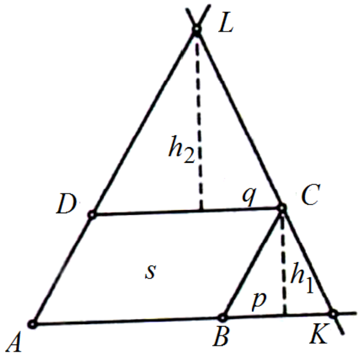
JMMO 1998

1. Низ темето C на паралелограмот $ABCD$ е повлечена права која полуправите AB и AD ги сече во точките K и L соодветно. Изрази ја плоштината s на паралелограмот $ABCD$ преку плоштините p и q на триаголниците BKC и DCL.



Решение. Соодветните агли на триаголниците BKC и DCL се еднакви, па затоа $\triangle BKC \sim \triangle DCL$. Според тоа,

$$h_1 : h_2 = \overline{BK} : \overline{DC},$$

т.е. $h_1 \cdot \overline{DC} = h_2 \cdot \overline{BK}$. Ако последното равенство го помножиме со $h_1 \cdot \overline{DC}$ и искористиме дека

$$h_1 \cdot \overline{DC} = s,\ h_1 \cdot \overline{BK} = 2p, h_2 \cdot \overline{DC} = 2q$$

добиваме

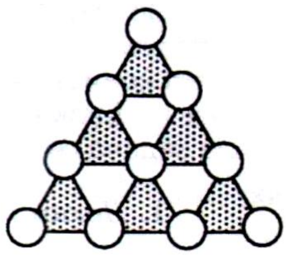
$$s^2 = (h_1 \cdot \overline{DC})^2 = (h_1 \cdot \overline{DC}) \cdot (h_2 \cdot \overline{BK}) = (h_1 \cdot \overline{BK}) \cdot (h_2 \cdot \overline{DC}) = 4pq,$$

т.е. $s = 2\sqrt{pq}$.

2. Определи ги сите прости броеви кои истовремено може да се претставаат како збир на два прости броја и како разлика на два прости броја.

Решение. Нека p е прост број кој истовремено може да се претстави како збир и како разлика на два прости броја. Од тоа што p е збир на два прости броја следува $p > 2$, т.е. p е непарен број. Сега, од тоа што p е збир на два прости броја и е непарен број следува дека еден од собирците во претставувањето е бројот 2. Нека $p = q + 2$, каде q е прост број. Аналогно се докажува дека $p = r - 2$, каде r е прост број. Според тоа, броевите $p-2, p, p+2$ се прости. Броевите $p-2, p, p+2$ се три последователни непарни броја, па затоа еден од нив е делив со 3 и како тие се прости броеви заклучуваме дека еден од нив е еднаков на 3. Јасно, $p - 2 = 3$, од каде следува $p = 5$.

3. Дали може десет реални броја да се запишат во кругчињата на фигурата прикажана на цртежот десно така што збирот на броевите за-

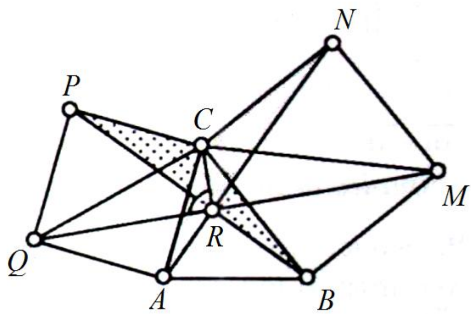


пишани во темињата на секој осенчен триаголник е еднаков на 1997, а збирот на броевите запишани во темињата на секој бел триаголник е еднаков на 1998:

Решение. Нека претпоставиме дека постојат десет броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Збирот на броевите запишаи во темињата на централниот шестаголник да го означиме со s, а бројот запишан во во централното кругче да го означиме со a. Тогаш збирот на броевите запишани во трите осенчени триаголници на шестаголникот е еднаков на $s+3a$, а исто така и збирот на броевите запишани во темињата на трите бели триаголници е еднакв на $s+3a$. Затоа, $s+3a=3\cdot 1997$ и $s+3a=3\cdot 1998$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постојат броеви со саканото својство.

4. Над страните AC и BC на триаголникот ABC, надвор од него, се конструирани квадрати $ACPQ$ и $BMNC$. Докажи дека правите AN, BP и MQ се сечат во една точка.

Решение. Нека правите BP и AN се сечат во точката R (цртеж десно).



Од $\overline{CP}=\overline{CA}$, $\overline{CB}=\overline{CN}$ и

$$\measuredangle ACN=\measuredangle ACB+90^\circ=\measuredangle BCP$$

следува $\triangle ACN\cong\triangle BCP$. Затоа $\measuredangle CPR=\measuredangle CAR$ и $\measuredangle CNR=\measuredangle CBR$. Оттука следува дека точката R припаѓа на опишаната кружница околу квадратот ACP. Но AC е дијаметар на оваа кружнца, па затоа $\measuredangle QRC=90^\circ$. На потполно аналоген начин се докажува дека $\measuredangle MRC=90^\circ$. Според тоа, $\measuredangle MRQ=\measuredangle MRC+\measuredangle CRQ=180^\circ$, што значи дека точката R припаѓа на правата QM, односно дека правите AN, BP и MQ се сечат во точката R.

5. Нека k е природен број и нека

$$P(x)=x^{1998}-x^{1996}+x^4-3kx+3x+1.$$

Докажи дека за секој цел број n важи $P(n)\neq 0$.

Решение. Нека претпоставиме дека постои $t \in \mathbb{Z}$ таков што $P(t) = 0$. Тогаш,

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(x) - P(t) \\
&= x^{1998} - t^{1998} - x^{1996} + t^{1996} + x^4 - t^4 - 3kx + 3kt + 3x - 3t \\
&= (x-t)(x^{1997} + x^{1996}t + \dots + t^{1997}) - (x-t)(x^{1995} + x^{1994}t + \dots + t^{1995}) \\
&\quad + (x-t)(x^3 + x^2t + xt^2 + t^3) - 3k(x-t) + 3(x-t) \\
&= (x-t)Q(x)
\end{aligned}$$

каде $Q(t)$ е полином со целобројни коефициенти. Тогаш

$$\begin{aligned}
P(-1) &= 3k - 1 = (-1-t)Q(-1) \\
P(0) &= 1 = -tQ(0) \\
P(1) &= 5 - 3k = (1-t)Q(1).
\end{aligned}$$

Броевите $-1-t, -t, 1-t$ се три последователни природни броја, па затоа еден од нив е делив со 3. Последното значи дека еден од броевите $3k-1, 1, 5-3k$ е делив со 3, што е противречност. Конечно, од добиената противречност седува дека за секој цел број n важи $P(n) \neq 0$.