Ако је тачка P пресек дужи BM и CN, доказати да је $\sphericalangle APC = 90^\circ$.

2. Да ли постоји број $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ такав да су скупови

$$\{(z-i)^n \mid n\in\mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad \{(z+i)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

коначни?

3. Нека је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задата са $f(x)=x^2+(a+1)x+1$. Одредити све вредности реалног параметра a такве да за све реалне бројеве x важи

$$\left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right| < 3.$$

4. Дат је троугао ABC. Нека је $2r < \min\{AB, BC, CA\}$ и k_A, k_B, k_C кружнице са центрима A, B, C, редом, и полупречником r. На колико различитих начина можемо одабрати тачке $A_1 \in k_A$, $B_1 \in k_B$ и $C_1 \in k_C$

тако да је троугао $A_1B_1C_1$ сличан, али не и подударан, са троуглом ABC?
(Са $\min\{a, b, c\}$ означен је најмањи од реалних бројева a, b, c.)

5. Шаховска фигура, коју зовемо *слон*, у једном потезу помера се за једно поље лево, или за једно поље горе, или за једно или два поља укосо горе лево (под углом од $135°$). Слон се налази на доњем десном пољу шаховске табле димензије 8×7. Два играча наизменично померају слона, а губи онај играч који први не може да одигра потез. Који играч има победничку стратегију?

Трећи разред – А категорија

1. Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_{2011}$ комплексни бројеви модула 1 чији је збир једнак 0, а z произвољан комплексан број. У функцији од z израчунати збир

$$\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2.$$

2. Колико највише реалних нула може имати полином

$$P(x) = (ax^3 + bx + c)(bx^3 + cx + a)(cx^3 + ax + b),$$

где је a, b, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?
(Свака нула рачуна се онолико пута колика је њена вишеструкост.)

3. Нека су $S(n)$ и $P(n)$, редом, збир и производ цифара природног броја n (у декадном запису). За $k \in \mathbb{N}$, одредити број решења једначине

$$\frac{P(n)}{S(n)} = k.$$

4. Дат је троугао ABC и тачка M која не лежи ни на једној од три праве које садрже висине тог троугла. Права кроз M нормална на AM сече праву BC у тачки A_1. Тачке B_1 и C_1 дефинишу се аналогно. Доказати да су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке.

5. Колико се највише подскупова скупа $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ може изабрати, тако да је унија свака два једнака скупу N_n?

Четврти разред – А категорија

1. Колико нула има функција

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n},$$

где су $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ произвољни реални бројеви?

2. Одредити све природне бројеве n за које важи једнакост

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n = (n+3)^n.$$

3. Одредити (или доказати да не постоји) највећи природан број n за који постоји цео број a такав да свака два међу бројевима $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$ дају различите остатке при дељењу са 2013.

4. У троуглу ABC тачке S и S_a су центри редом уписаног и споља приписаног круга наспрам A, E је тачка пресека симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC, а N је средиште лука BC описане кружнице $\triangle ABC$ који не саджи A. Доказати да важи

$$AS \cdot AS_a = AE \cdot AN.$$

5. За $n \in \mathbb{N}$ нека је $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Са L_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја, као ни 1 и n истовремено. Са M_n означен је број подскупова скупа N_n (укључујући и празан скуп) који не садрже два узастопна природна броја. Одредити све природне бројеве $m > 3$ за које важи

$$L_m > M_{m-3} + M_{m-1}.$$

Први разред – Б категорија

1. Доказати да $n^2 + 1$ није дељив са 3 ни за један природан број n.

2. На једном острву живе само виле и вештице. Виле увек говоре истину, а вештице увек лажу. Један бродоломник, који је све то знао, сусрео се са две становнице острва, особама А и Б, али ни за једну није знао да ли је вила или вештица. Да би сазнао кога је срео упитао је оствршљанку А: „Да ли сте обе вештице?”.

а) За који добијени одговор је могао са сигурношћу да одреди којој врсти која особа припада?

б) Уколико не може са сигурношћу да одреди којој врсти која особа припада, бродоломник поставља још једно питање особи А: „Да ли сте вас две припаднице различитих врста?”. Који је одговор бродоломник добио, ако је на основу њега са сигурношћу могао да одреди којој врсти која особа припада?

(На постављена питања бродоломник може добити само одговоре ДА и НЕ.)

3. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \leqslant -2 \\ \dfrac{x-3}{x+2}, & x > -2. \end{cases}$$

Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = AC$). На правој BC одређене су тачке D и E тако да важи распоред $D - B - C - E$ и $DB = CE$. Ако су F и G подножја нормала из D на AC и из E на AB, редом, доказати да је:

а) $\sphericalangle FDB = \sphericalangle GEC$;

б) $FG \parallel BC$.

5. Помоћу цифара $1, 2, \ldots, 9$ формирати деветоцифрени број $N = \overline{C_1C_2\ldots C_9}$, тако да је сваки од двоцифрених бројева $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2C_3}, \ldots, \overline{C_8C_9}$ дељив са 7 или са 13. Колико решења има овај задатак?
(Свака цифра се може употребити само једном.)

Други разред – Б категорија

1. Нека је

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}} - 1\right).$$

Доказати да је $2x^3 + 2x^2 + 1$ природан број.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$|x(1-x)| < 0,05\,.$$

3. Одредити све природне бројеве који су дељиви са 5 и са 9 и имају тачно 10 позитивних делилаца.

4. Нека је M тачка унутар троугла ABC. Ако праве AM, BM, CM садрже центре описаних кругова троуглова BMC, CMA, AMB, редом, доказати да је M центар уписаног круга троугла ABC.

5. Наћи збир свих троцифрених бројева чије су све цифре непарне.

Трећи разред – Б категорија

1. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD је њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

2. У зависности од реалних параметара a и b у скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1, \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & a, \\ 3x & + & 2y & + & bz & = & 4. \end{array}$$

3. Доказати да је број $2^{2^n}-4$ дељив са 12 за све $n\in\mathbb{N}$.

4. Дужине страница троугла ABC су $AB=33$, $AC=21$ и $BC=n$, где је $n\in\mathbb{N}$. Тачке D и E изабране су на страницама AB и AC, редом, тако да је $AD=DE=EC=m$, за неко $m\in\mathbb{N}$. Одредити бројеве n и m.

5. На стандардну шаховску таблу постављена су 33 ловца. Доказати да се са табле може уклонити 28 ловаца, тако да се преосталих 5 не нападају.
(Ловац напада сва поља чији се центри налазе на правој која пролази кроз центар поља у коме се ловац налази и заклапа угао од 45° или 135° са ивицом табле.)

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити реалне бројеве a и b тако да функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задата са

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{4x}, & x<0,\\ b^2x^2+b(x+2), & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ e^{\frac{1}{2-x}}-1, & x>2,\end{cases}$$

буде непрекидна.

2. У скупу комплексних бројева решити једначину

$$x^6-2x^3+4=0.$$

3. Одредити све просте бројеве p за које једначина

$$x^4+4=p$$

има решења у скупу природних бројева.

4. Нека је са $x\star y=\dfrac{xy}{x+y}$ дефинисана операција на скупу позитивних рационалних бројева. Доказати да је

$$\underbrace{(\ldots((2013\star 2013)\star 2013)\ldots\star 2013)\star 2013}_{2013}$$

природан број.
(У претходном изразу број 2013 се појављује 2013 пута.)

5. Нека су x_1, x_2 и x_3 корени полинома

$$p(x)=x^3-2x+2010.$$

Уколико су x_1^2, x_2^2 и x_3^2 корени полинома $q(x)=x^3+ax^2+bx+c$, одредити a, b и c.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 9.02.2013.

Први разред – А категорија

1. Дате су две кружнице које се не секу. Конструисати њихове заједничке тангенте.

2. На једном одбојкашком турниру учествовало је $n > 1$ екипа и сваке две екипе одиграле су тачно један међусобни меч. Доказати да је тимове могуће нумерисати бројевима $1, 2, \ldots, n$ тако да је тим нумерисан бројем i победио у међусобном дуелу тим нумерисан бројем $i+1$, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
(У одбојци нема нерешених резултата.)

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

4. Подударне кружнице k_1, k_2 и k садрже тачку P, и секу се још у тачкама: k и k_1 у A, k и k_2 у B, k_1 и k_2 у N. Кружнице k_A, са центром у A, и k_B, са центром у B, садрже тачку N. Доказати да кружнице k_A, k_B и k имају заједничку тачку.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. Поља квадратне таблице A формата $n \times n$ попуњена су бројевима 1 и -1. За свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ означимо са k_i, односно v_i, производ бројева у i–тој колони, односно i–тој врсти. Таблица се зове *савршена* ако је

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0.$$

Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоји савршена таблица.

Други разред – А категорија

1. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

2. Нека су m_a, m_b, m_c тежишне дужи и r_a, r_b, r_c полупречници одговарајућих споља приписаних кругова произвољног троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}.$$

3. Да ли постоји природан број n тако да за сваку уређену петорку целих бројева $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ важи импликација

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = n \cdot x_5^4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0?$$

4. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су P и Q тачке на страницама AB и AC, редом, такве да праве PQ и BC нису паралелне. Означимо са M и N средишта дужи BP и CQ, редом. Доказати да кружнице описане око $\triangle ABC$, $\triangle APQ$ и $\triangle AMN$ осим тачке A имају још једну заједничку тачку.

5. На неком скупу коме присуствује $n > 1$ људи учесници говоре на укупно $n-1$ различитих језика, при чему сваки учесник говори све језике. За које n је могуће да сваки учесник приликом поздрављања са осталим учесницима употреби свих $n-1$ језика? (Свака два учесника се поздрављају на тачно једном језику.)

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоји реалан број c такав да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\sin^{2n} x + c \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^{2n} x = 1\,?$$

2. Да ли постоји матрица A, чији су елементи комплексни бројеви, таква да за неке природне бројеве k и n важи

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } A^n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}?$$

3. Одредити све природне бројеве n за које постоји делилац d броја n^4+1 такав да је $n^2 < d \leqslant n^2 + 3n + 7$.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = AC$) и нека је D тачка на страници BC таква да су полупречници круга уписаног у троугао ABD и круга приписаног страници CD троугла ACD једнаки. Доказати да су ови полупречници једнаки четвртини висине троугла ABC из темена B.

5. Нека су n и k природни бројеви и $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Одредити број уређених k–торки $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ подскупова скупа S чија је унија једнака S.

Четврти разред – А категорија

1. Монични полином $p(x)$ степена $m+n$ има m–тоструку нулу a и n–тоструку нулу b, при чему је n паран и важи $a < b$. Доказати да у тачки

$$c = \frac{mb + na}{m+n}$$

функција $p(x)$ има локални максимум.
(Полином је моничан ако му је коефицијент уз моном највећег степена једнак 1.)

2. Бинарна операција $*$ дефинисана на скупу реалних бројева је таква да за све $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи

$$(a * b) * c = a + b + c.$$

Доказати да је $a * b = a + b$.

3. Нека је x природан број. Доказати да се $x - 1$ и $x + 1$ могу представити у облику збира два квадрата целих бројева ако и само ако постоје цели бројеви u и v такви да је $u + v = 2x$ и $uv - 1$ потпун квадрат.

4. Нека су KL и MN тангенте на уписани круг ромба $ABCD$, где су K, L, M, N тачке на страницама AB, BC, CD, DA, редом. Доказати да је $KN \parallel LM$.

5. На колико начина се n нула и m јединица могу поређати у низ тако да се на тачно k места може уочити пар различитих суседних бројева?

Први разред – Б категорија

1. Нека је O пресек дијагонала трапеза $ABCD$ код кога је $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$ и тачка M средиште странице AB. Ако је $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, изразити векторе $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$ преко $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Функција $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ дата је са

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

Доказати да је $f(x) = f(1 - x) = f(1/x)$, за све $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

3. Доказати да не постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је

$$9^a + 2^b + 2013^c = 2014^d.$$

4. У троуглу ABC, са најкраћом страницом BC, изабране су тачке P и Q на страницама AB и AC, редом, тако да је

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle QBC = \sphericalangle BAC.$$

Доказати да центар O описане кружнице троугла APQ лежи на симетрали странице BC.

5. Колико има четвороцифрених бројева који садрже бар две цифре 5?

Други разред – Б категорија

1. Одредити комплексан број z за који важи

$$|z-1| = |z-3-2i| \qquad \text{и} \qquad |z| = |z-4|.$$

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ сече y-осу у тачки $(0,8)$, док је њена једина заједничка тачка са x-осом тачка $(2,0)$. Колико целобројних тачака (m,n), таквих да је $-2012 \leqslant m \leqslant 2012$ и $-2012 \leqslant n \leqslant 2012$, лежи на овој параболи?

3. Нека је $n \geqslant 10$ природан број. Од њега добијамо број m тако што цифре броја n напишемо у обрнутом редоследу (уколико се n завршава нулама, њих не пишемо у броју m), а затим број p као $p = |n-m|$. Нека је p_1 збир цифара броја p. Затим, нека је p_2 збир цифара броја p_1, итд. На овај начин добијен је једноцифрен број p_k, за неко $k \geqslant 1$. Одредити p_k.

4. Доказати да је у сваком конвексном четвороуглу збир дијагонала већи од полуобима, а мањи од обима.

5. Аца, Бане и Влада припадају породицама Лажетића и Истинољубића (свако припада само једној од те две породице). Као што им и презимена говоре сваки Лажетић увек лаже, а сваки Истинољубић увек говори истину. Аца је рекао следеће:

„Или Бане или ја припадамо различитој породици од остале двојице."

а) У којим случајевима је претходни исказ тачан?
б) Чије презиме са сигурношћу можемо да утврдимо?

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ вектори такви да је $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $|\vec{p}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = \sphericalangle(\vec{n},\vec{p}) = \pi/3$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{p}) = \pi/2$. Ако је

$$\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}, \qquad \vec{b} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p},$$

одредити $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. (Са $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ означен је угао између вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.)

2. Доказати да не постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in \left(\frac{2}{3}, 9\right).$$

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x! + 76 = y^2.$$

(Са $x!$ означен је број $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$.)

4. Доказати да произвољну тространу пирамиду можемо пресећи равни тако да се у пресеку добије ромб.

5. На контролној вежби сваки ученик добио је задатке једне од две групе задатака. Уколико одељење има 20 ученика, а по 10 ученика ради сваку групу задатака, на колико начина их дежурни наставник може поређати у два реда тако да ученици који су добили исту групу задатака седе један иза другог, а да ученици који седе један до другог раде различите групе задатака?

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити димензије праве кутије без поклопца са квадратном основом и запремином V за чије прављење је потребна минимална количина материјала.

2. Нека је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\left\lfloor x + \frac{1}{6} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{6} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{5}{6} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{4}{6} \right\rfloor.$$

($\lfloor x \rfloor$ је цео део броја x, односно највећи цео број не већи од x.)

4. Пресек паралелопипеда и равни је петоугао код кога су све странице дужине 1 или 2. Одредити углове тог петоугла.

5. Колико има функција $f : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ које нису бијекције и нису константне функције?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 16.03.2013.

Први разред – А категорија

1. Нека је $k > 0$. На страницама A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 троугла $A_1B_1C_1$ уочене су тачке C_2, A_2 и B_2, редом, такве да је

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = k.$$

Даље, за свако $2 \leqslant i \leqslant 2012$, на страницама A_iB_i, B_iC_i и C_iA_i троугла $A_iB_iC_i$ уочене су тачке C_{i+1}, A_{i+1} и B_{i+1}, редом, такве да је

$$\frac{A_iC_{i+1}}{C_{i+1}B_i} = \frac{B_iA_{i+1}}{A_{i+1}C_i} = \frac{C_iB_{i+1}}{B_{i+1}A_i} = \begin{cases} k, & i \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{1}{k}, & i \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}.$$

Доказати да се праве A_1A_{2013}, B_1B_{2013} и C_1C_{2013} секу у једној тачки.

Милош Милосављевић

2. Нека је p прост број. Ако постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да је $k^3 + pk^2$ потпун куб, доказати да $3 \mid p - 1$.

Бојан Башић

3. Нека су a, b, c и d реални бројеви за које важи $abcd = 1$ и

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Доказати да су нека два од бројева ab, ac, ad, bc, bd, cd једнака.

Милош Милосављевић

4. На 41 поље шаховске табле стављен је по један краљ. Доказати да се међу њима могу наћи три дисјунктна скупа таква да сваки садржи бар 5 краљева који се међусобно не нападају.

Ђорђе Дугошија

Други разред – А категорија

1. Нека је F фигура која одговара скупу тачака са координатама (b, c) (у правоуглом координатном систему) при чему су b и c такви реални бројеви да су модули оба решења квадратне једначине $x^2 + bx + c = 0$ не већи од 1. Одредити површину фигуре F.

Милош Милосављевић

2. У простору је дат бесконачан скуп S тачака међу којима не постоје три колинеарне. Сваке две тачке скупа S спојене су дужима, а свака дуж означена је са $+$ или $-$. При томе, скуп S има следећу особину: за свака два коначна дисјунктна подскупа $\{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$ скупа S постоји тачка из S која је повезана дужима означеним са $+$ са свим тачкама $A_1, \ldots, A_m$, а дужима означеним са $-$ са свим тачкама $B_1, \ldots, B_n$. Ако се обрише коначно много тачака скупа S, доказати да преостале и даље имају описану особину.

Борис Шобот

3. На столу се налази 2014 картица на којима редом пишу бројеви

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{2013}.$$

Аца и Бранко наизменично узимају по једну картицу са стола, а први картицу узима Аца. Након што је узета и последња картица, Аца израчуна збир бројева који се налазе на картицама које је он изабрао, а Бранко уради исто са својим картицама. Обележимо са A и B збирове који су добили Аца и Бранко, редом. Уколико је НЗД$(A,B) > 1$ победио је Аца, а у супротном је победио Бранко. Одредити који играч има победничку стратегију.

Милош Милосављевић

4. Нека су AD и BE висине, H ортоцентар и O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC. Ако је K ортоцентар троугла AOB, доказати да права HK полови дуж DE.

Душан Ђукић

Трећи разред – А категорија

1. За скуп природних бројева A кажемо да је *скуп-интервал* ако постоје природни бројеви $a \leqslant b$ такви да је $A = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leqslant i \leqslant b\}$. За дате природне бројеве n и k, колико има уређених k-торки скуп-интервала $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таквих да је

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}?$$

Милош Стојаковић

2. Одредити највеће $c \in \mathbb{R}$ (или доказати да не постоји) за које је тачно следеће тврђење:
Ако је α нула полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ такви да је $|a_0| = |a_1| = \ldots = |a_n| > 0$, тада је $|\alpha| > c$.

Милош Милосављевић

3. За природан број кажемо да је *палиндром* ако се приликом читања његових цифара (у декадном запису) слева надесно и здесна налево добија исти број. Одредити све природне бројеве n за које је број n^k палиндром за сваки природан број k.

Милош Милосављевић

4. У оштроуглом троуглу ABC повучене су висине AA_1, BB_1 и CC_1. Тачке M и N на дужима A_1C_1 и C_1B_1 су такве да је $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle NAC$. Доказати да је MA симетрала угла C_1MN.

Душан Ђукић

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = a + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

Милош Милосављевић

2. Природан број m називамо *скоро бинарни* ако се може представити као збир различитих бројева из скупа $\{2^k - 1 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Од свих скоро бинарних бројева нека је N онај који је 2014^{2012}-ти по величини, почев од најмањег. Да ли је број $N - 2013$ скоро бинарни?

Милош Милосављевић

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C. Права ℓ, која садржи H и паралелна је са B_1C_1, сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L ($L \neq H$). Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D. Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E ($E \neq A$), и ако је M средиште дужи BC, доказати да тачке D, E, K, L, M леже на истој кружници.

Душан Ђукић

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које постоји функција $f : \{0,1\}^n \to \{1, 2, \ldots, n\}$ која задовољава:

Ако су $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ два низа из скупа $\{0,1\}^n$ таква да је $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| = 2$, онда важи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Иван Матић

Први разред – Б категорија

1. У зависности од реалног параметра a, у скупу реалних бројева решити једначину

$$|x-1| + |x+2| = a - 2x.$$

Тангента

2. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Доказати да је $BC > B_1C_1$.

Иванка Томић

3. Доказати да међу 6 узастопних природних бројева постоји бар један који је узајамно прост са сваким од осталих 5.

Владимир Балтић

4. Кружнице k_1, са центром O_1 и полупречником r, и k_2, са центром O_2 и полупречником $2r$, додирују се изнутра. Тетива AB кружнице k_2 додирује кружницу k_1 у тачки T. Нека је права p нормала из O_2 на AB, и нека је њен други пресек с кружницом k_1 тачка C. Нека је D она тачка пресека p и k_2 која је са супротне стране од O_2 у односу на AB. Доказати да је права AB симетрала дужи CD.

Бојан Башић

5. Дато је 6 тачака у равни. Нека је p број различитих правих које одређују парови ових тачака. Које све вредности може имати p?

