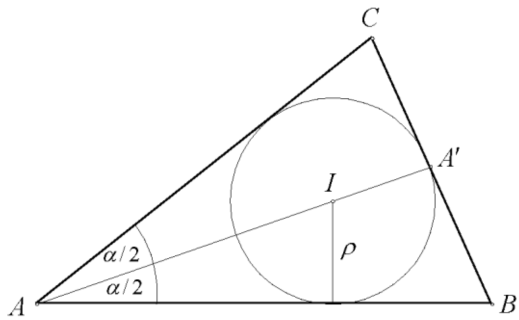
XXXII олимпијада

1. Даден е триаголник ABC. Нека A', B', C' се пресечните точки на симетралите на аглите CAB, ABC и BCA, со страните BC, CA и AB, соодветно, а I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI}}{\overline{AA'} \, \overline{BB'} \, \overline{CC'}} \le \frac{8}{27}.$$

Решение. Нека ρ е радиусот на впишаната кружница, а P плоштина на триаголникот ABC. Отсечката $\overline{AA'}$ го дели триаголникот на два триаголника ABA' и ACA'. Добиваме:



$$\overline{AI} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2P}{a+b+c}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2P_{ABA'} + 2P_{ACA'}}{(a+b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{(b+c)\overline{AA'}}{a+b+c}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} = \frac{c+a}{a+b+c}, \quad \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}\right) \ge \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

од каде следува точноста на десната страна на неравенството.
Нека $s = a+b+c$. Тогаш

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{s^3} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}\right)\left(1+\frac{c+a-b}{s}\right)\left(1+\frac{a+b-c}{s}\right)$$

$$> \frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}+\frac{c+a-b}{s}+\frac{a+b-c}{s}\right) = \frac{1}{4},$$

па важи и левата страна од неравенството.

Забелешка. Равенството $\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} = \frac{b+c}{a+b+c}$ може да се докаже на следниов начин. Бидејќи A' е симетрала на $\measuredangle BAC$, следува дека $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{b}$. Од друга страна имаме $\overline{BA'} + \overline{A'C} = a$, па затоа $\overline{BA'} = \frac{ac}{b+c}$. Бидејќи BI е симетрала на $\measuredangle A'BA$ следува $\frac{\overline{AI}}{\overline{A'I}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BA'}} = \frac{b+c}{a}$. Од тука се добива $\frac{\overline{AI}}{\overline{AA'}} = \frac{b+c}{a+b+c}$. Аналогно се докажуваат равенствата $\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}} = \frac{c+a}{a+b+c}$ и $\frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}} = \frac{a+b}{a+b+c}$, а понатаму задачата се решава како погоре.

2. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 6$ и $a_1, a_2, ..., a_k$ се природните броеви кои што се помали од n и се заемно прости со n. Докажи дека, ако
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} > 0,$$
тогаш n е или прост број или е степен на бројот 2.

Решение. Пред се, мора да биде $a_1 = 1$, $a_2 = p$, каде p е најмалиот прост број кој не е делител на n и $a_k = n-1$. Константната разлика $a_j - a_{j-1}$ да ја означиме со $r = p-1$.

Ако n е непарен број, тогаш $a_2 = 2$, $r = 1$ и низата е $1, 2, ..., n-1$, и како секој од овие броеви е заемно прост со n, n мора да биде прост број.

Ако n е парен број, тогаш $p \geq 3$. Ако $p = 3$, тогаш $r = 2$, па низата е $1, 3, 5, ..., n-1$. Значи, секој непарен број помал од n е заемно прост со n, т.е. n нема непарни делители, па $n = 2^m$, за некој $m \in \mathbb{N}$.

Ако $p > 3$, тогаш $3 | n$. Но, $a_s = a_1 + r(s-1)$, $s = 2, 3, \ldots, k$, па затоа
$$n - 1 = 1 + (p-1)(k-1),$$
од што следува дека $(p-1) | (n-2)$. Нека q е прост број, таков што $q | (p-1)$. Тогаш $q | (n-2)$. За секој број $q < p$, важи $q | n$, па затоа $q | 2$, т.е. $q = 2$, $p - 1 = 2^l$, $p = 2^l + 1$ за некој $l \geq 2$. Бидејќи p е прост број и $3 | (2^{2j-1} + 1)$, $j \in \mathbb{N}$, следува дека $l = 2j$, $j \in \mathbb{N}$. Но, тогаш
$$a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2\left(p-1\right) = 2p - 1 = 2^{2j+1} + 1,$$
па значи дека $3 | a_3$, што противречи на $3 | n$. Со тоа доказот е завршен.

3. Нека $S = \{1, 2, 3, ..., 280\}$. Определи го најмалиот природен број n, таков што во секое n елементно подмножество од множеството S постојат 5 броеви, такви што секои два се заемно прости.

Решение. Нека
$$A_1 = \{k \in S : 2 | k\},\ A_2 = \{k \in S : 3 | k\},\ A_3 = \{k \in S : 5 | k\},$$
$$A_4 = \{k \in S : 7 | k\} \text{ и } A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

Тогаш

$\vert A_1 \vert = 140,$	$\vert A_2 \vert = 93,$
$\vert A_3 \vert = 56,$	$\vert A_4 \vert = 40,$
$\vert A_1 \cap A_2 \vert = 46,$	$\vert A_1 \cap A_3 \vert = 28,$
$\vert A_1 \cap A_4 \vert = 20,$	$\vert A_2 \cap A_3 \vert = 18,$
$\vert A_2 \cap A_4 \vert = 13,$	$\vert A_1 \cap A_2 \cap A_3 \vert = 9,$
$\vert A_3 \cap A_4 \vert = 8,$	$\vert A_1 \cap A_2 \cap A_4 \vert = 6,$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 4, \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$$

Од принципот на вклучување и исклучување, следува

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216.$$

За било кои 5 броеви од A постојат два од нив кои се содржани во исто множество A_j, за некој $j \in \{1,2,3,4\}$, па тие не се заемно прости. Од овде следува дека $n > 216$. Ќе докажеме дека $n = 217$.

