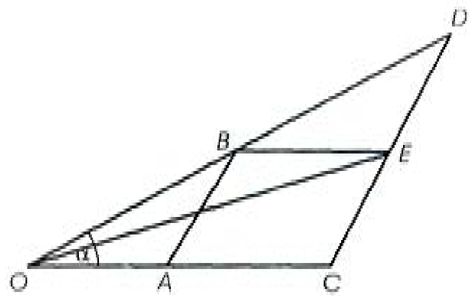
О ЈЕДНОЈ ОСОБИНИ ТРОУГЛА

Властимир Ранђеловић, мр Данијела Ранђеловић,

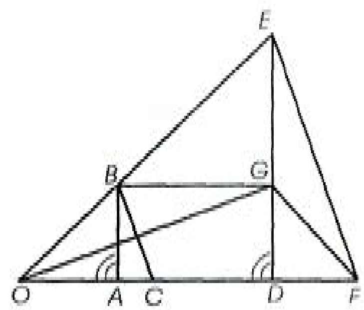
Лазаревац

Дата је конструкција као на Слици 1. Нека је $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ и $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$. Површине троуглова OAB, OCD и OCE респективно су:

$$P_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin\alpha}{2}, \qquad P_1 = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD} \cdot \sin\alpha}{2}, \qquad P_1 = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OB} \cdot \sin\alpha}{2}.$$



Слика 1.



Слика 2.

Користећи однос $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD}$ доказујемо идентитет $P_1 \cdot P_2 = P_3^2$.

$$P_1 \cdot P_2 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD} \cdot \sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{OB}}{2} \cdot \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{2} \cdot \sin^2\alpha = \left(\frac{\overline{OC} \cdot \overline{OB}}{2} \cdot \sin\alpha\right)^2 = P_3^2,$$

На Слици 2. дата је конструкција на којој је $\overline{BG} \parallel \overline{AD}$ и $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$. Очигледно је да за троуглове OAB, ODE и ODG важи $P_{\triangle OAB} \cdot P_{\triangle ODE} = P^2_{\triangle ODG}$.

Троуглови OBC и OEF су слични. Производ површина ових троуглова једнак је квадрату површине троугла OGF

$$\frac{\overline{OC} \cdot \overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{OF} \cdot \overline{DF}}{2} = \left(\frac{\overline{OF} \cdot \overline{DG}}{2}\right)^2,$$

јер је $\overline{OC} : \overline{AB} = \overline{OF} : \overline{DF}$ и $\overline{OC} \cdot \overline{DF} = \overline{AB} \cdot \overline{OF} = \overline{OF} \cdot \overline{DG}$.

Троуглови ABC и DEF су слични. Производ површина ових троуглова једнак је квадрату површине троугла DEG

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{DE} \cdot \overline{DF}}{2} = \left(\frac{\overline{DF} \cdot \overline{DG}}{2}\right)^2,$$

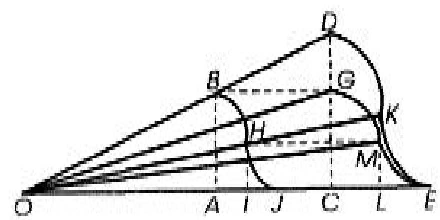
јер је $\overline{AB} = \overline{DG}$, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$ и $\overline{AB} \cdot \overline{DF} = \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{DF} \cdot \overline{DG}$.

Ако су геометријске фигуре (Слика 2.) $(ACBA)$ и $(DEFD)$ сличне онда је производ површина ових фигура једнак квадрату површине фигуре $(DFGD)$.

Ова особина може да се генерализује.

На Слици 3. фигуре F_1 $(OBJO)$ и F_2 $(ODEO)$ су сличне. Тачка M фигуре F_3 $(OGEO)$ конструисана је на начин који следи:

- повуче се потег $\overline{OK}$ који пресеца линију BJ у тачки H, а линију DE у тачки K;
- из тачке K спустимо нормалу KL на OE;
- из тачке H повуцимо паралелно са $\overline{OE}$ паралелу $\overline{HM}$ до пресека са $\overline{KL}$;
- тачка M припада скупу тачака линије GE.



Слика 3.

За овакву конструкцију важи:

$$P_{(OHJO)} \cdot P_{(OKEO)} = P^2_{(OMEO)}, \quad P_{(OBJO)} \cdot P_{(ODEO)} = P^2_{(OGEO)},$$

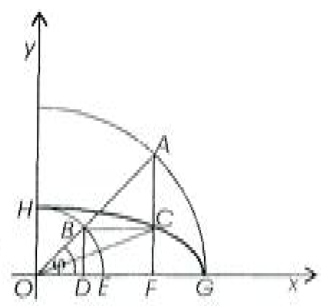
$$P_{(ABJA)} \cdot P_{(CDEC)} = P^2_{(CGEC)}, \quad P_{(HIJH)} \cdot P_{(EKLE)} = P^2_{(LMEL)}.$$

Као пример примене ове особине дато је израчунавање површина елемената у елипси.

Познато је да елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ може бити конструисана помоћу два концентрична круга (Слика 4.) чији су полупречници a и b. Нека је $\overline{OA}=a>\overline{OB}=b$, онда је квадрат површине P површи $OCGO$ једнак производу површине P_a кружног исечка $OAGO$ и површине P_b кружног исечка $OBEO$:

$$P^2=P_a\cdot P_b=\frac{a^2\varphi}{2}\cdot\frac{b^2\varphi}{2}=\frac{a^2b^2}{4}\varphi^2\,,$$

односно површина P површи $OCGO$ је $P=\frac{ab}{2}\varphi$.



Слика 4.

Како је $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\overline{AF}}{\overline{OF}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ и $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ то је

$$P=\frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,. \tag{$*$}$$

Површина P површи $OGHO$ добија се ако се у $(*)$ стави $x=0$:

$$P=\frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi ab}{4}\,.$$

Очигледно је да је површина целе елипсе $P=\pi ab$.

Квадрат површине површи $FGCF$ је производ површина површи $BDEB$ и $AFGA$. Са слике је лако закључити да је површина површи $FGCF$

$$P=\frac{ab}{2}(\varphi-\sin\varphi\cdot\cos\varphi),$$

$$P=\frac{ab}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)\,.$$

На сличан начин читалац може сам да нађе обрасце за израчунавање површина разних одсечака и исечака (сектора) елипсе.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2002/03 година