Владимир Балтић

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8.$$

Тангента

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{3^x+4^x-5^x}{x^3+x^4-x^5}\geqslant 0.$$

Милош Милосављевић

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$2!!\cdot 4!!\cdot 6!!\cdot \ldots \cdot (2k)!!=(k(k+1))!!.$$

(Са $(2k)!!$ означен је производ парних природних бројева не већих од $2k$. Нпр. $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$.)

Бојан Башић

4. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $CD=AD+BC$. Доказати да пресечна тачка симетрала углова у теменима A и B припада страници CD.

Иванка Томић

5. Нека је n природан број, а k цео број, тако да је $0\leqslant k\leqslant n$. Доказати да у скупу $\{0,1,2,\ldots,n\}$ једначине

$$x+y=n-k \quad \text{и} \quad x+y=n+k$$

имају исти број решења.

Владимир Балтић

Трећи разред – Б категорија

1. Основица AB једнакокраког троугла површине 15 припада правој $x-2y+20=0$, а врх му је тачка $C(1,8)$. Одредити једначине правих којима припадају краци тог троугла.

Тангента

2. Доказати неједнакост

$$\sin 26^\circ\cdot\sin 58^\circ\cdot\sin 74^\circ\cdot\sin 82^\circ\cdot\sin 86^\circ\cdot\sin 88^\circ\cdot\sin 89^\circ>\frac{45\sqrt{2}}{64\pi}.$$

Милош Милосављевић

3. Одредити цифру десетица броја $16^{3^{2013}}$.

Марко Радовановић

4. Која је најмања површина правоугаоног листа папира, који се може савити тако да се прекрије целокупна површина тетраедра код кога су све ивице дужине 1?

Владимир Балтић

5. Два играча, Аца и Бранко, играју следећу игру:
• Прво Аца бира природан број $m \geqslant 2$ који није дељив са 3;
• Затим Бранко бира природан број n;
• Онда Аца на табли димензија $m \times n$ исеца једно поље;
• Затим Бранко ставља на ту таблу тримино фигуре  (фигуре се могу окретати) које се не могу преклапати.

Игру добија Бранко ако може покрити целу таблу тримино фигурама, а у противном добија Аца. Ко од њих има добитну стратегију?

Владимир Балтић

Четврти разред – Б категорија

1. Дати су комплексни бројеви

$$a = (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+2013) \text{ и } b = (i-1) \cdot (i-2) \cdot \ldots \cdot (i-2013).$$

Упоредити модуле ових бројева.

Милош Милосављевић

2. Одредити остатак при дељењу полинома

$$x^{2013} + x^{2010} + \ldots + x^6 + x^3 + 8$$

полиномом $x^2 - x + 1$.

Тангента

3. Одредити све четвороцифрене бројеве $n = \overline{abcd}$ такве да је $\dfrac{2n}{3}$ четвороцифрен број чије су цифре хиљада, стотина, десетица и јединица редом $b+1$, $a+1$, $d+1$ и $c+1$.

Милош Милосављевић

4. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, а B_1 и C_1 редом подножја висина из темена B и C. Права ℓ, која садржи H и паралелна је са B_1C_1, сече праву BC у тачки K и кружницу описану око троугла HB_1C_1 у тачки L ($L \neq H$). Кружнице описане око троуглова HB_1C_1 и ABC се секу у тачкама A и D. Ако права AH сече кружницу описану око троугла ABC у тачки E ($E \neq A$), доказати да тачке D, E, K, L леже на истој кружници.

Душан Ђукић

5. За дате природне бројеве n и k, колико има уређених k-торки скупова $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таквих да је

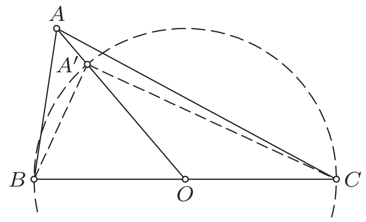
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}?$$

Милош Стојаковић

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.01.2013.

Први разред - А категорија

1. Нека је O средиште странице BC и k кружница са пречником BC. Како је $AO \geqslant AD = BC/2$, то се тачка A не налази унутар кружнице k. Дакле, кружница k сече дуж AO у тачки A' (могуће је $A = A'$), па је $\sphericalangle BA'O = \sphericalangle ABA' + \sphericalangle BAA' \geqslant \sphericalangle BAA'$ и $\sphericalangle CA'O = \sphericalangle ACA' + \sphericalangle CAA' \geqslant \sphericalangle CAA'$.



Оп 2013 1А 1

Сабирањем ових неједнакости добијамо $90^\circ = \sphericalangle BA'C \geqslant \sphericalangle BAC$, што је и требало доказати. (Тангента 69, стр. 33, зад. 3)

2. Нека је $P(x) = x^{2011}+1$. Тада је $P(x) = (x+1)\cdot(x^{2010}-x^{2009}+\ldots-x+1)$. Зато, одредимо остатак при дељењу полинома

$$Q(x) = x^{2010} - x^{2009} + \ldots - x + 1$$

са $x+1$. Како је $Q(-1) = 2011$, то је по Безуовом ставу $Q(x) = (x+1)\cdot R(x) + 2011$, а самим тим

$$P(x) = (x+1)\cdot((x+1)\cdot R(x) + 2011) = (x+1)^2 \cdot R(x) + 2011(x+1),$$

па је тражени остатак једнак $2011x+2011$. (Тангента 67, стр. 4, М1014)

3. Докажимо да такав природан број n не постоји. Претпоставимо супротно. Нека је $a \in \mathbb{N}$ највећи експонент броја 2 који дели $n!$, тј. $2^a \mid n!$, $2^{a+1} \nmid n!$, а b највећи експонент броја 5 који дели $n!$, тј. $5^b \mid n!$, $5^{b+1} \nmid n!$. На основу Лежандрове формуле имамо

$$a = \left[\frac{n}{2^1}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots \text{ и } b = \left[\frac{n}{5^1}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ldots,$$

где је са $[x]$ означен цео део броја x. Како по услову задатка $10^k \mid n!$ и $10^{k+1} \nmid n!$, то је $k = \min\{a,b\} = b$. Декадни запис броја $\frac{n!}{10^k}$ завршава се низом цифара 2012, те је он дељив са 2^2, а није дељив са 2^3. Отуда мора бити $a - b = 2$. Сада је

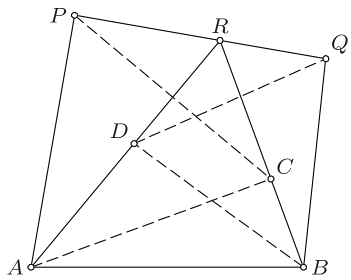
$$2 = a - b \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] \geqslant \frac{n-1}{2} - \frac{n}{5},$$

па је $n \leqslant 8$. Са друге стране, број $n!$ има бар 5 цифара, па је $n \geqslant 8$. Овим смо добили да је $n = 8$. Међутим, како је $8! = 40320$ долазимо до контрадикције.

4. Нека је $AD \cap BC = \{R\}$. Из збира углова троугла ABR закључујемо

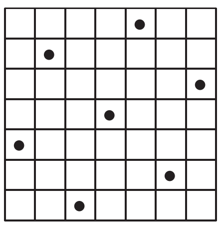
$$\begin{aligned} 180^\circ &= \sphericalangle RAB + \sphericalangle ABR + \sphericalangle ARB \\ &= 120^\circ + \sphericalangle ARB, \end{aligned}$$

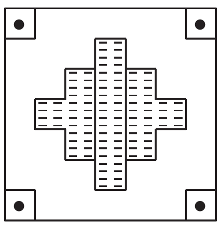
односно $\sphericalangle ARB = 60^\circ$. Како је $\sphericalangle APC = \sphericalangle ARB$, четвороугао $ACRP$ је тетиван. Одатле је $\sphericalangle PRA = \sphericalangle PCA = 60^\circ$. Аналогно, $\sphericalangle QRB = \sphericalangle QDB = 60^\circ$. Како је $\sphericalangle PRA + \sphericalangle ARB + \sphericalangle QRB = 180^\circ$ то су тачке P, R и Q колинеарне, што је и требало доказати.

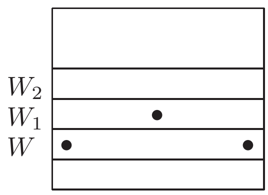


Оп 2013 1А 4

5. Пример на слици 1 показује да је на таблу могуће поставити 7 жетона.
Претпоставимо да се на таблу може поставити 8 жетона. Ако се у сваком углу табле налази по један жетон, преостала 4 жетона се морају налазити у осенченом делу слике 2. Међутим, тај осенчени део се може поделити на три дела (као на слици 2), од којих ни у један не може да стане више од једног жетона. Контрадикција! Ако у неком углу нема жетона, онда нека подтаблица димензије 6×7 (слика 3) садржи барем 7 жетона. Докажимо да је то немогуће. Претпоставимо да је могуће. Тада у свакој врсти имамо бар по један жетон, а у једној од њих (рецимо W) имамо два, и то, према услову задатка, у крајњим пољима. Нека је W_1 њој суседна врста, а W_2 врста различита од W суседна W_1 (слика 3). У W_1 жетон може да се налази само у средњем пољу, али тада у W_2 нема места ни за један жетон, што није могуће.
Дакле, на таблу је могуће поставити највише 7 жетона.


Слика 1.


Слика 2.



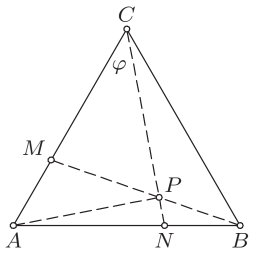
Слика 3.

Други разред - А категорија

1. Нека је $\sphericalangle ACN = \varphi$ и $AB = 3a$. Тада је $\sphericalangle ANC = 120^\circ - \varphi$. Применом синусне теореме на $\triangle ACN$ добијамо $\dfrac{AN}{\sin\varphi} = \dfrac{AC}{\sin(120^\circ - \varphi)}$, па је

$$\frac{3}{2} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \operatorname{ctg}\varphi + \frac{1}{2},$$

односно $\operatorname{ctg}\varphi = 2/\sqrt{3}$.



Оп 2013 2А 1

Како је $0 < \varphi < \pi/2$, то је $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}$ и $\sin\varphi = \sqrt{3}/\sqrt{7}$. Како је $\sphericalangle MBC = \varphi$, то је $\sphericalangle MPC = \sphericalangle PCB + \sphericalangle PBC = 60^\circ$, па је $\sphericalangle CMP = 120^\circ - \varphi$. Сада, применом синусне теореме на $\triangle MPC$ добијамо $\dfrac{CP}{\sin(120^\circ - \varphi)} = \dfrac{CM}{\sin 60^\circ}$, па је

$$CP = 2a\cdot\left(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6a}{\sqrt{7}} = AC\cdot\cos\varphi,$$

односно $\sphericalangle APC = 90^\circ$. (Тангента 67, стр. 5, М1019)

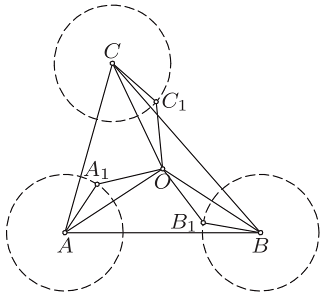
2. Нека $\omega \in \mathbb{C}$ има особину да је скуп $S = \{\omega^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан. Како важи $|\omega^n| = |\omega|^n$, то за $|\omega| > 1$ имамо $|\omega| < |\omega^2| < |\omega^3| < \ldots < |\omega^n| < \ldots$, односно скуп S није коначан. Слично, ако је $0 < |\omega| < 1$ имамо $|\omega| > |\omega^2| > |\omega^3| > \ldots > |\omega^n| > \ldots$, па ни у овом случају скуп S није коначан. Дакле, ако је S коначан скуп, онда је $|\omega| = 1$ или $\omega = 0$.
Претпоставимо да број $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ са наведеном особином постоји. Тада на основу претходног дела решења имамо $|z-i| = 1$ или $z - i = 0$, као и $|z+i| = 1$ или $z + i = 0$. Како $z = i$ и $z = -i$ не задовољавају ове услове, то је $|z-i| = |z+i| = 1$. Нека је $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, решење последњег система једначина. Тада је $x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 = 1$, па је $y = 0$ и $x = 0$, односно $z = 0$. Дакле, број $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ са наведеном особином не постоји.

3. Како је $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то је дата неједнакост еквивалента са

$$-3x^2 - 3x - 3 < f(x) < 3x^2 + 3x + 3.$$

Лева неједнакост је еквивалентна са $4x^2 + (a+4)x + 4 > 0$, која важи за свако $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $D_1 = (a+4)^2 - 64 < 0$, односно $-12 < a < 4$. Десна неједнакост је еквивалентна са $2x^2 + (2-a)x + 2 > 0$, која важи за свако $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $D_2 = (2-a)^2 - 16 < 0$, односно $-2 < a < 6$. Дакле, решења задатка чине интервал $(-2, 4)$. (Тангента 66, стр. 17, М992)

4. Доказаћемо да за произвољну тачку $A_1 \in k_A$ постоје тачке $B_1 \in k_B$ и $C_1 \in k_C$ такве да је троугао $A_1B_1C_1$ сличан, али не и подударан, са троуглом ABC.



Оп 2013 2А 4

Нека је O центар описане кружнице троугла ABC, а A_1 произвољна тачка кружнице k_A. Конструишимо на кружницама k_B и k_C, редом, тачке B_1 и C_1, такве да су $\sphericalangle OBB_1$ и $\sphericalangle OCC_1$ једнаки и исте оријентације као $\sphericalangle OAA_1$ (овакве тачке постоје и јединствено су одређене). Како је $OA = OB$, $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle OBB_1$ и $AA_1 = BB_1$, то су троуглови OAA_1 и OBB_1 подударни.
Одавде је $OA_1 = OB_1$ и $\sphericalangle A_1OB_1 = \sphericalangle AOB$, па су троуглови ABO и A_1B_1O слични. Зато је $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Аналогно, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB}$ и $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{OC_1}{OC}$. Из последње три једнакости, имајући на уму да је $OA_1 = OB_1 = OC_1$ и $OA = OB = OC$, добијамо $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$, па су троуглови $A_1B_1C_1$ и ABC слични. Уколико је $OA_1 \neq OA$ ови троуглови неће бити подударни. Како оваквих одабира тачке $A_1 \in k_A$ има бесконачно много, то и тражених одабира има такође бесконачно много.

5. Поље табле у i-том реду и j-тој колони означићемо са (i, j).
Ако је слон на пољу (1,1), очигледно побеђује играч који није на потезу – обележимо то поље са 2. За свако друго поље (i, j) урадимо следеће:

- Ако је бар једно поље на које слон може да дође са поља (i, j) у једном потезу обележено са 2, обележимо поље (i, j) са 1;
- Ако су сва поља на која слон може да дође са поља (i, j) у једном потезу обележена са 1, обележимо поље (i, j) са 2.

Обележавањем поља на овај начин добијамо да у сваком тренутку важи: уколико се слон налази на пољу обележеном са 1 побеђује играч који је на потезу, а у супротном губи.
Поштовањем претходног алгоритма, добијамо да су поља обележена као на слици. Како је доње десно поље обележено са 2, закључујемо да други играч има победничку стратегију.

2	1	2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	1	2	1	2
1	1	2	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	1	2	1
1	1	2	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	1	1	**2**

Трећи разред - А категорија

1. Како за $w \in \mathbb{C}$ важи $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)\overline{(z - z_k)} = \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k})\\ &= \sum_{k=1}^{2011} (z\overline{z} + z_k\overline{z_k} - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k) = \sum_{k=1}^{2011} (|z|^2 + 1 - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k)\\ &=2011(|z|^2 + 1) - z\sum_{k=1}^{2011} \overline{z_k} - \overline{z}\sum_{k=1}^{2011} z_k\\ &=2011(|z|^2 + 1).\end{aligned}$$

(Тангента 65, стр. 19, М968)

2. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нуле полинома $A(x) = ax^3 + bx + c$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ нуле полинома $B(x) = bx^3 + cx + a$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ нуле полинома $C(x) = cx^3 + ax + b$. На основу Вијетових формула за полином $A(x)$ имамо

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = -2b/a. \qquad (1)$$

Аналогно,

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = -2c/b, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = -2a/c. \qquad (2)$$

Претпоставимо да су бројеви $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, за $1 \leqslant i \leqslant 3$. Тада из (1) и (2) имамо $-2b/a \geqslant 0$, $-2c/b \geqslant 0$ и $-2a/c \geqslant 0$. Множењем ових неједнакости добијамо $-8 = (-2b/a)(-2c/b)(-2a/c) \geqslant 0$, што је очигледна контрадикција. Овим смо доказали да полином $P(x)$ нема свих 9 реалних нула. Како је он полином са реалним коефицијентима, то је број његових нула које су из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ паран. Отуда добијамо да $P(x)$ не може имати више од 7 реалних нула. Одредимо сада пример полинома $P(x)$ који има тачно 7 реалних нула. Посматрајмо уређене тројке (a, b, c) за које важи $a + b + c = 0$. Тада је $A(1) = 0$, па је $A(x) = (x - 1)A_1(x)$, где је $A_1(x) = ax^2 + ax - c$. Зато полином $A(x)$ има три реалне нуле ако и само ако је $a^2 + 4ac \geqslant 0$. Аналогно, полином $B(x)$ има три реалне нуле ако и само ако је $b^2 + 4ba \geqslant 0$. За $a = 1$, $b = -4$ и $c = 3$ очигледно су задовољене последње две неједнакости. То нам гарантује да полиноми $A(x)$ и $B(x)$ имају по три реалне нуле. Полином $C(x)$ има нулу $x = 1$. Дакле, одабиром $a = 1$, $b = -4$ и $c = 3$ полином $P(x)$ има 7 реалних нула.

Друго решење. Полином $Q(x) = x^3 + px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$ има све три реалне нуле ако и само ако је његова дискриминанта $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ непозитивна. Претпоставимо да полином $P(x)$ има 9 реалних нула. Тада би важило $\dfrac{c^2}{4a^2}+\dfrac{b^3}{27a^3}\leqslant 0$, $\dfrac{a^2}{4b^2}+\dfrac{c^3}{27b^3}\leqslant 0$ и $\dfrac{b^2}{4c^2}+\dfrac{a^3}{27c^3}\leqslant 0$. Да би наведене неједнакости важиле нужно је да важи $\dfrac{b}{a},\dfrac{c}{b},\dfrac{a}{c}\leqslant 0$. Међутим, тада је $1=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a}{c}\leqslant 0$, контрадикција. Уколико одаберемо бројеве a, b и c тако да су задовољене неједнакости $\dfrac{c^2}{4a^2}+\dfrac{b^3}{27a^3}\leqslant 0$, $\dfrac{a^2}{4b^2}+\dfrac{c^3}{27b^3}\leqslant 0$, онда ће полином $P(x)$ имати 7 реалних нула (неједнакости обезбеђују да полином има бар 6 реалних нула, али пошто је непарног степена и има реалне коефицијенте, онда он има непарно много реалних нула). Један такав одабир је $a=1$, $c=3$ и $b=-4$. Овим смо доказали да полином $P(x)$ може имати највише 7 реалних нула.

3. Користићемо следеће тврђење.

Лема. За произвољан ненегативан цео број a неједначина

$$a<2^b-2b$$

има бесконачно много решења у скупу природних бројева.
Доказ. Докажимо да за $a\geqslant 0$ важи

$$a<2^{a+3}-2(a+3), \tag{$*$}$$

тј. да је једно решење дате неједначине $b=a+3$. Доказ изводимо принципом математичке индукције. Тврђење тривијално важи за $a=0$. Зато, претпоставимо да тврђење важи за a и докажимо да важи и за $a+1$. Тада је

$$2^{a+4}=2\cdot 2^{a+3}>2(3a+6)>3a+9,$$

чиме је тврђење $(*)$ доказано.
Како је за $b\geqslant 3$ испуњено $2^b-2b<2^{b+1}-2(b+1)$, то је и свако $b\geqslant a+3$ решења дате неједначине, па неједначина заиста има бесконачно много решења. $\square$

Уколико број k има прост делилац већи од 7, онда он мора да дели и $P(n)$, па је $P(n)=0$, контрадикција. Дакле, за све бројеве k који имају бар један прост делилац већи од 7, дата једначина нема решења. Доказаћемо да за све остале вредности природног броја k посматрана једначина има бесконачно много решења. Запишимо број k у облику $k=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta$, где су $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$). Посматрајмо број n који у декадном запису има i јединица, $\alpha+j$ двојки, β тројки, γ петица и δ седмица. За овако изабран број n је

$$\begin{aligned}\frac{P(n)}{S(n)}=k\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{1^i\cdot 2^{\alpha+j}\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta}{i+2(\alpha+j)+3\beta+5\gamma+7\delta}=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta\\&\Leftrightarrow\quad i+2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta=2^j-2j.\end{aligned}$$

По Леми, неједначина $2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta<2^j-2j$ има бесконачно много решења (по j), па постоји и бесконачно много уређених парова природних бројева (i,j) за које важи

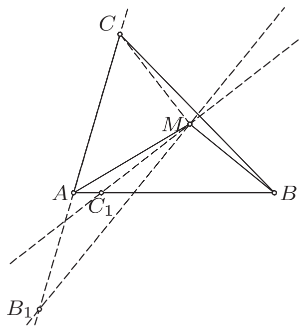
$$i+2\alpha+3\beta+5\gamma+7\delta=2^j-2j.$$

Сваки од ових уређених парова одређује један број n који је решење почетне једначине. Зато, ако број k нема прост делилац већи од 7, посматрана једначина има бесконачно много решења.

