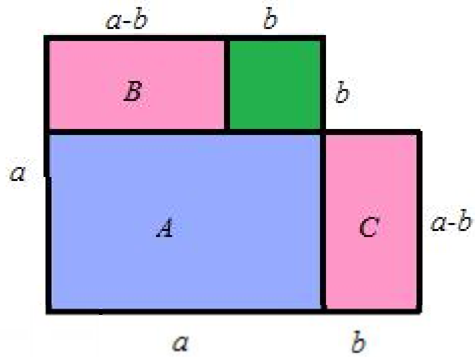
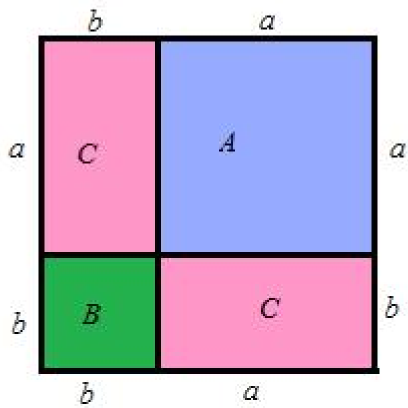
Методи Главче
Скопје

ГЕОМЕТРИЈАТА И ПОМАГА НА АЛГЕБРАТА

Од редовната настава ни е позната формулата за разлика на квадрати
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
чиј доказ е
$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$
Меѓутоа, од долниот цртеж:



следува $B = C$ па затоа
$$a^2 - b^2 = A + B = A + C = (a-b)(a+b).$$
Понатаму, позната ни е формулата за бином на квадрат
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
чиј доказ е
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
Меѓутоа, од долниот цртеж:



следува

$$(a+b)^2 = A + 2C + B = a^2 + 2ab + b^2.$$

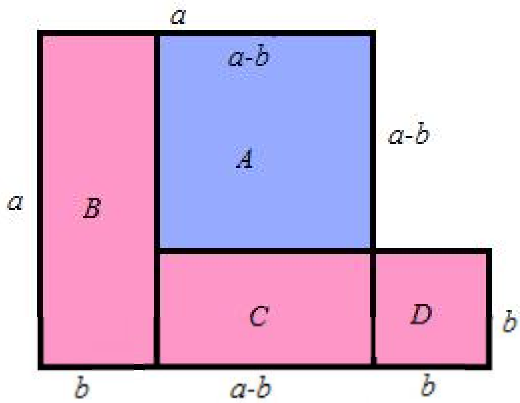
На сличен начин се докажува и формулата за квадрат на разлика, односно формулата

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

чиј доказ е

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Имено, од долниот цртеж следува $C + D = B$ па затоа



$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= A + B + C - (B + C + D) + D\\ &= A + B + C - 2B + D\\ &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

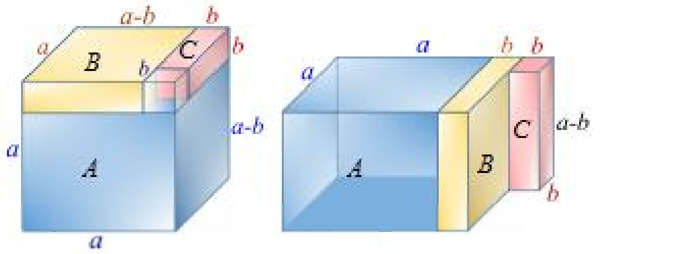
Како што гледаме, идејата на претходните три геометриски докази на разгледаните формули за скратено множење е во расекувањето на квадратот и прераспоредувањето на добиените делови. Оваа идеја може да се искористи и за докажување на формулите за разликата на кубови, куб од разлика, и куб од збир, но во овие случаи наместо со квадрат работиме со коцка. Позната ни е формулата

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1}$$

чиј алгебарски доказ е со непосредна проверка, односно

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

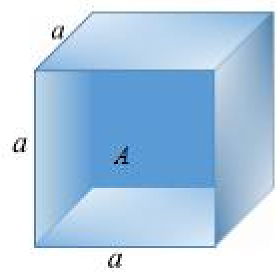
Меѓутоа ако коцка со должина на раб a се расече на квадар со должини на рабови $a, a, a-b$, квадар со должини на рабови $b, b, a-b$, квадар со должини на рабови $b, a, a-b$ и коцка со дожина на раб b, а потоа трите квадари чиј вкупен волумен е еднаков на $a^3 - b^3$ се прераспоредат како на долниот цртеж се добива тело кое има висина $a - b$ и плоштина на основата еднаква на $a^2 + ab + b^2$, па затоа неговиот волумен е еднаков на $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$, од каде следува формулата (1).