4. Тврђење ћемо доказата применом Менелајеве теореме, тј. доказаћемо да важи

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1.$$

Нека је $MA=x$, $MB=y$, $MC=z$. Размотримо положај тачке A_1 у односу на положај тачке M. Уколико се тачка M налази унутар $\triangle ABC$ тачка A_1 се налази на дужи BC ако и само ако је бар један од углова AMB и AMC оштар, а ако се тачка M налази ван $\triangle ABC$ тачка A_1 се налази на дужи BC ако и само ако је бар један од углова AMB и AMC туп.



Оп 2013 3А 4

Зато, од тачака A_1, B_1, C_1 се или тачно две или ниједна налазе на страницама троугла ABC. Претпоставимо да се тачке A_1 и C_1 налазе на страницама троугла ABC, јер се остали случајеви слично решавају. Применом синусне теореме је

$$\begin{aligned}\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{BC_1/MC_1}{AC_1/MC_1}&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)/\sin\sphericalangle MBA}{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)/\sin\sphericalangle MAB}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}\cdot\frac{\sin\sphericalangle MAB}{\sin\sphericalangle MBA}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}\cdot\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Аналогно,

$$\frac{CA_1}{BA_1}=\frac{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}{\sin(\sphericalangle AMC+\sphericalangle BMC-90^\circ)}\cdot\frac{z}{y}.$$

Водећи рачуна о рапореду имамо и

$$\begin{aligned}\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{AB_1/MB_1}{CB_1/MB_1}&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)/\sin(\sphericalangle 180^\circ-\sphericalangle CAM)}{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)/\sin\sphericalangle ACM}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACM}{\sin\sphericalangle CAM}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}\cdot\frac{x}{z}.\end{aligned}$$

Како је $\sphericalangle AMB+\sphericalangle BMC-90^\circ+\sphericalangle AMB-90^\circ=180^\circ$, то је

$$\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle BMC-90^\circ)=\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ),$$

па тражена једнакост следи множењем добијених израза. (Тангента 64, стр. 15, M962)

5. Приметимо да је могуће изабрати $n+1$ подскуп са траженом особином – довољно је одабрати све подскупове скупа N_n који садрже $n-1$ елемената и скуп N_n.
Претпоставимо да је издвојено $n+2$ подскупова са траженом особином. Тада бар $n+1$ од њих нису једнаки целом скупу N_n. Зато, према Дирихлеовом принципу постоји $k\in N_n$ који се не налази у барем два од њих, па њихова унија није једнака N_n. Контрадикција.
Дакле, може се изабрати највише $n+1$ скуп са траженом особином.

Четврти разред - А категорија

1. Домен дате функције је $\mathbb{R}\setminus\{a_1,a_2\dots,a_n\}$. Како је $\lim_{x\to a_i^\pm}f(x)=\pm\infty$, функција има вертикалну асимптоту у свакој тачки a_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Такође је и $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Како је извод дате функције (на домену) једнак $f'(x)=-\sum_{i=1}^n\frac{1}{(x-a_i)^2}<0$, то је f опадајућа на сваком од интервала (a_i,a_{i+1}), $1\leqslant i\leqslant n-1$, па по Болцано-Кошијевој теореми на сваком од ових интервала има тачно једну нулу. Како за $x<a_1$ важи $f(x)<0$, а за $x>a_n$ важи $f(x)>0$, то f има тачно $n-1$ нулу. (Тангента 67, стр. 6, M1035)

2. Нека је $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n=c$. Како за $3\leqslant k<n+2$ важи $\frac{k}{k+1}<\frac{n+2}{n+3}$, то је $\left(\frac{k}{k+1}\right)^n<c$. Сада за $3\leqslant k<n+2$ важи

$$\left(\frac{k}{n+3}\right)^n=\left(\frac{k}{k+1}\right)^n\cdot\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^n\cdot\dots\cdot\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n<c^{n-k+3},$$

па је

$$\begin{aligned}(n+3)^n = 3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n &< (c^n + c^{n-1} + \ldots + c) \cdot (n+3)^n \\ &= \frac{c\cdot(1-c^n)}{1-c} \cdot (n+3)^n \\ &< \frac{c}{1-c} \cdot (n+3)^n.\end{aligned}$$

Дакле $c > \dfrac{1}{2}$, односно $\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^n < 2$. Нека је $n \geqslant 3$. По биномној формули важи

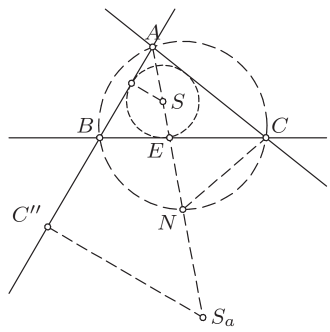
$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n > 1 + \frac{n}{n+2} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} = S,$$

па је према претходном $2 > S$. После сређивања, ово је еквивалентно са $n \leqslant 6$.
Како је $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, то су $n = 2$ и $n = 3$ решења дате једначине. Такође, $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$ (јер је $3^4 + 4^4 + 5^5 + 6^4 \equiv 2 \pmod 3$, а $7^4 \equiv 1 \pmod 3$), $3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 \neq 8^5$ (јер је $3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5$ непаран, а 8^5 паран) и $3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 \neq 9^6$ (јер је $3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 + 7^6 + 8^6 \equiv 3 \pmod 4$, а $9^6 \equiv 1 \pmod 4$), па су $n = 2$ и $n = 3$ једина решења дате једначине.

3. За $n > 2013$ међу датим бројевима, по Дирихлеовом принципу, два дају исти остатак при дељењу са 2013, док за $n = a = 2$ нема бројева који дају исти остатак. Зато постоји највећи број n са наведеном особином. Докажимо да за произвољан цео број a важи $a^{61} \equiv a \pmod{2013}$, односно $a^{61} \equiv a \pmod 3$, $a^{61} \equiv a \pmod{11}$ и $a^{61} \equiv a \pmod{61}$. Ако је $(3, a) = 1$, по Малој Фермаовој теореми важи $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, па је $a^{60} \equiv (a^2)^{30} \equiv 1 \pmod 3$, а тиме и $a^{61} \equiv a \pmod 3$. Последња једнакост очигледно важи за бројеве a који су дељиви са 3. Слично претходном, ако је $(11, a) = 1$, по Малој Фермаовој теореми имамо $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, па је $a^{61} \equiv (a^{10})^6 \cdot a \equiv a^{61} \pmod{11}$. Уколико $11 \mid a$, очито важи $a^{61} \equiv a \pmod{11}$. Напокон, на основу последице Мале Фермаове теореме, важи $a^{61} \equiv a \pmod{61}$. Дакле, $a^{61} \equiv a \pmod{2013}$ за сваки цео број a, па је $n < 61$. Докажимо да је највећа могућа вредност броја n једнака 60. Довољно је доказати да бројеви $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{60}$ дају различите остатке при дељењу са 2013. Нека је са $r_p(k)$ означен поредак броја a по модулу p. За $r_{61}(2)$ важи $r_{61}(2) \mid 60$, односно $r_{61}(2) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Како је $2^{30} \equiv -1 \pmod{61}$, то је $r_{61}(2) \neq 30$. Ако $r_{61}(2) \mid 30$, онда $1 \equiv (2^{r_{61}(2)})^{\frac{30}{r_{61}(2)}} \equiv 2^{30} \pmod{61}$, контрадикција. Зато је $r_{61}(2) \in \{4, 12, 15, 60\}$. Како је још и $2^4 \equiv 16 \pmod{61}, 2^{12} \equiv 2^{10} \equiv 48 \cdot 4 \equiv 9 \pmod{61}, 2^{15} \equiv 2^{12} \cdot 8 \equiv 72 \pmod{61}$, то је $r_{61}(2) = 60$. Претпоставимо да међу бројевима $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{60}$ постоје нека два која дају исти остатак при дељењу са 2013. Тада $2^x \equiv_{2013} 2^y$, за неке $1 \leqslant x < y \leqslant 60$. Међутим, онда је $1 \equiv 2^{y-x} \pmod{61}$, па важи $60 = r_{61}(2) \mid y - x$. Међутим, $0 < y - x < 60$, контрадикција.

На овај начин смо доказали да је највећа могућа вредност броја n једнака 60.

4. Нека је $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. Приметимо да је N тачка пресека симетрале $\sphericalangle BAC$ и описане кружнице троугла ABC. Самим тим, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle NAC$, а како је и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ANC$, то је $\triangle ABE \sim \triangle ANC$, па је $\dfrac{AE}{c} = \dfrac{b}{AN}$, односно $AE \cdot AN = bc$.
Нека је C' тачка додира праве AB и кружнице уписане у $\triangle ABC$, а C'' тачка додира праве AB и споља приписане кружнице наспрам A.



Оп 2013 4А 4

Тада је $AS = \dfrac{AC'}{\cos(\alpha/2)}$ и $AS_a = \dfrac{AC''}{\cos(\alpha/2)}$, па како је $AC' = \dfrac{b+c-a}{2}$, $AC'' = \dfrac{a+b+c}{2}$ и $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, то је

$$AS \cdot AS_a = \frac{(b+c-a)\cdot(a+b+c)}{4\cdot\cos^2(\alpha/2)} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2\cdot(\cos\alpha+1)} = bc,$$

што је и требало доказати. (Тангента 68, стр. 9, М1037)

5. Доказаћемо да за свако $m \in \mathbb{N}$ важи $L_m = M_{m-3} + M_{m-1}$, тј. да не постоји m са траженом особином.
За свако $S \subseteq N_m$, који бројимо у L_m, имамо две могућности:
1° $m \notin S$. Тада је $S \subseteq N_{m-1}$, при чему S не садржи два узастопна природна броја. Самим тим, оваквих скупова S има M_{m-1}.
2° $m \in S$. Тада се у скупу S не могу налазити бројеви 1 и $m-1$, па важи $S \setminus \{m\} \subseteq N_{m-2} \setminus \{1\}$, при чему S не садржи два узастопна природна броја. Самим тим, оваквих скупова S има M_{m-3}.
Из 1° и 2° закључујемо да је заиста $L_m = M_{m-3} + M_{m-1}$.

Први разред - Б категорија

1. Природан број n може бити облика $3k$, $3k-1$ или $3k-2$, за неки природан број k. Ако је $n = 3k$, тада је $n^2+1 = 9k^2+1$, што није дељиво са 3. Ако је $n = 3k-1$, тада је $n^2+1 = (3k-1)^2+1 = 3(3k^2-2k)+2$, што није дељиво са 3. Ако је $n = 3k-2$, тада је $n^2+1 = (3k-2)^2+1 = 3(3k^2-4k+1)+2$, што такође није дељиво са 3. Овим је доказ у потпуности завршен. (Тангента 69, стр. 28, зад. 5)

2. Нека је p прво, а q друго постављено питање, и нека су са $\tau(p)$ и $\tau(q)$ означене истинитосне вредности одговора на ова питања. Размотримо следеће случајеве:

1) Обе особе су виле. Тада је $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \perp$.
2) Обе особе су вештице. Тада је $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \top$.
3) Особа А је вила, а особа Б вештица. Тада је $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \top$.
4) Особа А је вештица, а особа Б вила. Тада је $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \perp$.
Дакле, да би бродоломник са сигурношћу могао да одреди која особа којој врсти припада, на прво питање одговор мора бити ДА (тада је особа А вештица, а особа Б вила). Ако је на прво питање одговор био НЕ, а бродоломник после другог питања може одредити којој врсти која особа припада, одговор на друго питање је НЕ, односно обе особе су виле.

3. Докажимо да је функција f 1-1. Нека је $f(a) = f(b)$. Ако је $a, b \leqslant -2$, тада је $-a-1 = -b-1$, па је $a = b$. Ако је $a, b > -2$, тада је $\dfrac{a-3}{a+2} = \dfrac{b-3}{b+2}$, односно $ab - 3b + 2a - 6 = (a-3)(b+2) = (b-3)(a+2) = ba - 3a + 2b - 6$, тј. $a = b$. Ако је $a \leqslant -2$ и $b > -2$, тада је $-a-1 = \dfrac{b-3}{b+2}$, односно $b - 3 = (-a-1)(b+2) = -ab - b - 2a - 2$, тј. $0 = ab + 2a + 2b - 1 = a(b+2) + 2(b+2) - 5 = (a+2)(b+2) - 5$. Међутим, $a + 2 \leqslant 0$ и $b + 2 > 0$, па је $(a+2)(b+2) - 5 < -5$, односно овај случај није могућ. Слично доказујемо и да случај $a > -2$ и $b \leqslant -2$ није могућ. Дакле, ако је $f(a) = f(b)$ тада је $a = b$, па је f 1-1.
Докажимо да је функија f *на*. Ако је $b \geqslant 1$, тада је $-b - 1 \leqslant 2$, па је $f(-b-1) = -(-b-1) - 1 = b$. Ако је $b < 1$ одредимо $a > -2$ тако да је $f(a) = b$, тј. $\dfrac{a-3}{a+2} = b$. Последње је еквивалентно са $\dfrac{a+2-5}{a+2} = 1 - \dfrac{5}{a+2} = b$, односно $a = \dfrac{5}{1-b} - 2 = \dfrac{3+2b}{1-b} > -2$. Дакле, за свако $b \in \mathbb{R}$ постоји $a \in \mathbb{R}$ тако да је $f(a) = b$, па је f *на*.
Из претходног закључујемо да је f бијекција и да је

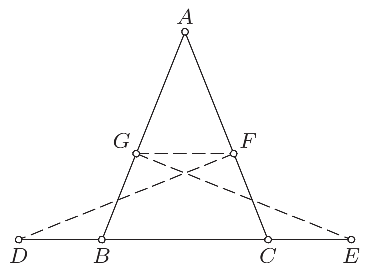
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x-1, & x \geqslant 1 \\ \dfrac{3+2x}{1-x}, & x < 1. \end{cases}$$

(Тангента 65, стр. 36, зад. 4)

4. Како је $DB = CE$, то је $DC = DB + BC = CE + BC = EB$. Троугао ABC је једнакокраки, па је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$. Како је $DC = EB$, $\sphericalangle BGE = \sphericalangle CFD = 90^\circ$ и $\sphericalangle EBG = \sphericalangle DCF$, то је $\triangle BGE \cong \triangle CFD$. Самим тим, $FC = GB$, па је и

$$AG = AB - GB = AC - FC = AF,$$

тј. $\triangle AGF$ је једнакокраки.



Оп 2013 1Б 4

Сада је

$$180^\circ = \sphericalangle AGF + \sphericalangle AFG + \sphericalangle GAF = 2 \cdot \sphericalangle AGF + \sphericalangle BAC,$$
$$180^\circ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC,$$

па је $\sphericalangle AGF = \sphericalangle ABC$, односно $FG \parallel BC$. (Тангента 62, стр. 36, зад. 5)

5. Двоцифрени бројеви дељиви са 13 су 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, а дељиви са 7 су 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91. Од ових бројева једино 78 садржи цифру 7 и испуњава услове задатка, па је $C_1 = 7$ и $C_2 = 8$. Како је од ових бројева једино броју 84 цифра десетица 8, то је $C_3 = 4$. Сада је $C_4 = 2$ или $C_4 = 9$. Размотримо зато следећа два случаја.
1° $C_4 = 2$. Тада је $C_5 = 1$ или $C_5 = 6$. Ако је $C_5 = 1$, тада је $C_6 = 3$. Сада је $C_7 = 5$ (јер не може бити $C_7 = 9$), па је $C_8 = 6$. Међутим, тада није могуће изабрати C_9. Нека је зато $C_5 = 6$. Тада је $C_6 = 3$ (јер не може бити $C_6 = 5$), па C_7 може бити једнако 5 или 9. Међутим, за $C_7 = 5$ није могуће изабрати C_8, па је $C_7 = 9$ и самим тим $C_8 = 1$. Међутим, у овом случају C_9 није могуће изабрати.
2° $C_4 = 9$. Тада је $C_5 = 1$, па је $C_6 = 3$ и $C_7 = 5$. Сада је $C_8 = 2$ или $C_8 = 6$. Ако је $C_8 = 2$, тада је $C_9 = 6$. Ако је $C_8 = 6$, тада C_9 није могуће изабрати.
Дакле, једино решење задатка је број 784913526.

Други разред - Б категорија

1. Нека је $a = \sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}$ и $b = \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}$. Тада је $a^3 + b^3 = \frac{23}{2}$ и

$$ab = \sqrt[3]{\frac{(23+\sqrt{513})(23-\sqrt{513})}{16}} = \sqrt[3]{\frac{23^2-513}{16}} = 1.$$

Сада, кубирањем израза $3x + 1 = a + b$ добијамо

$$27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = \frac{23}{2} + 3(3x+1) = \frac{29}{2} + 9x,$$

па је $2x^3 + 2x^2 + 1 = 2$.

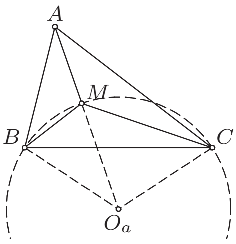
2. Дата неједначина еквивалентна је са $-1 < 20x - 20x^2 < 1$, односно $20x^2 - 20x - 1 < 0$ и $20x^2 - 20x + 1 > 0$. Дискриминанта прве неједначине једнака је $D_1 = 480$, а друге $D_2 = 320$. Самим тим решења прве неједначине чине скуп $\left(\frac{5-\sqrt{30}}{10}, \frac{5+\sqrt{30}}{10}\right)$, а друге скуп $\left(-\infty, \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}, +\infty\right)$. Дакле, решења дате једначине чине скуп $\left(\frac{5-\sqrt{30}}{10}, \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{30}}{10}\right)$. (Тангента 66, стр. 37, зад. 5)

3. Нека је тражени број n. По услову задатка је $n = 3^2 \cdot 5 \cdot m$. Ако је n дељив неким простим бројем $p \notin \{3, 5\}$, тада n има барем 12 различитих делиоца $1, 3, 5, 9, 15, 45\, p, 3p, 5p, 9p, 15p, 45p$. Дакле, n је облика $3^k \cdot 5^l$, за неко $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$. Приметимо да су делиоци броја n тачно бројеви облика $3^a \cdot 5^b$, за $0 \leqslant a \leqslant k$ и $0 \leqslant b \leqslant l$, па n има $(k+1)(l+1)$ делилаца. По услову задатка је $(k+1)(l+1) = 5 \cdot 2$, па је $k = 4$ и $l = 1$, односно $n = 3^4 \cdot 5 = 405$. (Тангента 68, стр. 31, зад. 2)

4. Неко је O_a центар кружнице описане око $\triangle BMC$. Тада је $\sphericalangle BO_aM = 2 \cdot \sphericalangle BCM$, а из троугла BMO_a, $180^\circ = 2 \cdot \sphericalangle BMO_a + \sphericalangle BO_aM$. Дакле,

$$\sphericalangle BMO_a = 90^\circ - \sphericalangle BCM,$$

па је $\sphericalangle BMA = 180^\circ - \sphericalangle BMO_a = 90^\circ + \sphericalangle BCM$.



Оп 2013 2Б 4

Аналогно (посматрањем кружнице описане око $\triangle AMC$) добијамо $\sphericalangle AMB = 90^\circ + \sphericalangle ACM$, па је $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM$, тј. CM је симетрала угла BCA. Слично доказујемо да су AM и BM симетрале углова BAC и ABC, редом, па је M центар уписане кружнице $\triangle ABC$.

5. Троцифрених бројева чије су све цифре непарне има $5^3 = 125$. При томе свака цифра се појављује по 25 пута као цифра јединица, 25 пута као цифра десетица и 25 пута као цифра стотина у овим бројевима, па је тражени збир једнак

$$25 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot (1 + 10 + 100) = 69375.$$

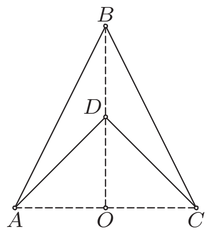
(Тангента 66, стр. 38, зад. 1)

Трећи разред - Б категорија

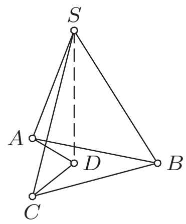
1. Приметимо најпре да је четвороугао $ABCD$ неконвексан. У супротном је $SA > AD = \sqrt{2}$ и $SB > DB = 3$, што је немогуће, јер је $SA + SB = 2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{2}$.
Нека је $AC \cap BD = \{O\}$. Како су ABC и ADC једнакокраки троуглови, то је $BO \perp AC$ и O средиште дужи AC ($ABCD$ је делтоид). Из Питагорине теореме важи $DO^2 = AD^2 - AO^2 = 1$ и $BO^2 = AB^2 - AO^2 = 4$, па је површина четвороугла $ABCD$ једнака $\dfrac{AC \cdot BO}{2} - \dfrac{AC \cdot DO}{2} = 1$. Даље, применом Питагорине теореме на троуглове SDA и SDB добијамо $SA^2 = SD^2 + DA^2$ и $SB^2 = SD^2 + DB^2$. Сада је $SA^2 - SB^2 = DA^2 - DB^2 = 1$, па је

$$SA - SB = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2.$$

Последња једнакост, заједно са $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$, даје $SA = \sqrt{5}$ и $SB = 2$. Дакле, $SD = \sqrt{SA^2 - DA^2} = \sqrt{3}$, па је запремина пирамиде $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (Тангента 69, стр. 12, M1066)



Оп 2013 3Б 1а



Оп 2013 3Б 1б

2. Детерминанте овог система су

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = 2 - b, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -2 & -2 \\ 4 & 2 & b \end{vmatrix} = -ab + 2a - 2b + 4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & -2 \\ 3 & 4 & b \end{vmatrix} = -ab - 3a + b - 2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & a \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = a.$$

Размотримо зато следеће случајеве.

1° $\Delta = 0$, тј. $b = 2$. Тада је $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = -a$, $\Delta_z = a$, па имамо следећа два подслучаја.

1.1° $a \neq 0$. Једначина нема решења.

1.2° $a = 0$. У овом случају је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па систем решавамо Гаусовим методом елиминације. Полазни систем је еквивалентан са

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ -y - z &= 1, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Дакле, z је слободна промењлива, тј. $z = t$ за $t \in \mathbb{R}$. Даље, из друге и прве једначине редом добијамо $y = -1 - t$ и $x = 2$. Скуп решења једначине у овом случају је $\{(2, -1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2° $\Delta \neq 0$, тј. $b \neq 2$. У овом случају једначина има јединствено решење, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, односно $(x, y, z) = \left(a + 2, \dfrac{ab - 3a + b - 2}{2 - b}, \dfrac{a}{2 - b}\right)$. (Тангента 66, стр. 17, M996)

3. За $n \geqslant 1$ је $2^n \geqslant 2$, па је $2^{2^n} - 4 = 4 \cdot (2^{2^n-1} - 1)$, односно дати број је дељив са 4. Такође, број $2^{2^n} = (2^{2^{n-1}})^2$ није дељив са 3, па како је потпун квадрат, даје остатак 1 при дељењу са 3. Самим тим, дати број је дељив и са 3, чиме је доказ завршен. (Тангента 67, стр. 27, зад. 5)

4. Нека је $\sphericalangle CAB = \varphi$. Применом косинусне теореме на $\triangle ADE$, добијамо

$$\cos\varphi = \frac{AD^2 + AE^2 - ED^2}{2 \cdot AD \cdot AE} = \frac{(21-m)^2 + m^2 - m^2}{2m \cdot (21-m)} = \frac{21-m}{2m}.$$

Сада, применом косинусне теореме на $\triangle ABC$ добијамо

$$n^2 = 33^2 + 21^2 - 2 \cdot 33 \cdot 21 \cdot \frac{21-m}{2m} = 2223 - \frac{3^3 \cdot 7^2 \cdot 11}{m}. \qquad (*)$$

Како је $m < 21$ (јер је $EC < AC$), то је $m \in \{3, 7, 9, 11\}$. Провером ових вредности добијамо да су једина решења једначине $(*)$ $m = 7$, $n = 12$ и $m = 11$, $n = 30$. Међутим, за $n = 12$ је $AC + BC = AB$, што није могуће, тако да је једино решење задатка $m = 11$, $n = 30$.

5. Приметимо да се два ловца која се налазе у истој врсти не нападају. Како је ловаца 33, а врста 8, то се, по Дирихлеовом принципу, у барем једној врсти налази 5 ловаца. Дакле, довољно је уклонити преосталих 28 ловаца.

Четврти разред - Б категорија

1. На интервалима $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$ функција је непрекидна, тако да је довољно одредити бројеве a и b тако да функција буде непрекидна у тачкама 0 и 2. Приметимо да је $f(0) = 2b$, $f(2) = 4b^2 + 4b$ и $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$, па због непрекидности у тачки 2 важи $4b^2 + 4b = -1$, односно $b = -1/2$. Самим тим, због непрекидности у тачки 0 је $a \neq 0$, па је

$$-1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{4x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a}{4},$$

односно $a = -4$. Дакле, $(a, b) = \left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(Тангента 65, стр. 19, M973)

2. Уведимо смену $t = x^3$. Тада је $t^2 - 2t + 4 = 0$, па је $t_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Запишимо ове бројеве у тригонометријском облику. Како је $|t_{1,2}| = 2$, то је

$$t_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$t_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

па је довољно решити једначине

$$x^3 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad x^3 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Решења ових једначина су

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ 0\leqslant k\leqslant 2,$$
$$x_{4,5,6} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ 0\leqslant k\leqslant 2,$$

па су решења полазне једначине x_i, $1\leqslant i\leqslant 6$. (Тангента 68, стр. 28, зад. 4)

3. Приметимо да важи

$$p = x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2x+2)\cdot(x^2-2x+2).$$

Како је p прост број, а $x^2+2x+2>1$, то је $x^2-2x+2=1$, односно $x=1$, а $p=5$.

4. Принципом математичке индукције ћемо доказати да важи

$$\underbrace{(\dots((2013\star 2013)\star 2013)\dots\star 2013)\star 2013}_{n} = \frac{2013}{n}.$$

За $n=1$ тврђење тривијално важи. Претпоставимо да тврђење важи за n и докажимо да важи и за $n+1$. Имамо

$$\underbrace{(\dots(2013\star 2013)\dots\star 2013)\star 2013}_{n+1} = \underbrace{(\dots(2013\star 2013)\dots\star 2013)}_{n}\star 2013$$
$$=\frac{2013}{n}\star 2013 = \frac{\frac{2013}{n}\cdot 2013}{\frac{2013}{n}+2013} = \frac{2013}{n+1}.$$

Дакле, вредност датог израза једнака је 1.

5. Из Вијетових формула за полином $p(x)$ добијамо

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0,\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 &= -2,\\ x_1x_2x_3 &= -2010. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=4,\\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2 &= (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=4,\\ x_1^2x_2^2x_3^2 &= (x_1x_2x_3)^2=2010^2, \end{aligned}$$

па како је из Вијетових формула за полином $q(x)$

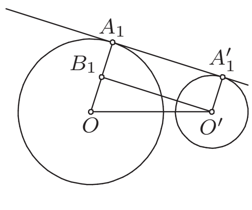
$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= \quad -a,\\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2 &= \quad b,\\ x_1^2x_2^2x_3^2 &= \quad -c, \end{aligned}$$

то је $a=-4$, $b=4$ и $c=-2010^2$. (Тангента 64, стр. 39, зад. 8)

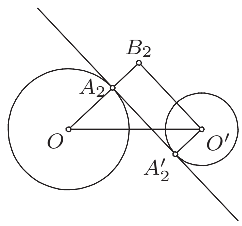
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 9.02.2013.

Први разред - А категорија

1. Нека су дате кружнице k, са центром O и полупречником R, и k', са центром O' и полупречником r, где је $R \geqslant r$.
Анализа. Нека заједничка спољашња тангента t_1 додирује кружнице k и k' у тачкама A_1 и A_1', редом. Изаберимо тачку B_1 на дужи A_1O тако да је $A_1B_1 = A_1'O'$ (тада је $OB_1 = R - r$). Како је $A_1O \parallel A_1'O'$ и $A_1B_1 = A_1'O'$, $A_1A_1'O'B_1$ је правоугаоник, па је $\sphericalangle OB_1O' = 90°$.
Нека заједничка унутрашња тангента t_2 додирује кружнице k и k' у тачкама A_2 и A_2', редом. Изаберимо тачку B_2 на правој A_2O тако да је $A_2B_2 = A_2'O'$ и да важи распоред $O - A_2 - B_2$ (тада је $OB_2 = R+r$). Како је $A_2O \parallel A_2'O'$ и $A_2B_2 = A_2'O'$, четвороугао $A_2A_2'O'B_2$ је правоугаоник, па је $\sphericalangle OB_2O' = 90°$.
Конструкција. Конструишимо кружницу l над пречником OO'. Констуишимо кружнице l_1 и l_2 са центром O и полупречницима $R-r$ и $R+r$, редом. Нека су B_1 и B_1' тачке пресека кружница l и l_1, а B_2 и B_2' тачке пресека кружница l и l_2. Нека су A_1, C_1, A_2, C_2 пресеци полуправих OB_1, OB_1', OB_2, OB_2' са кружницом k, редом. Конструишимо праве t_i и t_i', $i \in \{1, 2\}$, тако да је $t_i \perp A_iO$ и $t_i' \perp C_iO$. Праве t_1, t_2, t_1' и t_2' су заједничке тангенте кружница k_1 и k_2.
Доказ. Изводи се слично као анализа.
Дискусија. Уколико је једна кружница унутар друге, тј. $OO' < R - r$, задатак нема решења, а иначе постоје тачно четири заједничке тангенте ових кружница.
(Тангента бр. 67, стр. 4, М1012)



Ок 2013 1А 1а



Ок 2013 1А 1б

2. Задатак ћемо решити индукцијом по броју n. За $n = 2$ нумеришимо победничку екипу бројем 1, а ону која је изгубила у међусобном дуелу бројем 2. Претпоставимо зато да тврђење важи за произвољних $n \geqslant 2$ екипа и докажимо да одатле следи и за $n+1$ екипа. Одаберимо произвољну екипу X међу тих $n+1$ и нумеришимо преосталих n према индуктивној претпоставци бројевима од 1 до n. Ако је екипа X изгубила све мечеве можемо је нумерисати бројем $n+1$ и за ових $n+1$ екипа ће важити услови задатка. Претпоставимо зато да је екипа X победила бар једном и нека је j број којим је нумерисан тим са најмањим индексом међу онима који су изгубили од ове екипе. Сада, тимове који су били нумерисани бројевима j до n, нумеришимо бројевима $j+1$ до $n+1$, редом, екипама нумерисаним од 1 до $j-1$ (ако је $j>1$) задржимо нумерацију, а екипу X нумеришимо са j. Како је екипа нумерисана са $j-1$ (ако је $j>1$) победила екипу X, услови задатка су испуњени и доказ је завршен. (Тангента 67, стр. 5, М1018)

3. Претпоставимо прво да је $x \geqslant 7$. Тада лева страна једначине даје остатак 6 при дељењу са 7. Међутим, како квадрат ниједног природног броја не даје остатак 6 при дељењу са 7 (могући остаци су: $0^2 = 0$, $(\pm1)^2 = 1$, $(\pm2)^2 = 4$ и $(\pm3)^2 \equiv 2 \pmod 7$), у овом случају једначина нема решења. Преостаје још да се испитају случајеви $1 \leqslant x \leqslant 6$. Директном провером се установљава да су решења $(x, y) \in \{(4, 10), (5, 14)\}$ (тада имамо $4! + 76 = 24 + 76 = 100 = 10^2$ и $5! + 76 = 120 + 76 = 196 = 14^2$).

4. Користићемо следеће тврђење:

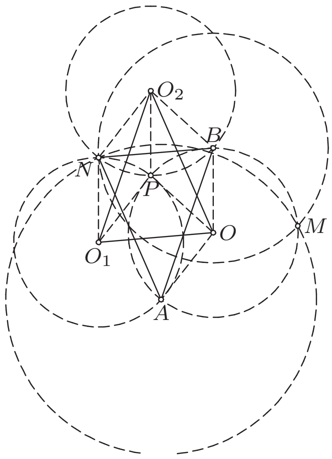
> Нека су γ_1 и γ_2 кружнице са центрима C_1 и C_2, редом, које се секу у тачкама X и Y. Тада је $\sphericalangle C_1XC_2 = \sphericalangle C_1YC_2$, $\sphericalangle XC_1C_2 = \sphericalangle YC_1C_2$ и $\sphericalangle XC_2C_1 = \sphericalangle YC_2C_1$.

Нека су O_1, O_2 и O центри кружница k_1, k_2 и k, редом, а M, $M \neq N$, тачка пресек кружница k_A и k_B. Троуглови NO_1P и NO_2P су подударни и једнакокраки, па је $O_1N \parallel O_2P$. Слично, троуглови POB и PO_2B су подударни и једнакокраки, па је $O_2P \parallel OB$, односно из претходног $O_1N \parallel OB$. Како је и $O_1N = OB$, то је четвороугао O_1OBN паралелограм, па је $OO_1 = BN$. Аналогно је $OO_2 = AN$ и $O_1O_2 = AB$, па су троуглови ABN и O_2O_1O подударни. Из ове подударности је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle O_2OO_1$. Даље, применом наведеног тврђења, имамо $\sphericalangle POO_2 = \sphericalangle BOO_2$ и $\sphericalangle POO_1 = \sphericalangle AOO_1$, па је $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle O_1OO_2 = 2\sphericalangle ANB$. Поновном применом наведеног тврђења је $\sphericalangle ANB = \sphericalangle AMB$, па је $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle AMB$. Самим тим, како се тачке O и M налазе са исте стране праве AB, M се налази и на кружници k, чиме је доказ завршен.

5. Нека је са a_{ij} означен број који је записан у пољу које се налази у i-тој врсти и j-тој колони.
За сваки паран број n следећа таблица је савршена:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases},$$

јер је тада $k_i = -1$ и $v_i = 1$, за $1 \leqslant i \leqslant n$.
Нека је n непаран број. Из $k_1 + \ldots + k_n + v_1 + \ldots + v_n = 0$ следи да је тачно n од бројева $k_1, \ldots, k_n, v_1, \ldots, v_n$ једнако 1 и тачно n једнако -1. То значи да је $k_1k_2 \cdot \ldots \cdot k_nv_1v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = (-1)^n = -1$. Ово је немогуће, јер је $k_1k_2 \cdot \ldots \cdot k_nv_1v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = P^2 = 1$, где је са P означен производ свих бројева таблице.
Савршена таблица постоји ако и само ако је n паран број.



Ок 2013 1А 4

Други разред - А категорија

1. Претпоставимо да је $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x \in (2/3, 9)$. Приметимо да x није облика $\pi/2 + k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, јер је у супротном $\operatorname{tg} 2x = 0$. Дакле, $\operatorname{tg} x$ је дефинисано, па важи $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. Такође, $\operatorname{ctg} 3x \neq 0$, па је и $\operatorname{tg} 3x$ дефинисан и по адиционим формулама важи $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$. Нека је

$$\begin{aligned} y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x =& \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1-3\operatorname{tg}^2 x}{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x} \\ =& \frac{2-6\operatorname{tg}^2 x}{3-4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{2-6m}{3-4m+m^2} \in \left(\frac{2}{3}, 9\right), \end{aligned}$$

где је $m = \operatorname{tg}^2 x$. Тада је

$$y \cdot m^2 + (6-4y) \cdot m + (3y-2) = 0. \qquad (*)$$

Према претходном, квадратна једначина $(*)$ (по m) има ненегативно решење. Дакле, $D = (6-4y)^2 - 4y(3y-2) \geqslant 0$, односно $4y^2 - 40y + 36 \geqslant 0$. Решавањем ове квадратне неједначине добијамо да је $y \geqslant 9$ или $y \leqslant 1$, па је према претходном $y \in (2/3, 1]$. Међутим, тада је $y > 0$, $6-4y > 0$ и $3y-2 > 0$, па је по Вијетовим формулама збир решења једначине $(*)$ негативан, а производ позитиван, а самим тим оба решења су негативна. Контрадикција.

2. Нека је $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Изведимо формулу за полупречник споља приписане кружнице троугла. Нека су са S и S_a означени центри уписане и споља приписане кружнице страници BC

троугла ABC, редом, а са S' и S'_a подножја нормала ових тачака на праву AB, редом. Троуглови ASS' и $AS_aS'_a$ су слични, па је $\frac{r}{r_a} = \frac{AS'}{AS'_a} = \frac{(b+c-a)/2}{(a+b+c)/2} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$. Како је $2S = r(a+b+c)$, где је S површина троугла ABC, то је $r_a = \frac{2S}{b+c-a}$.

Нека је $p = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла ABC. Из претходног закључујемо да је десна страна тражене неједнакости једнака

$$D = \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{S^2}.$$

Даље, по неједнакости између квадратне и аритметичке средине је

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \geqslant \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a),$$

па је

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} &\leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \\ &= \frac{(p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

По Хероновом обрасцу је $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, па тражена неједнакост следи на основу неједнакости

$$(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \geqslant (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a).$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$. (Тангента 66, стр. 19, M1011)

3. Докажимо да број $n = 5$ има својство описано у задатку, тачније да је једино решење једначине $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 5x_5^4$ петорка $(0,0,0,0,0)$. Претпоставимо да постоји неко решење за које је $x_5 \neq 0$. Нека је d највећи заједнички делилац бројева x_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и нека је $x_i = x'_i \cdot d$, $1 \leqslant i \leqslant 5$. Дељењем једначине са d^4, добијамо једначину

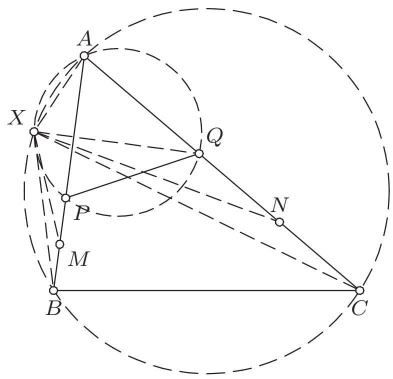
$$x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4 = 5 \cdot x_5'^4,$$

при чему је НЗД$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5) = 1$. Како је $(\pm 2)^4 \equiv 1 \pmod 5$, $(\pm 1)^4 \equiv 1 \pmod 5$, $0^4 \equiv 0 \pmod 5$, закључујемо да четврти степен ма ког целог броја при дељењу са 5 даје остатак 0 или 1. Одавде имамо да је збир $x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4$ дељив са 5 једино ако су сви бројеви x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 дељиви са 5. Међутим, тада $5^4 \mid x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 + x_4'^4 = 5x_5'^4$, одакле $5 \mid x'_5$. Овим смо добили да су бројеви x'_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$, дељиви са 5, па њихов највећи заједнички делилац није 1, што је контрадикција.

4. Нека је X, $X \neq A$, пресечна тачка кружница описаних око $\triangle APQ$ и $\triangle ABC$ (она постоји јер PQ и BC нису паралелне). Тада је $\sphericalangle XPA = \sphericalangle XQA$ и $\sphericalangle XBA = \sphericalangle XCA$ што значи да је $\triangle XBP \sim \triangle XCQ$. Сада имамо

$$\frac{BM}{CN} = \frac{BP/2}{CQ/2} = \frac{BP}{CQ} = \frac{XB}{XC}$$

што заједно са $\sphericalangle XBM = \sphericalangle XCN$ даје $\triangle XBM \sim \triangle XCN$. Закључујемо да је $\sphericalangle XMA = \sphericalangle XNA$, па тачка X припада кружници описаној око $\triangle AMN$.



Ок 2013 2А 4

5. Докажимо да је тражено могуће ако и само ако је n паран број. Претпоставимо да је n непаран и да је тражено могуће. Тада је укупан број поздрављања $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Како је сваки језик употребљен једнак број пута, то је сваки језик употребљен по $\dfrac{n}{2}$ пута, што није цео број. Контрадикција.

Докажимо да је тражено могуће уколико је n паран број. Нумеришимо учеснике скупа бројевима од 1 до n. Нека су се учесници нумерисани са a и b, где $n \notin \{a, b\}$, поздравили језиком који је конгруентан са $a+b$ по модулу $n-1$, а учесници a и n, $a \neq n$, поздравили језиком који је конгруентан са $2a$ по модулу $n-1$. Тада се учесник нумерисан са a, за $a \neq n$, поздравио на језицима који су по модулу $n-1$ конгруентни са $a+i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, па како ови бројеви дају различите остатке при дељењу са $n-1$, то се учесник нумерисан са a поздравио на свих $n-1$ језика. Учесник нумерисан са n поздравио се на језицима који су по модулу $n-1$ конгруентни са $2i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, па како ови бројеви дају различите остатке при дељењу са $n-1$, то се и учесник нумерисан са n поздравио на свих $n-1$ језика.