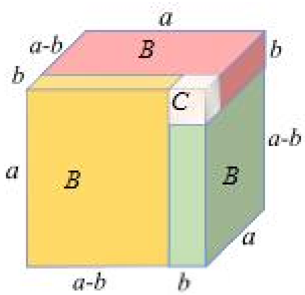
Навистина,

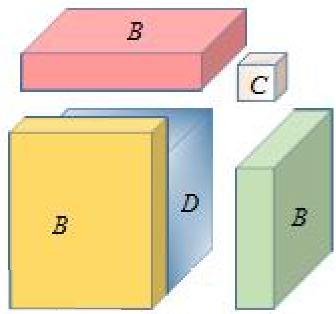
$$a^3 - b^3 = A + B + C = (a-b)a^2 + (a-b)ab + (a-b)b^2$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

т.е. точна е фрмулата (1).



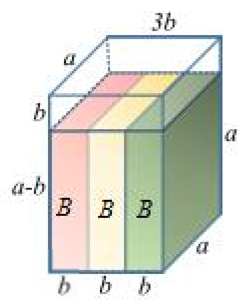
На цртежот десно е прикажана коцка со должина на раб a, а на долниот цртеж лево е прикажана истата коцка која со три рамнини кои се на растојание b од горното десно предно теме е расечена на коцка со должина на раб b, коцка со должина на раб $a-b$ и три квадари со должини на рабови $a, b, a-b$. На долниот десен цртеж се прикажани одделно добиените делбени делови.





Од трите цртежи е јасно дека

$$(a-b)^3 = D = A - 3B - C$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$



при што на цртежот десно е илустрирано дека

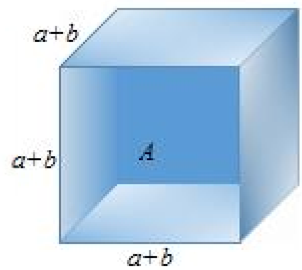
$$3B = 3b \cdot a^2 - 3b \cdot ab = 3a^2b - 3ab^2,$$

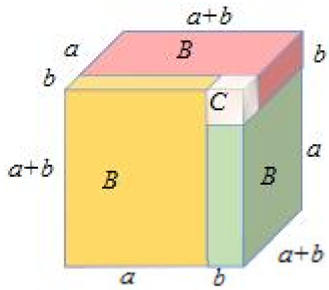
со тоа што трите квадари со рабови $a, b, a-b$ се составени во квадар со рабови $a, 3b, a-b$, над добиениот квадар е поставен квадар со рабови $a, 3b, b$ и потоа волуменот $3B$ е пресметан како разлика на волумените на квадарот со рабови $a, 3b, a$ и квадарот со рабови $a, 3b, b$.

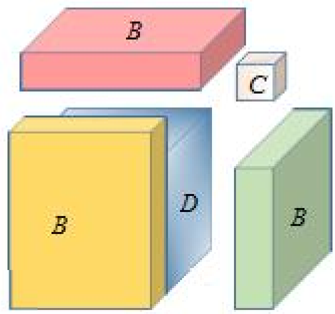
Истото расекување на коцката, како во случајот за куб на разлика на два броја може да се искористи и за докажување на формулата за куб на збир на два броја, т.е. на формулата

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (2)$$

На цртежот десно е прикажана коцка со должина на раб $a+b$, а на долниот цртеж лево е прикажана истата коцка која со три рамнини кои се на растојание b од горното десно предно теме е расечена на коцка со должина на раб b, коцка со должина на раб a и три квадари со должини на рабови $a, b, a+b$. На долниот десен цртеж се прикажани одделно добиените делбени делови.







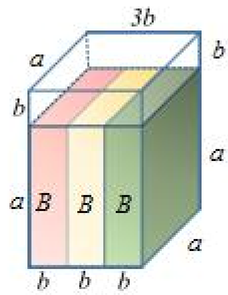
Од трите цртежи е јасно дека

$$(a+b)^3 = A = D + 3B + C$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

при што на цртежот десно е илустрирано дека

$$3B = 3b \cdot a^2 + 3b \cdot ab = 3a^2b + 3ab^2.$$

со тоа што трите квадари со рабови $a, b, a+b$ се составени во квадар со рабови $a, 3b, a+b$, а потоа од горе е отсечен квадар со рабови $a, 3b, b$, па волуменот $3B$ е пресметан како збир на волумени на квадари со рабови $a, 3b, b$ и $a, 3b, a$.



Литература

1. Volenec, V.: Dokaz bez riječi: razlika kvadrata, Osječki matematički list 19 (2019), 43-43
2. Kolar-Šuper, R., Kolar-Begović, R.: Dokaz bez riječi: kvadrat razlike, razlika kubova, kub razlike, Osječki matematički list 19 (2019), 45-48