Трећи разред - А категорија

1. Приметимо да за функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисану са $f(x) = \sin^2 x$ важи $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$. Зато је

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sin^{2n} x + c \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^{2n} x = 1)$$
$$\Leftrightarrow (\forall y \in [0, 1])(y^n + cy(1-y) + (1-y)^n - 1 = 0).$$

Посматрајмо полином $P(y) = y^n + cy(1-y) + (1-y)^n - 1$. Ако је $P(y) = 0$ за свако $y \in [0, 1]$, то полином P има бесконачно много нула, па је P нула полином. Обрнуто, ако је P нула полином важи $P(y) = 0$, за $y \in [0,1]$. Дакле, тражена константа c постоји акко $P(y) \equiv 0$. Посматрајмо најпре случај $n > 3$. На основу биномне формуле закључујемо да је за парне бројеве n степен полинома P једнак n, а за непарне бројеве n једнак $n-1$. Овим смо доказали да за $n > 3$ полином $P(y)$ није нула полином, па c не постоји. Остаје да размотримо случајеве $n \in \{1,2,3\}$. За $n = 1$ имамо $P(y) = -cy^2 + cy$, што је нула полином акко је $c = 0$. За $n = 2$ имамо $P(y) = (2-c)y^2 + (c-2)y$, што је нула полином акко је $c = 2$. За $n = 3$ имамо $P(y) = (3-c)y^2 + (c-3)y$, што је нула полином акко је $c = 3$. Дакле, c постоји ако и само је $n \leqslant 3$.

Друго решење. Да би тражена једнакост важила за свако $x \in \mathbb{R}$, она мора важити и за $x = \pi/4$ и $x = \pi/3$. Заменом ових вредности редом добијамо

$$c = 4 - \frac{1}{2^{n-3}}, \qquad c = \frac{1}{3} \cdot \left(16 - \frac{3^n + 1}{4^{n-2}}\right).$$

Зато, за постојање тражене константе c потребно је да важи $12 - \dfrac{3}{2^{n-3}} = 16 - \dfrac{3^n+1}{4^{n-2}}$. Сређивањем последње једнакости добијамо

$$3^n + 1 = 2^{2n-2} + 3 \cdot 2^{n-1}. \qquad (*)$$

Како за $n \geqslant 5$ важи неједнакост $2^{2n-2} > 3^n$ (што се може доказати принципом математичке индукције) и $3 \cdot 2^{n-1} > 1$, то је за $n \geqslant 5$ у $(*)$ лева страна већа од десне. За $n < 5$ провером добијамо да једнакост $(*)$ важи за $n \in \{1,2,3\}$. Овим је доказано да за $n > 3$ тражено c не постоји. Размотримо сада случајеве $n \leqslant 3$. Није тешко уверити се да за $n = 1$, $n = 2$, односно $n = 3$, константе $c = 0$, $c = 2$, односно $c = 3$, задовољавају услов задатка.

2. Претпоставимо да матрица са наведеним особинама постоји. Означимо њену детерминанту са d. На основу Коши-Бинеове теореме имамо $-2 = \det A^k = (\det A)^k = d^k$ и $4 = \det A^n = (\det A)^n = d^n$. Одавде је $d^{2k} = d^n$, па је $|d|^{2k} = |d|^n$. Како је $|d| > 1$, а експоненцијална функција са основом већом од 1 строго растућа, добијамо $2k = n$. Међутим, тада би важило $(A^k)^2 = A^n$, што није тачно. Дакле, матрица са наведеним особинама не постоји.

3. Нека је $d = n^2 + a$. Како је $n = 1$ решење задатка, претпоставимо да је $n > 1$. Тада d дели $(n^4+1) - (n^4 - a^2) = a^2 + 1$, тј. $(n^2 + a) \cdot b = a^2 + 1$, за неко $b \in \mathbb{N}$. Из ове једнакости је

$$a^2 - ba + 1 - n^2 b = 0, \qquad (*)$$

па је $3n + 7 \geqslant a = \dfrac{b}{2} + \dfrac{\sqrt{4n^2b + b^2 - 4}}{2}$. Приметимо да за $b \geqslant 13$ важи $b + \sqrt{4n^2b + b^2 - 4} > 13 + 7n > 14 + 6n$, што је у контрадикцији са

претходном неједнакошћу, па је $b \leqslant 12$. Из $b \mid a^2+1$ следи да b не може бити дељив са 4, а ни са простим бројем облика $4k-1$ (јер тада -1 није квадратни остатак). Дакле, $b \notin \{3,4,6,7,8,9,11,12\}$ (ово се може доказати и директно, без коришћења претходно наведених чињеница). Даље, не може бити ни $b=1$, јер једначина $n^2=a^2-a+1$, због $(a-1)^2 < a^2+1-a < a^2$, нема решења у скупу природних бројева. За $b=2$ је $n^2=\dfrac{(a-1)^2}{2}$, што такође није могуће. Дакле, $b \in \{5,10\}$.
Нека је $b=5$. Тада је $5n^2=a^2-5a+1 \equiv (a-1)^2 \pmod 3$, па су бројеви n и $a-1$ дељиви са 3. Међутим, тада $9 \mid 3a=(a-1)^2-5n^2$, па је и a дељиво са 3, што није могуће.
Најзад, нека је $b=10$. Решавањем једначине $(*)$ добијамо $a=5+\sqrt{10n^2+24}$, а услов $a \leqslant 3n+7$ еквивалентан је са $0 \geqslant n^2-12n+20$, односно $n \leqslant 10$. Како је $10n^2+24$ потпун квадрат, то је n паран (у супротном је $10n^2+24 \equiv 2 \pmod 4$). Провером добијамо да је за $n \leqslant 10$ број a природан једино за $n \in \{2,10\}$. За $n=2$ број $d=17$, а за $n=10$ број $d=137$, задовољава услове задатка.
Тражени бројеви су $1, 2$ и 10.

4. Означимо тражени полупречник са r. Нека је са $S(X)$ означена површина фигуре X.
Важи $S(ABD)=r(AB+AD+BD)/2$ и $S(ACD)=r(AD+AC-CD)/2$ (за извођење ове формуле погледати решење 2. задатка за 2. разред), па је

$$\frac{BD}{CD}=\frac{S(ABD)}{S(ACD)}=\frac{AB+AD+BD}{AC+AD-CD}.$$

Користећи $AB=AC$, одавде добијамо $BD(AB+AD-CD)=CD(AB+AD+BD)$, односно $2BD\cdot CD=(BD-CD)(AB+AD)$. Даље, по Стјуартовој теореми је $AB^2-AD^2=BD\cdot CD$, па заменом у претходну једнакост добијамо $BD-CD=2(AB-AD)$.
Сада имамо $h_b \cdot AC = 2S(ABC)=2S(ABD)+2S(ACD)=r(AB+AD+BD)+r(AC+AD-CD)=r(2AB+2AD+BD-CD)=4r\cdot AB$. Дељењем са AB добијамо тражено тврђење.

5. Сваком скупу A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, можемо доделити једну n-торку чија је l-та координата, за $1 \leqslant l \leqslant n$, једнака 1 ако $l \in A_i$, а 0 иначе. Да би тражени услов био задовољен потребно је да за свако l, $1 \leqslant l \leqslant n$, постоји барем једно i, $1 \leqslant i \leqslant k$, тако да је l-та координата низа додељеног скупу A_i једнака 1. Зато l-те координате скупова $A_1, A_2, \ldots, A_k$ можемо одабрати на 2^k-1 начина, за свако $1 \leqslant l \leqslant n$, па самим тим k-торки $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ има $(2^k-1)^n$. (Тангента 63, стр. 12, M932)

Четврти разред - А категорија

1. Како је $(m+n)c=mb+na$, а $(m+n)a < mb+na < (m+n)b$, то је

$a < c < b$. Из услова задатка следи да је $p(x) = (x-a)^m(x-b)^n$. Даље

$$\begin{aligned} p'(x) =& m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + (x-a)^m n(x-b)^{n-1} \\ =& (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}((m+n)x - (mb+na)), \end{aligned}$$

па је $p'(c) = 0$ и $p'(x)$ непрекидна функција. Нека је $\varepsilon > 0$ такво да је $a < c-\varepsilon < c+\varepsilon < b$. Тада за $c < d < c+\varepsilon$ важи $(d-a)^{m-1} > 0$, $(d-b)^{n-1} < 0$ (јер је n паран) и $(m+n)d-(mb+na) = (m+n)(d-c) > 0$, односно $p'(d) < 0$. Слично, за $c-\varepsilon < d < c$ важи $p'(d) > 0$, што доказује да је c локални максимум дате функције.

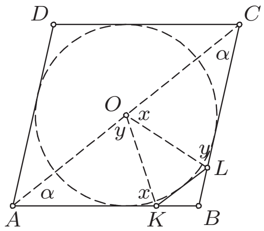
2. Приметимо да из $a*b = a*d$ следи $a+b+c = (a*b)*c = (a*d)*c = a+d+c$ и одатле $b = d$. Слично, из $a*b = d*b$ следи $a = d$. Сада из $(a*b)*c = (b*a)*c = a+b+c$ добијамо $a*b = b*a$. Означимо $x = a*0$. Тада је $x*0 = (a*0)*0 = a$, па је $2x = (x*0)*x = a*x = x*a = (a*0)*a = 2a$, дакле $x = a*0 = a$. Коначно, коришћењем последње особине добијамо $a*b = (a*b)*0 = a+b$.

3. Користићемо следеће познато тврђење:

> Природан број се може представити као збир два квадрата ако и само ако се сваки његов прост делилац облика $4k-1$, $k \in \mathbb{N}$, јавља са парним експонентом.

Како је НЗД$(x-1, x+1) \in \{1,2\}$, из претходног тврђења закључујемо да су $x-1$ и $x+1$ збирови два квадрата ако и само ако је то и њихов производ x^2-1. Ово је, опет, еквивалентно постојању целих бројева v и w за које је $x^2-1 = (x-v)^2+w^2$. Сређивањем добијамо $v^2+w^2+1 = 2vx$, па $v \mid w^2+1$, односно $w^2+1 = uv$. Коначно $2x = u+v$, а $uv-1 = w^2$, односно $uv-1$ је потпун квадрат.

4. Нека је O центар круга уписаног у ромб. Означимо $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$, $\sphericalangle AKO = \sphericalangle OKL = x$ и $\sphericalangle KLO = \sphericalangle OLC = y$. Из збира углова четвороугла $AKLC$ је $360^\circ = 2\alpha + 2x + 2y$, тј. $\alpha + x + y = 180^\circ$. Даље, из збира углова троугла AKO је $\sphericalangle KOA = y$, а из збира углова троугла CLO је $\sphericalangle LOC = x$.



Ок 2013 4А 4

Дакле, троуглови KOA и OLC су слични, па имамо $AK \cdot CL = AO \cdot CO = AO^2$. Аналогно је и $AN \cdot CM = AO^2$, одакле следи $KA/AN = MC/CL$. Како је још и $\sphericalangle NAK = \sphericalangle LCM$, троуглови KAN и MCL су слични, па је $\sphericalangle AKN = \sphericalangle CML$, тј. $KN \parallel LM$.

5. Користићемо следеће тврђење:

Нека је $a, b \in \mathbb{N}$. Тада се a (једнаких) објеката може рапоредити у b непразних група на $\binom{a-1}{b-1}$ начина.

Размотримо прво случај када је $k = 2r-1$ непаран број. Тада тражени низови могу бити облика $J_1N_1J_2N_2\ldots J_rN_r$ или $N_1J_1N_2J_2\ldots N_rJ_r$, где су J_i и N_i, за $1 \leqslant i \leqslant r$, непразни низови јединица и нула, редом. Да бисмо добили низ који је неког од ових облика довољно је распоредити m јединица у r непразних група и n нула у r непразних група. Дакле, низова првог и другог облика има по $\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}$, па је укупан број низова једнак $2\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}$.
У случају да је $k = 2r$ паран број тражени низови могу бити облика $J_1N_1J_2N_2\ldots J_rN_rJ_{r+1}$ или $N_1J_1N_2J_2\ldots N_rJ_rN_{r+1}$, где су опет J_i и N_i, за $1 \leqslant i \leqslant r$, непразни низови јединица и нула, редом. Да бисмо добили низ првог облика довољно је распоредити m јединица у $r+1$ непразну групу и n нула у r непразних група, а да бисмо добили низ другог облика довољно је распоредити m јединица у r непразних група и n нула у $r+1$ непразну групу. Дакле, тражени број низова у овом случају једнак је

$$\binom{m-1}{r}\binom{n-1}{r-1} + \binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r}.$$

(Тангента 62, стр. 15, М906)

Први разред - Б категорија

1. Из услова задатка је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$. Како је $\overrightarrow{MA} = -\vec{b}$, то је из претходног $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}$. Тачке A, O и C су колинеарне, па је $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AC}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, а како су тачке B, O и D колинеарне добијамо $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BD}$. Даље, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} + \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$, па како је $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, из претходних једнакости добијамо

$$2\vec{b} = \lambda(2\vec{b} + \vec{a}) - \mu(\vec{a} - \vec{b}) = (\lambda - \mu)\vec{a} + (2\lambda + \mu)\vec{b}.$$

Дакле, $0 = \lambda - \mu$ и $2 = 2\lambda + \mu$. Решавањем овог система добијамо $\lambda = \mu = 2/3$, па је

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -\frac{2}{3}\cdot\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\cdot\left(2\vec{a} + \vec{b}\right).$$

(Тангента бр. 62, стр. 36, зад. 3)

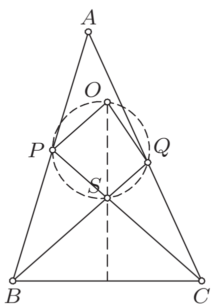
2. Тражене једнакости следе из

$$f(1-x) = \frac{((1-x)^2-(1-x)+1)^3}{(1-x)^2(1-x-1)^2} = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}+1\right)^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{x}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)^3}{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1-x}{x}\right)^2} = \frac{\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6}}{\frac{(1-x)^2}{x^4}} = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

3. Бројеви 9^a и 2013^c дељиви су са 3, па бројеви 2^b и 2014^d дају исти остатак при дељењу са 3. Приметимо да број 2014 даје остатак 1 при дељењу са 3, па и сваки његов степен даје остатак 1 при дељењу са 3. Самим тим, 2^b даје остатак 1 при дељењу са 3. Приметимо да је $2^{2k}=4^k$ и $2^{2k+1}=2^{2k}\cdot 2=4^k\cdot 2$, за свако $k\in\mathbb{N}$, па 2^{2k} даје остатак 1 при дељењу са 3, а 2^{2k+1} остатак 2 при дељењу са 3. Дакле, b мора бити паран број. Одавде је $b\geqslant 2$, па је $2^b=4\cdot 2^{b-2}$ дељиво са 4. Бројеви 9 и 2013 дају остатак 1 при дељењу са 4, па и бројеви 9^a и 2013^c дају остатак 1 при дељењу са 4. Одавде закључујемо да 2014^d даје остатак 2 при дељењу са 4, па како је 2014 паран, то је $d=1$. Међутим, бројеви a, b, c су природни, па је $9^a+2^b+2013^c\geqslant 9+2+2013>2014$, што доказује да дата једначина нема решења у скупу природних бројева.

4. Нека је S тачка пресека правих BQ и CP, а $\alpha=\sphericalangle BAC$. Из збира углова троугла BCS имамо $180^\circ=\sphericalangle SBC+\sphericalangle SCB+\sphericalangle BSC=2\alpha+\sphericalangle BSC$, па је $\sphericalangle BSC=180^\circ-2\alpha$. Даље, посматрајући кружницу описану око троугла APQ имамо $\sphericalangle POQ=2\sphericalangle PAQ=2\alpha$, а како је $\sphericalangle PSQ=\sphericalangle BSC=180^\circ-2\alpha$ (као унакрсни углови), то је $\sphericalangle POQ+\sphericalangle PSQ=180^\circ$, па тачке P, O, Q и S леже на истој кружници k.



Ок 2013 1Б 4

Како је $PO=QO$ (као полупречници кружнице описане око троугла PAQ), то су углови над овим тетивама кружнице k једнаки, односно $\sphericalangle PSO=\sphericalangle OSQ$. Из једнакости унакрсних углова закључујемо да је права OS симетрала $\sphericalangle BSC$. Како је $\sphericalangle SBC=\sphericalangle BCS$, то је троугао BCS једнакокраки, па се симетрала $\sphericalangle BSC$ поклапа са симетралом странице BC, односно OS је симетрала странице BC.

5. Број 5555 је једини четвороцифрени број који има четири цифре 5. Одредимо колико има четвороцифрених бројева који имају тачно три цифре 5. Има тачно њих 8 код којих цифра хиљада није једнака 5 (цифра хиљада не може бити 0 или 5, док су остале цифре једнаке 5) и тачно њих $3\cdot 9=27$ код којих цифра јединица, десетица или стотина није

једнака 5. Одредимо колико има четвороцифрених бројева којима су тачно две цифре једнаке 5. Уколико је цифра хиљада једнака 5, тада имамо три могућности за преосталу цифру 5 (она може бити цифра јединица, десетица или стотина), а затим за сваку од преостале две цифре имамо 9 могућности, тј. ових бројева има $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$. Уколико цифра хиљада није једнака 5, цифру хиљада можемо одабрати на 8 начина, а затим и место за преосталу цифру која није једнака 5 на 3 начина и ту цифру на 9 начина, тј. ових бројева има $8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$.
Бројева са траженим својством има $1+8+27+243+216 = 495$. (Тангента 64, стр. 34, зад. 6)

Други разред - Б категорија

1. Нека је $z = x + yi$, за $x, y \in \mathbb{R}$. Дате једнакости се своде на

$$(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2, \qquad x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2.$$

Прва једначина еквивалентна је са $x + y = 3$, а друга са $x = 2$. Одавде добијамо $x = 2$ и $y = 1$, па је тражени број $z = 2 + i$. (Тангента 69, стр. 29, зад. 5)

2. Како парабола додирује x-осу у тачки $(2, 0)$ имамо да је $y = a(x-2)^2$, а како је њен пресек са y-осом тачка $(0, 8)$ имамо и $8 = a(0-2)^2$. Одавде је $a = 2$, па је дата парабола $y = 2(x-2)^2$. Приметимо да је за све (x, y) са параболе испуњено $y \geqslant 0$, и да ако је $y \leqslant 2012$, важи и $-2012 < -\sqrt{1006} + 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{1006} + 2 < 2012$, па је довољно испитати колико целобројних тачака (m, n) таквих да је $n \leqslant 2012$ лежи на параболи. Такође, за сваку целобројну вредност броја $m \in (-\sqrt{1006}+2, \sqrt{1006}+2)$, постоји тачно једна целобројна вредност броја n таква да је тачка (m, n) на датој параболи. Дакле, број тражених тачака је једнак броју целих бројева у интервалу $(-\sqrt{1006} + 2, \sqrt{1006} + 2)$, тј. 63.

3. Уколико је број p једнак 0, тј. уколико је $m = n$ (овакве бројеве n називамо *палиндромима*), тада је $p_1 = 0$ па је тражени број једнак 0. Уколико је $p \neq 0$ тада је сваки од наредних бројева већи од нуле, као збир цифара ненула целог броја. Приметимо да збир цифара броја даје исти остатак као и сам број при дељењу са 9. Самим тим, како бројеви m и n имају исти збир цифара, они дају исти остатак при дељењу са 9, па је p дељив са 9. Коришћењем истог својства добијамо да је p_1, као и сваки наредни број, дељив са 9. Самим тим, p_k је дељив са 9, једноцифрен и већи од нуле, па је $p_k = 9$.

4. Нека је $ABCD$ дати четвороугао и O пресек његових дијагонала. Применом неједнакости троугла на $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ добијамо редом

$$AB + BC > AC,\ BC + CD > BD,\ CD + DA > AC,\ DA + AB > BD.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$2(AB + BC + CD + DA) > 2(AC + BD),$$

односно да је збир дијагонала четвороугла мањи од обима.
Применом неједнакости троугла на $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle DAO$ добијамо редом

$$AO + BO > AB,\ BO + CO > BC,\ CO + DO > CD,\ DO + AO > DA.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$2(AO + BO + CO + DO) > AB + BC + CD + DA,$$

односно $AC+BD > (AB+BC+CD+DA)/2$, тј. збир дијагонала четвороугла је већи од полуобима. (Тангента 65, стр. 38, зад. 4)

5. Означимо са a исказ „Аца је Истинољубић”, тј. $a =$„Аца је Истинољубић” (тада имамо да је $\neg a =$„Аца је Лажетић”), са $b =$„Бане је Истинољубић” и са $c =$„Влада је Истинољубић”. Ацина изјава, „Или ја или Бане припадамо различитој породици од остале двојице”, се може представити као:

$$A = \Big((a \veebar b) \wedge (a \veebar c)\Big) \veebar \Big((a \veebar b) \wedge (b \veebar c)\Big).$$

Означимо леви део овог исказа са $L = \Big((a \veebar b) \wedge (a \veebar c)\Big)$, а десни са $D = \Big((a \veebar b) \wedge (b \veebar c)\Big)$. Направимо одговарајућу таблицу истинитости (у горњој половини таблице, где је Аца Лажетић, морамо да ставимо и исказ $\neg A$, јер је он тачан):

a	b	c	$a \veebar b$	$a \veebar c$	$b \veebar c$	L	D	$L \veebar D$	$\neg A$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	
1	0	1	1	0	1	0	1	1	
1	1	0	0	1	1	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	

Исказ A је тачан у следећим случајевима: $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$; $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ и $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. Међутим, у случајевима $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ и $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ Аца увек лаже, тако да он није могао да изговори исказ A. Дакле, дати исказ је тачан само у случајевима $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ и $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. Ако Аца лаже, онда посматрамо негацију $\neg A$ и она је тачна у случајевима $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ и $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$. Заједничко за сва ова 4 случаја је $b = 0$, тј. Бане је Лажетић.

Трећи разред - Б категорија

1. Из датих услова је $\vec{m}\cdot\vec{m} = |\vec{m}|^2 = 4$, $\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 9$, $\vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2 = 4$, $\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\pi/3) = 3$, $\vec{m}\cdot\vec{p} = |\vec{m}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos(\pi/2) = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{p} = |\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos(\pi/3) = 3$, па је

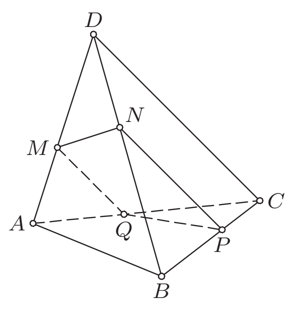
$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= (3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})\cdot(3\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p})\\ &= 9\vec{m}\cdot\vec{m}+4\vec{n}\cdot\vec{n}+\vec{p}\cdot\vec{p}+12\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{p}-6\vec{m}\cdot\vec{p} = 100,\\ |\vec{b}|^2 &= (\vec{m}-\vec{n}+2\vec{p})\cdot(\vec{m}-\vec{n}+2\vec{p})\\ &= \vec{m}\cdot\vec{m}+\vec{n}\cdot\vec{n}+4\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{p}+4\vec{m}\cdot\vec{p} = 11.\end{aligned}$$

Одавде је $|\vec{a}| = 10$ и $|\vec{b}| = \sqrt{11}$. (Тангента 66, стр. 38, зад. 2)

2. Видети 1. задатак за 2. разред А категорије.

3. Претпоставимо прво да је $x \geqslant 7$. Тада лева страна једначине даје остатак 6 при дељењу са 7. Међутим, како квадрат ниједног природног броја не даје остатак 6 при дељењу са 7 (могући остаци су: $0^2 = 0$, $(\pm1)^2 = 1$, $(\pm2)^2 = 4$, $(\pm3)^2 \equiv 2 \pmod 7$), у овом случају једначина нема решења. Преостаје још да се испитају случајеви $1 \leqslant x \leqslant 6$. Директном провером се установљава да су решења $(x, y) \in \{(4, 10), (5, 14)\}$ (тада имамо $4! + 76 = 24 + 76 = 100 = 10^2$ и $5! + 76 = 120 + 76 = 196 = 14^2$).

4. Нека је $AB = a$ и $CD = b$. Изаберимо тачку P на страници BC тако да важи $BP/PC = a/b$. Затим, изаберимо тачку $N \in BD$ тако да је $NP \parallel CD$, а затим и тачку $M \in AD$ тако да је $MN \parallel AB$. Коначно изаберимо тачку $Q \in AC$ тако да је $MQ \parallel DC$. Довољно је доказати да је $MNPQ$ ромб, јер тада тачке M, N, P, Q припадају истој равни. Због начина одабира тачака и Талесове теореме је $BP/PC = BN/ND = AM/MD = AQ/QC$, па је $QP \parallel AB$, и самим тим $MNPQ$ је паралелограм. Даље, из $QP \parallel AB$ и $NP \parallel DC$ је по Талесовој теореми $\dfrac{QP}{a} = \dfrac{CP}{BC}$ и $\dfrac{NP}{b} = \dfrac{BP}{BC}$, па је $\dfrac{NP}{QP} = \dfrac{b\cdot BP}{a\cdot CP} = 1$, што завршава наш доказ.



Ок 2013 3Б 4

5. Одредимо ученике који ће седети у првом реду. Ово су ученици који раде прву или другу групу задатака, тако да то можемо урадити на 2 начина. Затим, у сваком реду треба распоредити по 10 ученика у произвољном редоследу. За сваки ред то можемо урадити на 10! начина, тако да је тражени број распореда једнак $2 \cdot (10!)^2$. (Тангента 62, стр. 38, зад. 1)

Четврти разред - Б категорија

1. Нека је дужина странице квадрата који чини основу кутије једнака a, а дужина висине једнака b. Тада је $V = a^2 b$, а површина кутије једнака је $P = a^2 + 4ab$. По услову задатка, потребно је одредити a и b тако да при услову $V = a^2 b$ површина кутије буде минимална. Из датог услова је $b = \dfrac{V}{a^2}$, па је потребно одредити минималну вредност фунцкије

$$P(x) = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Да би у тачки a функција $P(x)$ имала минимум потребно је да је $0 = P'(a) = 2a - \dfrac{4V}{a^2}$, односно $a = \sqrt[3]{2V}$. Како је $P'(x) > 0$ за $x > a$, а $P'(x) < 0$ за $0 < x < a$, у тачки a је минимум функције $P(x)$.
Дакле, да би се употребило минимално материјала потребно је направити кутију чија је основа квадрат странице $a = \sqrt[3]{2V}$, а висина $b = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$. (Тангента 66, стр. 38, зад. 3)

2. Уведимо смене $x(x-1) = t$ и $a(a-1) = b$ и решимо једначину

$$0 = b^2(t+1)^3 - (b+1)^3 t^2 = b^2 t^3 - (b^3 + 3b + 1)t^2 + 3b^2 t + b^2. \qquad (*)$$

Из полазне једначине знамо да је b једно решење једначине $(*)$, па дељењем $b^2 t^3 - (b^3 + 3b + 1)t^2 + 3b^2 t + b^2$ са $t - b$ добијамо

$$0 = (t-b)(b^2 t^2 - (3b+1)t - b).$$

Самим тим, решења једначине $(*)$ су $t_1 = b$ и

$$t_{2,3} = \frac{3b + 1 \pm \sqrt{9b^2 + 6b + 1 + 4b^3}}{2b^2}.$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned} 4b^3 + 9b^2 + 6b + 1 =& 4a^3(a-1)^3 + 9a^2(a-1)^2 + 6a(a-1) + 1 \\ =& 4a^6 - 12a^5 + 21a^4 - 22a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\ =& (2a^3 - 3a^2 + 3a - 1)^2, \end{aligned}$$

па је $t_2 = \dfrac{a}{(a-1)^2}$, а $t_3 = \dfrac{-2a^3+6a^2-6a+2}{2a^2(a-1)^2} = \dfrac{-2(a-1)^3}{a^2(a-1)^2} = -\dfrac{a-1}{a^2}$.
Дакле, довољно је решити следеће три једначине

$$x(x-1) = a(a-1), \quad x(x-1) = \frac{a}{(a-1)^2}, \quad x(x-1) = -\frac{a-1}{a^2}.$$

Решења прве једначине су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a(a-1)}}{2} = \dfrac{1 \pm (2a-1)}{2}$, односно $x_1 = a$ и $x_2 = 1-a$. Решења друге једначине су

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a}{(a-1)^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \left|\frac{a+1}{a-1}\right|\right),$$

односно $x_3 = \dfrac{a}{a-1}$ и $x_4 = \dfrac{1}{1-a}$. Решења треће једначине су

$$x_{5,6} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(a-1)}{a^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \left|\frac{a-2}{a}\right|\right),$$

односно $x_5 = \dfrac{a-1}{a}$ и $x_6 = \dfrac{1}{a}$. Како је $x_i \notin \{0,1\}$, за $1 \leqslant i \leqslant 6$, то су x_i, за $1 \leqslant i \leqslant 6$, решења почетне једначине.

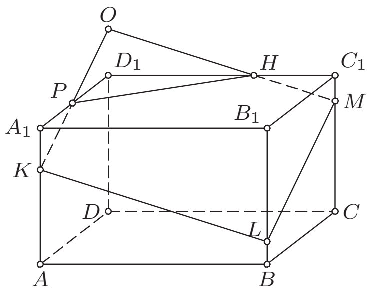
3. Приметимо да је $\lfloor x + \frac{1}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor$, $\lfloor x + \frac{3}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x + \frac{2}{6} \rfloor$ и $\lfloor x + \frac{5}{6} \rfloor \geqslant \lfloor x + \frac{4}{6} \rfloor$. Дата једначина еквивалентна је систему који се добија када се свуда неједнакост замени једнакошћу.
Број $x \in \mathbb{R}$ није решење једначина $\lfloor x + \frac{1}{6} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ ако и само ако је $x \in \left[k + \frac{5}{6}, k+1\right)$ за неки цео број k. Самим тим, скуп решења претходне једначине је $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{5}{6}, k+1\right)$. Слично, једначина $\lfloor x + \frac{3}{6} \rfloor = \lfloor x + \frac{2}{6} \rfloor$ има скуп решења $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{3}{6}, k+\frac{4}{6}\right)$, а једначина $\lfloor x + \frac{5}{6} \rfloor = \lfloor x + \frac{4}{6} \rfloor$ скуп решења $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{1}{6}, k+\frac{2}{6}\right)$. Скуп решења почетне једначине је пресек ових скупова, односно:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[k, k+\frac{1}{6}\right) \cup \left[k+\frac{2}{6}, k+\frac{3}{6}\right) \cup \left[k+\frac{4}{6}, k+\frac{5}{6}\right) \right).$$

4. Пошто је пресек равни и паралелопипеда петоугао, то раван пресеца 5 страна паралелопипеда. Нека је $KLMHP$ дати петоугао, тако да је $K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$, $H \in C_1D_1$ и $P \in D_1A_1$ (видети слику). Тачке K, L, M, H се налазе у истој равни, па како се праве KL и HM не секу, то је $KL \parallel HM$. Слично је $LM \parallel KP$.
Продужимо дужи KP и MH до њиховог пресека O. Тада је $KLMO$ паралелограм, па је

$$LM = KO = KP + PO \qquad \text{и} \qquad LK = MO = MH + HO.$$

Како је $LM, KP, LK, MH \in \{1,2\}$, добијамо да је $LM = LK = 2$ и $KP = MH = 1$, а затим и $HO = PO = 1$.
Размотримо сада $\triangle POH$. Како је $PH \in \{1,2\}$ и због неједнакости троугла $PH < PO + HO = 1 + 1 = 2$, добијамо да је $PH = 1$, тј. да је $\triangle POH$ једнакостранични. Одатле имамо да је $\sphericalangle PHO = \sphericalangle HPO = 60^\circ$, па је $\sphericalangle PHM = \sphericalangle HPK = 120^\circ$. Из паралелограма $KLMO$ је $\sphericalangle KLM = \sphericalangle POH = 60^\circ$ и $\sphericalangle LKP = \sphericalangle LMH = 120^\circ$.
Дакле, четири угла датог петоугла једнака су 120°, а један 60°.



Ок 2013 4Б 4

5. Број бијекција на скупу од четири елемента је једнак броју пермутација на скупу од четири елемента, односно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Како константних функција има 4, а укупан број функција је 4^4 (сваки елемент скупа $\{a, b, c, d\}$ се може сликати у произвољан елемент скупа $\{a, b, c, d\}$), то је тражени број једнак $4^4 - 24 - 4 = 228$. (Тангента 69, стр. 12, М1062)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 16.03.2013.

Први разред, А категорија

1. Означимо са T_i, $i = \overline{1, 2013}$, тежиште троугла $A_iB_iC_i$. Нека је $\vec{a_i} = \overrightarrow{TA_i}$, $\vec{b_i} = \overrightarrow{TB_i}$ и $\vec{c_i} = \overrightarrow{TC_i}$, $i = \overline{1, 2013}$, где је $T \equiv T_1$. Докажимо најпре да је $T_1 \equiv T_2$, што за последицу има $T_i \equiv T$, $i = \overline{1, 2013}$. Пошто је T тежиште троугла $A_1B_1C_1$, важи $\vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c_1} = 0$. Из дефиницјије тачака A_2, B_2 и C_2 имамо $\vec{a_2} = \frac{1}{k+1}(\vec{b_1} + k\vec{c_1})$, $\vec{b_2} = \frac{1}{k+1}(\vec{c_1} + k\vec{a_1})$ и $\vec{c_2} = \frac{1}{k+1}(\vec{a_1} + k\vec{b_1})$, па је $\vec{a_2} + \vec{b_2} + \vec{c_2} = 0$, односно T је тежиште троугла $A_2B_2C_2$.
Из дефиниције тачке A_3 имамо

$$\begin{aligned}\vec{a_3} =& \frac{1}{k+1}\left(k\vec{b_2} + \vec{c_2}\right) = \frac{1}{(k+1)^2}\left(k\vec{c_1} + k^2\vec{a_1} + \vec{a_1} + k\vec{b_1}\right)\\ =& \frac{1}{(k+1)^2}\left(k(\vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c_1}) + (k^2 - k + 1)\vec{a_1}\right) = \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} \cdot \vec{a_1}.\end{aligned}$$

Последња једнакост указује да су тачке T, A_1 и A_3 колинеарне, па права A_1A_3 садржи тачку T. Аналогно, праве B_1B_3 и C_1C_3 садрже тачку T, па се праве A_1A_3, B_1B_3 и C_1C_3 секу у тачки T. Слично, закључујемо да се праве $A_{2k+1}A_{2k+3}$, $B_{2k+1}B_{2k+3}$ и $C_{2k+1}C_{2k+3}$, $k = \overline{1, 1005}$, секу у тачки T. Дакле, $T \in A_1A_{2013}$, $T \in B_1B_{2013}$, $T \in C_1C_{2013}$, чиме је доказ завршен.

2. Нека је $k^3 + pk^2 = a^3$, тј.

$$k^2(k + p) = a^3. \tag{$*$}$$

Докажимо најпре да $p \nmid k$. Претпоставимо супротно, тј. да је $k = pl$ за неко $l \in \mathbb{Z}$. Тада се посматрана једначина своди на $p^2l^2(pl + p) = a^3$, тј. $p^3l^2(l + 1) = a^3$. Одатле $l^2(l + 1) = l^3 + l^2$ мора бити потпун куб. Међутим, важи $l^3 < l^3 + l^2 < l^3 + 3l^2 + 3l + 1 = (l + 1)^3$, контрадикција. Тиме је доказано да $p \nmid k$, тј. да су k и p узајамно прости. Међутим, тада су и k и $k + p$ узајамно прости, па из једначине $(*)$ закључујемо да k^2 и $k + p$ оба морају бити потпуни кубови. Одатле је $k = k_1^3$ и $k_1^3 + p = b^3$, па је $p = b^3 - k_1^3 = (b - k_1)(b^2 + bk_1 + k_1^2)$. Како је p прост број и $b^2 + bk_1 + k_1^2 > 1$, мора важити $b - k_1 = 1$, тј. $k_1 = b - 1$. Дакле, $p = b^3 - (b-1)^3 = 3b^2 - 3b + 1$, одакле непосредно следи тврђење задатка.

3. Докажимо да је вредност израза $(ab - 1)(ac - 1)(ad - 1)$ једнака нули.

Коришћењем датих услова имамо

$$\begin{aligned}(ab-1)(ac-1)(ad-1) &= a^3bcd - a^2(bc+bd+cd) + a(b+c+d) - 1\\ &= a^2 - a(abc+abd+acd) + a(b+c+d) - 1\\ &= a^2 - a(abc+abd+acd+bcd) + abcd + a(a+b+c+d) - a^2 - 1\\ &= a\left(a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right) = 0.\end{aligned}$$

Овим смо доказали да је $1 \in \{ab, ac, ad\}$, па како је $abcd = 1$, то је и $1 \in \{cd, bd, bc\}$, а самим тим су барем два од бројева ab, ac, ad, bc, bd, cd једнака.

4. Разложимо таблу на четири скупа поља чији су елементи означени истим бројем на наредној слици:

1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3

Др 2013 1А 4

Посматрајмо краљеве који су постављени на таблу. Краљеви унутар истог скупа се не нападају, па уколико нека три од означена четири скупа садрже по бар 5 краља, доказ је завршен. У супротном у бар два од ових скупова се не налази више од 4 краља. Међутим, тада се у два скупа налази бар $41 - 8 = 33$ краља, што је немогуће јер сваки скуп садржи по 16 поља.

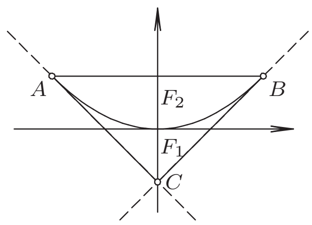
Други разред - А категорија

1. У зависности од $D = b^2 - 4c$ разликујемо следеће случајеве:
1° $D \geqslant 0$. Тада су решења $x_{1,2}$ реални бројеви, те је дати услов еквивалентан са $x_{1,2} \in [-1, 1]$. Означимо квадратну функцију $x^2 + bx + c$ са $f(x)$. Потребни и довољни услови да су обе њене нуле у интервалу $[-1, 1]$ су:

$$f(-1) \geqslant 0, \quad f(1) \geqslant 0, \quad -1 \leqslant -\frac{b}{2} \leqslant 1.$$

Решавањем одговарајућих неједначина добијамо $-2 \leqslant b \leqslant 2$, $c \geqslant b-1$, $c \geqslant -b-1$. Тачке равни bOc које задовољавају ове услове су све тачке изнад правих $c = b-1$ и $c = -b-1$, за које важи $-2 \leqslant b \leqslant 2$. Уз то из услова $D \geqslant 0$ имамо да важи $c \leqslant b^2/4$. Последњу неједнакост

задовољавају тачке испод графика квадратне функције $c = b^2/4$. Како је $b^2/4 \geqslant b - 1$, то је график квадратне функције $c = b^2/4$ изнад праве $c = b - 1$, при чему имају заједничку тачку $(2, 1)$. Слично, због $b^2/4 \geqslant -b-1$, график функције $c = b^2/4$ је изнад праве $c = -b-1$, при чему имају заједничку тачку $(-2, 1)$. Из свега наведеног добијамо да су решења у овом случају све тачке области F_1 (видети слику уз задатак).
2° $D < 0$. У овом случају решења су коњуговано-комплексни бројеви. Зато је $|x_1| = |x_2|$. Како је на основу Вијетових формула $|c| = |x_1x_2| = |x_1||x_2| = |x_1|^2$, то је $|x_1| \leqslant 1 \Leftrightarrow |c| \leqslant 1$. Дакле, у овом случају добијамо тачке изнад графика функције $c = b^2/4$ за које важи $c \in [-1, 1]$. Тиме смо добили област F_2.
Тражена област F представља унију области F_1 и F_2, односно то је троугао са теменима $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$ и $C(0, -1)$. Зато је површина области F једнака 4.



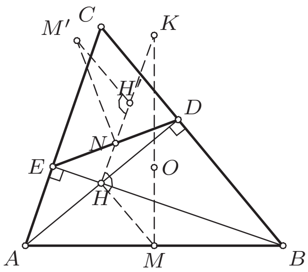
Др 2013 2А 1

2. Нека су избрисане тачке T_1, T_2, $\ldots$, T_k. Нека су међу преосталим тачкама дата два дисјунктна скупа $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ и $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Према описаној особини, у полазном скупу постоји тачка која је повезана дужима означеним са $+$ са тачкама $A_1, A_2, \ldots, A_m, T_1, T_2, \ldots, T_k$, а означеним са $-$ са тачкама $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Она је очигледно различита од свих избрисаних. Дакле, скуп преосталих тачака задовољава дату особину.

3. Докажимо да Аца има победничку стратегију.
Поделимо картице у парове: $(2^0, 2^{1007}), (2^1, 2^{1008}), \ldots, (2^{1006}, 2^{2013})$. Тада Аца бира картице тако да из сваког пара изабере тачно једну картицу (што он очигледно може учинити).
Бројеви који се налазе на картицама у истом пару дају исти остатак при дељењу са $2^{1007} - 1$. Заиста, парови су облика $(2^i, 2^{i+1007})$, за $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 1006\}$, а важи $2^{i+1007} - 2^i = 2^i(2^{1007} - 1)$, што је дељиво са $2^{1007} - 1$. Како Аца из сваког пара бира по једну картицу то је $A \equiv 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{1006} \equiv 2^{1007} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{1007} - 1}$, па је број A дељив са $2^{1007} - 1$. Како је $A \equiv B \pmod{2^{1007} - 1}$, то је и B дељиво са $2^{1007} - 1$, а самим тим НЗД$(A, B) \geqslant 2^{1007} - 1$, чиме је доказ завршен.

4. Означимо са M и N редом средишта дужи AB и DE. Нека је H' тачка симетрична тачки H у односу на N. Тада је четвороугао $EHDH'$

паралелограм (јер му се дијагонале полове), па је $\sphericalangle H'DE = \sphericalangle DEB = 90^\circ - \sphericalangle CED$ и $\sphericalangle H'ED = \sphericalangle EDH = 90^\circ - \sphericalangle EDC$. Из ових једнакости закључујемо да H' ортоцентар троугла CDE.
Троуглови CAB и CDE су слични (четвороугао $ABDE$ је тетиван, па је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEC$). При тој сличности тачкама M и H у $\triangle CAB$ одговарају тачке N и H' у $\triangle CDE$. Нека је M' тачка симетрична тачки M у односу на тачку N. Докажимо да у претходној сличности тачка M' одговара тачки K. Троугао MED је једнакокраки, па како је N средиште дужи ED, то је $MN \perp ED$, и самим тим $M'E = M'D$. Такође, четвороугао $EMDM'$ је паралелограм, па је $\sphericalangle M'DE = \sphericalangle MED$. Како је M центар кружнице описане око тетивног четвороугла $ABDE$, то је $\sphericalangle EMD = 2\sphericalangle EBD$, па је $\sphericalangle MED = \sphericalangle ACB$, а самим тим и $\sphericalangle M'DE = \sphericalangle ACB$. Како је K ортоцентар троугла AOB, то је $\sphericalangle KAB = 90^\circ - \sphericalangle OBA = \sphericalangle ACB$, па је $\triangle DEM' \sim \triangle ABK$, што је и требало доказати. Сада је $\sphericalangle NH'M' = \sphericalangle MHK$, па како је $\sphericalangle MHH' = \sphericalangle NH'M'$ (јер је $HMH'M'$ паралелограм), то је $\sphericalangle MHK = \sphericalangle MHN$, односно тачке H, N и K су заиста колинеарне.



Др 2013 2А 4

Трећи разред - А категорија

1. За сваку k-торку скуп-интервала $(A_1, A_2 \ldots, A_k)$ која задовољава услове задатка урадићемо следеће: напишемо редом елементе скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, на сваки од крајева сваког од скуп-интервала допишемо „преграду”, и затим бројеве заменимо кружићима. На пример, за $k = 2$, $n = 4$ и скупове $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, написали бисмо

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & | & | & 2 & | & 3 & 4 & | \\ \circ & | & | & \circ & | & \circ & \circ & | \end{array}$$

На овај начин добијамо распоред n кружића и $2k$ преграда. С обзиром да је скуп A_1 непразан, између k-те и $(k+1)$-ве преграде мора се налазити бар један кружић. Дакле, ако уклонимо један кружић између те две преграде, добијамо распоред $n-1$ кружића и $2k$ преграда. Приметимо и да је ова веза k-торки скуп-интервала који задовољавају услове задатка и распореда $n-1$ кружића и $2k$ преграда бијективна, па тражених распореда има $\binom{n+2k-1}{2k}$.

2. Нека је S скуп свих реалних константи c које задовољавају наведени услов.
Докажимо најпре да је свака нула посматраног полинома по модулу већа од $\frac{1}{2}$. Претпоставимо супротно, нека је $P(\alpha)=0$ и $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$. Тада је на основу продужене неједнакости троугла

$$\begin{aligned}|a_0| &= |a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha| \leqslant |a_n\alpha^n| + |a_{n-1}\alpha^{n-1}| + \ldots + |a_1\alpha| \\ &= |a_n||\alpha|^n + |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + \ldots + |a_1||\alpha| \leqslant |a_0| \cdot \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2}\right) \\ &= |a_0| \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Из последње неједнакости добијамо да је $|a_0|=0$, што је у супротности са условима задатка. Дакле, $\frac{1}{2} \in S$.
Посматрајмо полином $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ и докажимо да за $n>2$ овај полином има нулу у интервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$. Коришћењем неједнакости

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \text{ за све } n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad 2^{n-1} \geqslant n+1, \text{ за } n>2,$$

имамо

$$\begin{aligned}P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) \cdot \frac{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})^n}{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})} - 1 \\ &= \frac{n+1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) - 1 \\ &= \frac{2 - \frac{n+1}{2^n} \cdot (1+\frac{1}{n})^n}{n-1} > \frac{2-\frac{n+1}{2^n} \cdot e}{n-1} \geqslant \frac{2-\frac{1}{2}\cdot e}{n-1} > 0.\end{aligned}$$

Како је још $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^n} < 0$, а $P_n(x)$ непрекидна функција, закључујемо да постоји број $a_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$ такав да је $P_n(a_n)=0$.
Дакле, $c < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $c \leqslant \frac{1}{2}$, односно $\frac{1}{2}$ је тражена константа.

3. Пронађимо најпре тражене бројеве којима је цифра јединица (у декадном запису) једнака 1. Број 1 очигледно задовољава услове задатка. Нека је зато $n = \overline{1a_1\ldots a_k 1}$, $k \geqslant 0$, палиндром за који су и бројеви

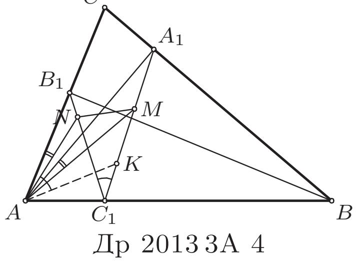
$n^2, n^3, \ldots$ палиндроми. Они се завршавају цифром 1. Доказаћемо да постоји степен броја n који не почиње цифром 1. Прва цифра броја n^l, $l \in \mathbb{N}$, једнака је целом делу броја $(1+h)^l$, где је $h = \overline{0, a_1 \ldots a_k 1}$. Нека је i највећи природан број за који је $(1+h)^i < 2$ (такав број постоји, јер је $1+h<2$, а $\lim_{n\to+\infty}(1+h)^n = +\infty$). Тада је

$$2 \leqslant (1+h)^{i+1} < 2(1+h) < 4,$$

те је прва цифра броја $(1+h)^{i+1}$, а тиме и броја n^{i+1}, једнака 2 или 3, па n^{i+1} није палиндром. Дакле, једини број који се завршава цифром 1 и задовољава услове задатка је број 1.

Ако је n број који задовољава услове задатка чије је последња цифра једнака 9, онда би и бројеви $n^2, (n^2)^2, (n^2)^3, \ldots$ били палиндроми са последњом цифром 1, што смо доказали да није могуће. Слично, ако је последња цифра броја n цифра 3 или 7 и ако би он задовољавао услов задатка, онда би и бројеви $n^4, (n^4)^2, (n^4)^3, \ldots$ били палиндроми са последњом цифром 1, што опет није могуће. Уколико је последња (а тиме и прва) цифра броја n цифра 5 или 6, онда број n^2 почиње цифром 2 или 3 ако се n завршава цифром 5, а цифром 3 или 4 у случају да се n завршава цифром 6. Зато се број n не може завршавати цифром 5 или 6. У случају да се број n завршава цифром 2 или 8, онда би се бројеви $n^4, (n^4)^2, (n^4)^3, \ldots$ завршавали цифром 6 и били би палинроми, што смо видели да није могуће. Слично, ако је последња цифра броја n једнака 4, онда би се бројеви $n^2, (n^2)^2, (n^2)^3, \ldots$ завршавали цифром 6 и били би палиндроми, што је немогуће. Како последња цифра броја n не може бити 0, доказали смо да је једини број са траженом особином број $n = 1$.

4. По услову задатка је $\sphericalangle MAN = \sphericalangle A_1AC$, а како је $2 \sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1C_1B_1$, то је $\sphericalangle MAN = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1C_1B_1$. Нека права симетрична правој AN у односу на праву AM сече праву A_1C_1 у тачки K. Претпоставимо да се K налази на дужи A_1C_1 (слично поступамо и у случају да K није на дужи A_1C_1). Тада из $\sphericalangle NAK = 2 \sphericalangle MAN = \sphericalangle NC_1K$ следи да тачке K, C_1, A и N леже на истом кругу. Даље, $\sphericalangle NKA = \sphericalangle NC_1A = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle NAK$, па је троугао ANK једнакокраки, тј. $AK = AN$. Дакле, троуглови AMK и AMN су подударни, па је $\sphericalangle KMA = \sphericalangle AMN$, што је и требало доказати.



Др 2013 3А 4

Четврти разред - А категорија

1. Полазна једначина је дефинисана за бројеве који задовољавају услове $x > 0$ и $x^2 - x + 1 > 0$. Како друга неједнакост важи за све реалне бројеве, то је довољно да је $x > 0$. Посматрајмо израз $L(x) = \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{x}} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Како је $x > 0$ важи

$$L(x) = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}}} = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x - 1 + \frac{1}{x}}},$$

па је $L\left(\frac{1}{x}\right) = L(x)$. Због ове једнакости закључујемо да уколико је неки број x решење једначине $L(x) = a$, онда је решење те једначине и број $\dfrac{1}{x}$. Дакле, да би једначина $L(x) = a$ имала тачно једно решење, нужно је да бројеви x и $\dfrac{1}{x}$ буду једнаки, па како је $x > 0$, то је $x = 1$. Пошто је $L(1) = 4$, једина вредност параметра a која може бити решење задатка је $a = 4$.

Решимо једначину $L(x) = 4$. Нека је $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Наша једначина је еквивалентна са $y \cdot \left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{y^2-3}}\right) = 4$, при чему важи

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2.$$

Функција $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-3}}$ је строго опадајућа, па је њена највећа вредност $f(2) = 1$. Зато је (на истом интервалу) функција $g(y) = y \cdot \left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{y^2-3}}\right)$ као производ две позитивне растуће функције растућа. Дакле, једначина $g(y) = 4$ може имати (по y) највише једно решење. Очигледно решење те једначине је $y = 2$, а због наведеног и једино. Из $y = 2$ добијамо $x = 1$. Овим смо доказали да је 4 једина вредност за a таква да полазна једначина има тачно једно решење.

Друго решење. Нека је $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$L(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Није тешко утврдити да је

$$L'(x) = \frac{3}{2} \cdot (x-1) \cdot \left(x^{-\frac{3}{2}} + (x^2-x+1)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

одакле закључујемо да је посматрана функција строго опадајућа на интервалу $(0,1)$, док је на интервалу $(1,+\infty)$ строго растућа. Одавде, како је $\lim_{x\to 0_+} L(x) = +\infty$ и $\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$, због непрекидности функције L имамо да једначина $L(x) = a$ има јединствено решење акко је $a = L(1) = 4$ (за $a > 4$ посматрана једначина има тачно два решења, док за $a < 4$ нема решења). Из свега наведеног закључујемо да је $a = 4$ једина вредност параметра која задовољава услове задатка.

2. Обележимо са A скуп свих скоро бинарних бројева, а са B скуп $B = \{n - b(n) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$, где је $b(n)$ број јединица у бинарном запису броја n. Скупови A и B су једнаки. Заиста, за сваки скоро бинарни број m важи

$$m = (2^{a_1} - 1) + \ldots + (2^{a_k} - 1) = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k} - b(2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k}) \in B.$$

Важи и обрнуто, ако је $m \in B$, тада је $m = n - b(n)$ за неки природан број n већи од 1, па је $n = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k}$ и зато је

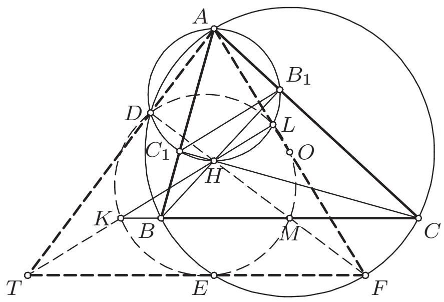
$$m = n - b(n) = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k} - k = (2^{a_1} - 1) + \ldots + (2^{a_k} - 1) \in A$$

(уколико у претходном изразу постоји сабирак $2^0 - 1$ њега изостављамо, тј. можемо претпоставити да је $a_i \in \mathbb{N}$, за $1 \leqslant i \leqslant k$).
Пронађимо 2014^{2012}-ти број по величини у скупу B. Функција $f(n) = n - b(n)$ је неопадајућа и притом важи:

$$f(2n) = f(2n+1) \quad \text{и} \quad f(2n+1) < f(2n+2),$$

за сваки природан број n. Заиста, паран број $2n$ у бинарном запису се завршава са 0, па је $b(2n+1) = b(2n) + 1$ и отуд $f(2n) = f(2n+1)$; ако се непаран број $2n+1$ у бинарном запису завршава са тачно k јединица ($k \geqslant 1$), тада је $b(2n+1) = b(2n+2) - 1 + k \geqslant b(2n+2)$ и зато је $f(2n+1) < f(2n+2)$. Дакле, важи $f(2) = f(3) < f(4) = f(5) < f(6) = f(7) < \ldots$ па је k-ти број по величини у скупу B заправо $f(2 \cdot k) = f(2 \cdot k + 1)$ и зато је $N = f(2 \cdot 2014^{2012}) = 2 \cdot 2014^{2012} - b(2 \cdot 2014^{2012})$. С обзиром да $2^{2013} \mid 2 \cdot 2014^{2012}$, а $2^{2014} \nmid 2 \cdot 2014^{2012}$, закључујемо да су последњих 2014 цифара броја $2 \cdot 2014^{2012}$ у бинарном запису $\overline{1\underbrace{00\ldots00}_{2013}}$. Последњих 2014 цифара у бинарном запису броја $2 \cdot 2014^{2012} - 1$ су $\overline{0\underbrace{11\ldots11}_{2013}}$. Остале цифре у бинарном запису оба броја се подударају и зато је $b(2 \cdot 2014^{2012} - 1) - b(2 \cdot 2014^{2012}) = 2012$, одакле следи да је $N - 2013 = f(2 \cdot 2014^{2012}) - 2013 = f(2 \cdot 2014^{2012} - 1)$, па је и $N - 2013$ скоро бинарни број.

3. Означимо са O центар описане кружнице троугла ABC, а са M и O_1 редом средишта дужи BC и AH. Како је $O_1H = OM$ и $O_1H \parallel OM$ четвороугао O_1HMO је паралелограм, па је $MH \parallel OO_1$. Тачке A и D су пресечне тачке кружница описаних око троуглова HB_1C_1 и ABC, па је AD нормално на праву која пролази кроз центре ових кружница, односно $OO_1 \perp AD$. Како је и $DH \perp AD$, закључујемо да тачке D, H, M припадају једној правој. Овој правој припада и тачка F симетрична са A у односу на O (AF је пречник кружнице описане око троугла ABC, па је $\sphericalangle ADF = 90^\circ$). Због $EF \perp AE$ и $BC \perp AE$ закључујемо да је $EF \parallel BC$, па је H ортоцентар троугла AFT, где је T пресечна тачка правих AD и EF. Одавде је $TH \perp AF$, а важи и $\ell \perp AF$, па T припада правој ℓ и $TH \cap AF = \{L\}$. Даље, како је $BCFE$ једнакокраки трапез, то је $ME = MF$, па из $HM = EM$ (јер су тачке H и E симетричне у односу на праву BC) закључујемо да је $HM = MF$. Сада, из Талесове теореме имамо $TK/KH = FM/MH = 1$, па је K средиште TH, односно тачке D, E, K, L, M и O леже на Ојлеровој кружници троугла AFT.



Др 2013 4А 3

4. Претпоставимо да за $n \in \mathbb{N}$ описана функција f постоји. За $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ и $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, означимо са $\varphi_i(\mathbf{x})$ низ из скупа $\{0,1\}^n$ који се добија заменом броја x_i бројем $1 - x_i$ у низу $\mathbf{x}$. Прецизније,

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

За свако $\mathbf{x}$ имамо да је $\{f(\varphi_1(\mathbf{x})), \ldots, f(\varphi_n(\mathbf{x}))\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, јер је због датог услова $f(\varphi_i(\mathbf{x})) \neq f(\varphi_j(\mathbf{x}))$, за $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
Означимо са S скуп свих парова $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$ таквих да се $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ разликују у тачно једној координати и за које је $f(\mathbf{y}) = 1$. На основу претходног закључујемо да је $|S| = 2^n$. Нека је $k = \left|f^{-1}\{1\}\right|$. За свако $\mathbf{y} \in f^{-1}\{1\}$ постоји тачно n низова $\mathbf{x}$ који се од $\mathbf{y}$ разликују у тачно једној координати, па је $|S| = k \cdot n$. Из овога следи да $n \mid 2^n$ па постоји природан број m такав да је $n = 2^m$.
Претпоставимо сада да је m дати цео број и да је $n = 2^m$. За свако $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, означимо $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Дефинишимо $f(\mathbf{x})$ као ним збир свих оних индекса $i < n$ за које је $x_i = 1$ уколико је овај збир различит од 0 или као n ако је овај ним збир једнак 0 (ним збир бројева a и b је број чија је k-та цифра у бинарном запису једнака 1 ако и само ако су k-те цифре у бинарним записима бројева a и b различите). Приметимо да је на овај начин функција f добро дефинисана, јер је ним збир

бројева мањих од 2^m увек мањи од 2^m. Такође, за низове $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ који се разликују у тачно две координате i и j, не може важити $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, јер су у супротном бројеви i и j једнаки. Дакле, свако $n = 2^m$ задовољава услове задатка.

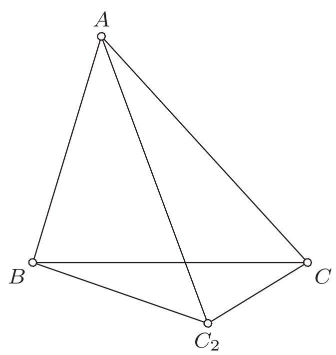
Први разред - Б категорија

1. Нека је $f(x) = |x-1| + |x+2| + 2x$. Тада је

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 2x+3, & -2 \leqslant x < 1 \\ 4x+1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Дакле, $f(x) \geqslant -1$, па за $a < -1$ једначина нема решења. Ако је $a = -1$ скуп решења једначине је $(-\infty, -2]$. Даље, приметимо да за $-2 \leqslant x < 1$ важи $-1 \leqslant f(x) < 5$, а за $x \geqslant 1$ важи $f(x) \geqslant 5$. Дакле, ако је $-1 < a < 5$ једначина се своди на $2x+3 = a$, а за $a \geqslant 5$ на $4x+1 = a$. У првом случају решење је $x = \dfrac{a-3}{2}$, а у другом $x = \dfrac{a-1}{4}$. (Тангента 68, стр. 9, М1036)

2. Нека је C_2 тачка у унутрашњости угла BAC таква да је $\sphericalangle BAC_2 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ и $AC_2 = AC$. Тада због начина одабира тачке C_2 и $AB = A_1B_1$ важи $\triangle ABC_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$, па је $BC_2 = B_1C_1$. Како је $AC = AC_2$, то је $\triangle ACC_2$ једнакокраки, па је $\sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AC_2C$. Сада је $\sphericalangle BCC_2 < \sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AC_2C < \sphericalangle BC_2C$, па како је над већим углом троугла BCC_2 већа страница, то је $BC > BC_2 = B_1C_1$, што је и требало доказати.

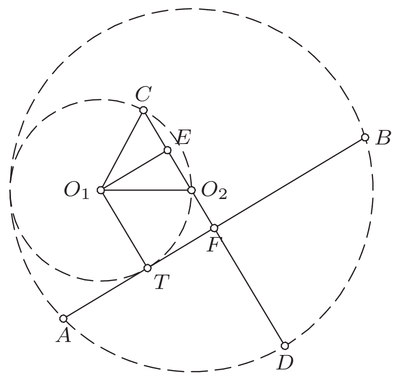


Др 2013 1Б 2

3. Нека су дати бројеви $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$. Међу датим бројевима постоје 3 парна и три непарна и тачно један од бројева a и $a+5$ је непаран. Нека је a непаран број (слично поступамо уколико је $a+5$ непаран). Посматрајмо бројеве a, $a+2$ и $a+4$. Приметимо да је тачно један од ових бројева дељив са 3 (ако је a дељив са 3 тада $a+2$ и $a+4$ нису дељиви са 3; ако a даје остатак 1 при дељењу са 3 број $a+2$ је дељив са 3, а $a+4$ није; ако a даје остатак 2 при дељењу са 3 тада је $a+4$ дељив са 3, а $a+2$ није). Нека је b онај од бројева $a+2$ и $a+4$ који није дељив са 3. Докажимо да b задовољава услове задатка. Претпоставимо супротно. Нека је $c \in \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\} \setminus \{b\}$

број који није узајамно прост са b и нека је $d > 1$ заједнички делилац бројева b и c. Тада d дели и $b - c$, па како је $|b - c| \leqslant 4$ (због начина одабира броја b), то d може бити 2 или 3. Међутим, b није дељив ни са 2 ни са 3. Контрадикција.

4. Нека је E средиште дужи CO_2. Како је $O_1C = O_1O_2 = r$ троугао O_1O_2C је једнакокраки, па је O_1E његова висина, тј. $\sphericalangle O_1EO_2 = 90°$. Нека је пресек правих CD и AB тачка F. По услову задатка је $\sphericalangle TFE = 90°$, а AB је тангента кружнице k_1, па је и $\sphericalangle O_1TF = 90°$. Дакле, четвороугао O_1EFT је правоугаоник, па је $EF = O_1T = r$. Нека је $CE = x$. Према претходном је $O_2E = CE = x$, $O_2F = EF - O_2E = r - x$, и $CF = CE + EF = r + x$. Такође, $FD = O_2D - O_2F = 2r - (r - x) = r + x$, па је $CF = FD$, што је и требало доказати.



Др 2013 1Б 4

5. У доказу ћемо више пута користити чињеницу да уколико су l и l' праве неке равни такве да се на првој налази m, а на другој n тачака, при чему се праве l и l' не секу у некој од ових $m + n$ тачака, тада парови ових тачака одређују укупно $mn + 2$ правих.
Нека су дате тачке $T = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$. Нека је $m(T)$ највећи број тачака овог скупа које леже на истој правој. Размотримо следеће случајеве:
1° $m(T) = 6$. Тада је $p = 1$.
2° $m(T) = 5$. Тада је пет тачака колинеарно, а преостала тачка са сваком од ових тачака одређује по једну праву, тако да је $p = 1 + 5 = 6$.
3° $m(T) = 4$. Нека су без умањења општости колинеарне тачке A_1, A_2, A_3, A_4 и нека се оне налазе на правој l. Тачке A_5 и A_6 одређују праву l'. Ако се праве l и l' не секу или се секу у тачки различитој од тачака скупа T, тада је $p = 4 \cdot 2 + 2 = 10$. Ако се праве l и l' секу у тачки из T то мора бити нека од тачака A_1, A_2, A_3, A_4 (јер је иначе $m(T) = 5$), па је $p = 3 \cdot 2 + 2 = 8$.
4° $m(T) = 3$. Нека су без умањења општости тачке A_1, A_2 и A_3 колинеарне и нека одређују праву l. Претпоставимо прво да су и преостале тачке колинеарне и да одређују праву l'. Тада пресек правих l и l' (ако постоји) не може бити тачка из T (јер је иначе $m(T) = 4$), па је $p = 3 \cdot 3 + 2 = 11$. Претпоставимо зато да тачке A_4, A_5 и A_6 нису колинеарне. Уколико праве A_4A_5, A_5A_6 и A_6A_4 не секу l у некој од тачака из T, тада је $p = 3 \cdot 3 + 3 + 1 = 13$ (парови тачака из T одређују

праве A_iA_j, за $1 \leqslant i \leqslant 3$, $4 \leqslant j \leqslant 6$, праве A_4A_5, A_5A_6, A_6A_4 и праву l). Претпоставимо зато да, без умањења општости, права A_4A_5 сече праву l у тачки A_3. Тада, парови тачака скупа $T \setminus \{A_6\}$ одређују $2 \cdot 2 + 2 = 6$ правих. Уколико се A_6 налази на некој од ових правих, без умањења општости, на A_1A_4, тада је $p = 6 + 3 = 9$. Уколико се A_6 не налази ни на једној од ових правих, тада је $p = 6 + 5 = 11$.
5° $m(T) = 2$. У овом случају сваке две од датих тачака одређују различиту праву, тако да је $p = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
Дакле, могуће вредности за p су из скупа $\{1, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15\}$.

Други разред - Б категорија

1. Приметимо да је дати израз дефинисан ако и само ако је $x \geqslant 30$. Међутим, за $x \geqslant 30$ важи $2x + 4 \geqslant 64$, те је

$$\sqrt{x-30} + \sqrt{2x+4} \geqslant 0 + 8 = 8,$$

односно једино решење дате једначине је $x = 30$. (Тангента 62, стр. 3, Пример 5)

2. Да би израз на левој страни неједначине био дефинисан мора да важи $x^3 + x^4 - x^5 \neq 0$, односно $x^3(1 + x - x^2) \neq 0$. Зато дата неједначина има смисла за $x \in D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
Нека је $f(x) = 3^x + 4^x - 5^x$ и $g(x) = x^3 + x^4 - x^5$. Решимо неједначине $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$. Неједначина $f(x) \geqslant 0$ након дељења са 5^x еквивалентна је са $h(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x \geqslant 1$. Како је $h(x)$ збир две строго опадајуће функције (пошто је експоненцијална функција са основом између 0 и 1 строго опадајућа) и сама је строго опадајућа. Зато једначина $h(x) = 1$ може имати највише једно решење. Очигледно решење те једначине је $x = 2$, па су због наведене монотоности функције $h(x)$ сва решења неједначине $h(x) \geqslant 1$ заправо $x \leqslant 2$. Дакле, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$.
Решавање неједначине $g(x) > 0$ своди се на решавање квадратне неједначине, уз разликовање случајева $x > 0$, односно $x < 0$. Добијамо

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

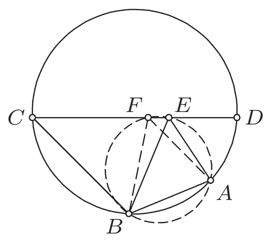
Решења полазе неједначине су сви бројеви x за које важи $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$, или $f(x) \leqslant 0$ и $g(x) < 0$. Одавде, имајући на уму скуп D на ком полазна неједначина има смисла, добијамо да су решења полазне неједначине

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup [2, \infty).$$

3. Једно решење је $k = 1$: тада лева страна износи $2!! = 2$, а десна $(1 \cdot 2)!! = 2!! = 2$. Докажимо да не постоји $k \geqslant 2$ које је решење дате једначине. Претпоставимо супротно. Приметимо да је први двоструки факторијел с леве стране састављен само од једног чиниоца, други од два чиниоца, трећи од три чиниоца, итд. последњи од k чинилаца. Дакле, лева страна производ је укупно $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ чинилаца. Двоструки факторијел на десној страни састављен је такође од $\frac{k(k+1)}{2}$ чинилаца. Приметимо да су чиниоци с леве стране једнаки, редом: 2, 2, 4, 2, 4, 6, …, $2k-2$, $2k$, док су чиниоци с десне стране једнаки: 2, 4, 6, 8, …, $k(k+1)-2$, $k(k+1)$. Одавде је јасно да је сваки чинилац на левој страни мањи од њему одговарајућег по реду на десној страни (осим првог, када важи једнакост), те је за $k \geqslant 2$ лева страна строго мања од десне.

4. Нека је $\sphericalangle DAB = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$, а F пресечна тачка симетрала угла ABC и странице CD. Нека је E тачка странице CD таква да је $DA = DE$. По услову задатка је $EC = CB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па је $\sphericalangle ADE = 180^\circ - \beta$, и самим тим

$$\sphericalangle DAE = \frac{180^\circ - \sphericalangle ADE}{2} = \frac{\beta}{2}.$$



Др 2013 2Б 4

Аналогно је $\sphericalangle CBE = \alpha/2$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $\alpha > \beta$ (у случају $\alpha = \beta$ је $E = F$). Тада важи распоред $D - E - F - C$, па из $\sphericalangle AEF = 180^\circ - \beta/2$ и $\sphericalangle ABF = \beta/2$, закључујемо да је $BFEA$ тетиван четвороугао. Одавде је $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EBF = (\alpha - \beta)/2$, па је $\sphericalangle DAF = \beta/2 + (\alpha - \beta)/2 = \alpha/2$, што је и требало доказати.

5. Одредимо прво број решења једначине $x + y = n - k$ у датом скупу. Тада је $x \leqslant n - k$ и за свако $0 \leqslant x \leqslant n - k$ постоји тачно једно $0 \leqslant y \leqslant n$ тако да је $x + y = n - k$. Дакле, ова једначина има $n - k + 1$ решења. Докажимо и да једначина $x + y = n + k$ има $n - k + 1$ решења у датом скупу. Како је $0 \leqslant y \leqslant n$, то је $x \geqslant k$. Такође, за свако $k \leqslant x \leqslant n$ постоји тачно једно $0 \leqslant y \leqslant n$ такво да важи $x + y = n + k$, па и ова једначина има тачно $n - k + 1$ решења у датом скупу.

Трећи разред - Б категорија

1. Одредимо једначину праве q која садржи висину из темена C датог троугла. Коефицијент правца праве која садржи основицу AB је $1/2$, па је коефицијент правца праве q једнак -2. Дакле, једначина ове праве је $y = -2x + c$, за неко $c \in \mathbb{R}$. Како је $C \in q$, то је $8 = -2 + c$, па је $c = 10$, односно једначина праве q је $y = -2x + 10$. Нека је $D(u, v)$

тачка пресека правих p и q. Тада је $u-2v=-20$ и $2u+v=10$, па је $D(0,10)$. Дакле, $CD=\sqrt{(1-0)^2+(8-10)^2}=\sqrt{5}$, па како је CD висина троугла ABC, а 15 његова површина, то је $AB=6\sqrt{5}$. Нека је $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ (можемо претпоставити да је $a_2\leqslant b_2$). Тачка D је средиште дужи AB, па је $a_1+b_1=0$ и $a_2+b_2=20$, а самим тим $a_2\leqslant 10$. Даље, према претходном је $3\sqrt{5}=AD=\sqrt{(a_1-0)^2+(a_2-10)^2}$, па како је $a_1=2a_2-20$, то квадрирањем претходне једнакости добијамо

$$45=(2a_2-20)^2+(a_2-10)^2=5a_2^2-100a_2+500,$$

тј. $a_2=7$. Сада је $A(-6,7)$ и $B(6,13)$, па је једначина праве која садржи крак $AC: x-7y+55=0$, а праве која садржи крак $BC: x-y+7=0$. (Тангента 63, стр. 33, зад. 2)

2. Нека је $S=\sin 26^\circ\cdot\sin 58^\circ\cdot\sin 74^\circ\cdot\sin 82^\circ\cdot\sin 86^\circ\cdot\sin 88^\circ\cdot\sin 89^\circ$. Користећи $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$, као и $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, имамо

$$\begin{aligned}S&=\cos 64^\circ\cdot\cos 32^\circ\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 1^\circ\\&=\frac{\cos 64^\circ\cdot\cos 32^\circ\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 1^\circ\cdot\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}\\&=\frac{\cos 64^\circ\cdot\cos 32^\circ\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\sin 2^\circ}{2^1\sin 1^\circ}\\&=\frac{\cos 64^\circ\cdot\cos 32^\circ\cdot\cos 16^\circ\cdot\cos 8^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\sin 4^\circ}{2^2\sin 1^\circ}\\&=\ldots=\frac{\cos 64^\circ\cdot\sin 64^\circ}{2^6\sin 1^\circ}=\frac{\sin 128^\circ}{2^7\sin 1^\circ}.\end{aligned}$$

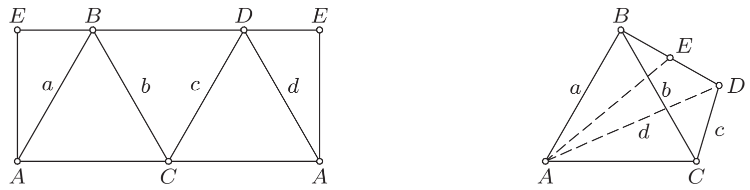
Пошто је $\sin x<x$, за свако позитивно x, а $\sin 128^\circ>\sin 135^\circ$, добијамо

$$S=\frac{\sin 128^\circ}{2^7\sin 1^\circ}>\frac{\sin 135^\circ}{2^7\sin 1^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2^8\sin\frac{\pi}{180}}>\frac{\sqrt{2}}{2^8\cdot\frac{\pi}{180}}=\frac{45\sqrt{2}}{64\pi},$$

што је и требало доказати.

3. Приметимо да је $16^5=2^{20}=(2^{10})^2=1024^2\equiv(-1)^2=1 \pmod{25}$. Одредимо зато остатак при дељењу 3^{2013} са 5. Како је $3^4\equiv 1 \pmod 5$, то је $3^{2013}\equiv 3 \pmod 5$, па је $16^{3^{2013}}\equiv 16^3\equiv -4 \pmod{25}$. При томе $16^{3^{2013}}$ је дељив са 4, па последње две цифре у декадном запису чине број који је дељив са 4 и даје остатак 21 при дељењу са 25. Једини овакав број је 96, па је цифра десетица датог броја 9, а цифра јединица 6.

4. Нека је $ABCD$ правилан тетраедар странице 1. Његова површина је $\sqrt{3}$, па површина листа папира који га прекрива мора бити бар $\sqrt{3}$. На слици је приказан папир површине $\sqrt{3}$ којим се може прекрити дати тетраедар (E је средиште дужи BD).



Др 2013 3Б 4

5. Докажимо да Аца увек може победити без обзира на то како игра Бранко. Наиме, ако Бранко бира $n = 1$ Аца очигледно побеђује, а иначе он игра на следећи начин: у првом потезу бира $m = 5$, а у другом исеца поље које се налази у трећој врсти и другој колони. Претпоставимо да наша тврдња није тачна, тј. да за неко $n \geqslant 2$ Бранко може прекрити добијену таблу триминима. Тада тримино који прекрива поље које се налази у трећој врсти и првој колони преостала два поља има у другој или четвртој врсти. Због симетрије, можемо претпоставити да преостала два поља има у другој врсти. Међутим, тада не постоји тримино који без преклапања са осталима може прекрити прво поље у првој врсти. Контрадикција.

Четврти разред - Б категорија

1. Приметимо да је

$$\begin{aligned}|a| =&\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2013^2+1^2}\\ |b| =&\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(-2013)^2+1^2},\end{aligned}$$

па је $|a| = |b|$.

2. Нека је $p(x) = x^{2013}+x^{2010}+\ldots+x^3+8$ и $q(x) = x^2-x+1$. Приметимо да $q(x)$ има две различите нуле α и β. Множењем једнакости $\alpha^2-\alpha+1 = 0$ са $\alpha+1$ добијамо $\alpha^3+1 = 0$, и слично $\beta^3+1 = 0$.
Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $q(x)$ је степена највише 1, па

$$p(x) = q(x)\cdot r(x) + ax + b, \qquad (*)$$

за неке $r(x) \in \mathbb{R}[X]$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Приметимо да је

$$p(\alpha) = \alpha^{2013} + \alpha^{2010} + \ldots + \alpha^3 + 8 = (\alpha^3)^{671} + (\alpha^3)^{670} + \ldots + \alpha^3 + 8 = 7$$

и слично $p(\beta) = 7$. Сада, заменом $x = \alpha$ и $x = \beta$ у $(*)$ добијамо $7 = a\alpha+b$ и $7 = a\beta + b$, па како је $\alpha \neq \beta$, то је $a = 0$ и $b = 7$, односно тражени остатак је 7. (Тангента 64, стр. 40, зад. 15)

3. Како су $a+1$, $b+1$, $c+1$ и $d+1$ цифре, то је $a, b, c, d \leqslant 8$. Из услова $\dfrac{2n}{3} = \dfrac{2(1000a+100b+10c+d)}{3} = 1000(b+1)+100(a+1)+10(d+1)+c+1$ након сређивања добијамо

$$100(17a - 28b) = 3333 + 28d - 17c. \qquad (*)$$

Како су d и c цифре не веће од 8, имамо

$$-136 = 28 \cdot 0 - 17 \cdot 8 \leqslant 28d - 17c \leqslant 28 \cdot 8 - 17 \cdot 0 = 224,$$

па за десну страну једначине $(*)$ важи $3197 \leqslant 3333 + 28d - 17c \leqslant 3557$. Такође због $(*)$ имамо $100 \mid 3333 + 28d - 17c$, па на основу претходних неједнакости имамо да је $17a - 28b \in \{32, 33, 34, 35\}$. Размотримо зато следеће случајеве:

1° $17a - 28b = 32$. Како 4 дели 28 и 32 то 4 дели a. Како је a цифра (и већа је од 0), то једино може бити $a \in \{4, 8\}$. Непоследном провером за $a = 4$, односно $a = 8$, добијамо $b \notin \mathbb{Z}$. Зато у овом случају нема решења.

2° $17a - 28b = 33$. Из $17(a-b) = 11(3+b)$ добијамо да $11 \mid 17(a-b)$, односно $11 \mid a - b$. Како су a и b цифре, то је $|a-b| < 11$, па је $a = b$. Међутим, за $a = b$ нема решења, јер је $17(a-b) = 0 < 11(3+b)$.

3° $17a - 28b = 34$. Како 17 дели 17 и 34, то $17 \mid b$. Отуда, како је b цифра, мора бити $b = 0$. Тада је $a = 2$. Сада због $(*)$ треба решити једначину $28d - 17c = 67$. Очито c не може бити парна цифра. За $c = 1$ добијамо $d = 3$. Непосредном провером за $c \in \{3, 5, 7\}$ добијамо да $d \notin \mathbb{Z}$. Зато је у овом случају једино решење $n = 2013$.

3° $17a - 28b = 35$. Како 7 дели 28 и 35, то $7 \mid a$. Зато је $a = 7$ (јер је $a \neq 0$), одакле је $b = 3$. Сада остаје да решимо једначину $28d - 17c = 167$. Због $28d \geqslant 167$ имамо $d \geqslant 6$. Непосредном провером за $d \in \{6, 7, 8\}$ добијамо да $c \notin \mathbb{Z}$. Зато и у овом случају нема решења.

Из свега наведеног закључујемо да је једини број који задовољава услове задатка $n = 2013$.

4. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ $(\beta > \gamma)$ и нека је A_1 пресек правих AE и BC. Како је AE пролази кроз ортоцентар троугла ABC, то је $AA_1 \perp BC$. Такође, како је $\sphericalangle HC_1A = \sphericalangle HB_1A = 90^\circ$, то се тачка A налази на кружници описаној око троугла HB_1C_1. Приметимо да је $\sphericalangle HBA_1 = 180^\circ - \sphericalangle BB_1C - \sphericalangle BCB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\sphericalangle EBA_1 = \sphericalangle EAC = 90^\circ - \gamma$ (као углови над тетивом EC кружнице описане око троугла ABC), па како је $\sphericalangle BA_1H = \sphericalangle BA_1E$, то је $\triangle BA_1H \cong \triangle BA_1E$, а самим тим $HA_1 = EA_1$. Сада је $\triangle KHA_1 \cong \triangle KEA_1$, па је $\sphericalangle HKA_1 = \sphericalangle EKA_1$, а самим тим и $\sphericalangle HKE = 2\sphericalangle HKC$. Нека је M тачка пресека правих AB и HL. Тада је $\sphericalangle AMH = \sphericalangle AC_1B_1 = \gamma$ (углови са паралелним крацима), па је $\sphericalangle HKC = \sphericalangle MKC = \sphericalangle MBC - \sphericalangle AMH = \beta - \gamma$, односно $\sphericalangle EKL = 2(\beta - \gamma)$. Даље, $\sphericalangle EDA > \sphericalangle ADH = 90^\circ$ и $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE = \beta + \sphericalangle B_1BC = \beta + 90^\circ - \gamma > 90^\circ$, па како су $\sphericalangle EDA$ и $\sphericalangle EBA$ углови над тетивом EA

кружнице описане око троугла ABC, то је

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle EBA = \beta + \sphericalangle B_1BC = \beta + 90^\circ - \gamma$$

и тачке D и B налазе се са исте стране праве AH. Приметимо да се тачке L и C налазе са исте стране праве AH (јер је $\sphericalangle AHL < 90^\circ$), а тачке D и C са различитих страна праве AH (јер се B и D налазе са исте стране AH). Дакле, тачке D и L налазе се са разних страна праве AH, па је $\sphericalangle LDA = \sphericalangle LHA$ (као углови над тетивом LA кружнице описане око троугла HB_1C_1), а како је $\sphericalangle HAL = \sphericalangle HKC$ (као углови са нормалним крацима), то је $\sphericalangle LDA = 90^\circ - \sphericalangle HAL = 90^\circ - (\beta - \gamma)$. Коначно $\sphericalangle EDL = \sphericalangle EDA - \sphericalangle LDA = \beta + 90^\circ - \gamma - (90^\circ - (\beta - \gamma)) = 2(\beta - \gamma) = \sphericalangle EKL$, па тачке D, L, E и K заиста леже на истој кружници.
(Видети слику уз 3. задатак за 4. разред А категорије.)

5. За сваку k-торку скупова $(A_1, A_2 \ldots, A_k)$ која задовољава услове задатка имамо партицију скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ на $k+1$ скупова – A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus A_2$, $\ldots$, $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus A_k$. Такође, од сваке партиције $(P_1, P_2, \ldots, P_{k+1})$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ на $k+1$ скупова можемо добити једну k-торку $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ са траженом особином (ако је $A_1 = P_1$, $A_2 = P_1 \cup P_2$, $\ldots$, $A_k = P_1 \cup \ldots \cup P_k$ и $\{1, 2, \ldots, n\} = P_1 \cup \ldots \cup P_{k+1}$). Дакле, број тражених k-торки једнак је броју распореда бројева скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ у $k+1$ скупова (сваки број у један скуп), што је могуће урадити на $(k+1)^n$ начина.

Садржај

Прва економска школа – некад и сад 1
Републичка комисија 5
Општинско такмичење, 19.01.2013. 6
Окружно такмичење, 9.02.2013. 11
Државно такмичење, 16.03.2013. 16
Решења задатака општинског такмичења 21
Решења задатака окружног такмичења 38
Решења задатака државног такмичења 54