Нека

$$B_1 = A \setminus \{2,3,5,7\},$$
$$B_2 = \{11^2, 11\cdot 13, 11\cdot 17, 11\cdot 19, 11\cdot 23, 13^2, 13\cdot 17, 13\cdot 19\}$$
$$P = S \setminus (B_1 \cup B_2).$$

Тогаш $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$ и P ги содржи 1 и сите прости броеви од S. Нека T е подмножество од S такво што $|T| = 217$. Јасно, треба да се разгледува само случајот кога $|T \cap P| \le 4$. Во овој случај $|T \cap (S \setminus P)| = |T \setminus (T \cap P)| \ge 217 - 4 = 213$, т.е. меѓу сите сложени броеви од S (ги има вкупно $|S \setminus P| = 220$) постојат најмногу 7 броеви кои не се во T. Нека:

$$M_1 = \{2\cdot 23, 3\cdot 19, 5\cdot 13, 7\cdot 13, 11^2\},$$
$$M_2 = \{2\cdot 29, 3\cdot 23, 5\cdot 19, 7\cdot 17, 11\cdot 13\},$$
$$M_3 = \{2\cdot 31, 3\cdot 29, 5\cdot 23, 7\cdot 19, 11\cdot 17\},$$
$$M_4 = \{2\cdot 37, 3\cdot 31, 5\cdot 29, 7\cdot 23, 11\cdot 19\},$$
$$M_5 = \{2\cdot 41, 3\cdot 37, 5\cdot 31, 7\cdot 29, 11\cdot 23\},$$
$$M_6 = \{2\cdot 43, 3\cdot 41, 5\cdot 37, 7\cdot 31, 13\cdot 17\},$$
$$M_7 = \{2\cdot 47, 3\cdot 43, 5\cdot 41, 7\cdot 37, 13\cdot 19\},$$
$$M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}.$$

Сега $M_i \subset S \setminus P, i = 1,2,...,8$. Но, видовме дека постојат најмногу 7 сложени броеви кои не припаѓаат на T. Затоа според принципот на Дирихле постои барем еден индекс $i_0 \in \{1,2,...,8\}$, такво што $M_{i_0} \subset T$. Секои два броја од множеството M_{i_0} се заемно прости, што значи дека $n = 217$.

4. Даден е сврзан граф со k ребра. Докажи дека неговите ребра може да се нумерираат со броевите $1,2,3,...,k$ така што за секое теме v од графот кое е поврзано со ребро со барем две други темиња, важи: најголемиот заеднички

делител на сите броеви со кои се нумерирани ребрата кои излегуваат од ν е 1.

(Граф G се состои од множество точки, кои се нарекуваат темиња и фамилија отсечки што поврзуваат некои парови различни темиња, кои се нарекуваат ребра. Графот G е поврзан ако за секој пар различни темиња x, y постои низа темиња $x = \nu_0, \nu_1, ..., \nu_m = y$ такви што секој пар (ν_i, ν_{i+1}), $i = 1, 2, ..., m-1$ е поврзан со ребро од G.)

Решение. Да почнеме од некое теме γ_0 и да ги поминеме по ред ребрата на графот нумерирајќи ги со 1, 2, ... се додека можеме да ја продолжиме оваа постапка, т.е. се додека не дојдеме до теме за кое се нумерирани сите ребра кои што излегуваат од него. Нека последното ребро сме го нумерирале со r.

Ако сега во тој граф постои некое ребро кое не е нумерирано, тогаш заради сврзаноста на графот, меѓу темињата кои сме ги поминале, постои барем едно од кое излегува ребро кое не е нумерирано. Го нумерираме тоа ребро со $r+1$, следното со $r+2$ и продолжувајќи ја оваа постапка ќе ги нумерираме сите ребра.

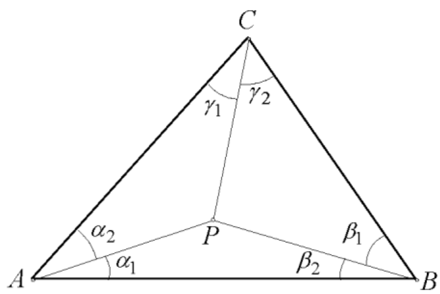
За секое теме $\nu \neq \nu_0$ од кое што излегуваат барем две ребра, постојат две од тие ребра кои се нумерирани со последователни броеви, а од темето γ_0 излегува ребро кое е нумерирано со 1. Ваквата нумерација ги задоволува условите на задачата.

5. Нека P е внатрешна точка во триаголникот ABC. Докажи дека барем еден од аглите PAB, PBC, PCA е помал или еднаков на 30°.

Решение. Нека

$\measuredangle PAB = \alpha_1, \measuredangle PBC = \beta_1, \measuredangle PCA = \gamma_1,$

$\measuredangle PAC = \alpha_2, \measuredangle PBA = \beta_2, \measuredangle PCB = \gamma_2.$



Од синусната теорема, следува:

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}, \ \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}, \ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}},$

од каде што следува

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$

т.е.

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 . \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека $\alpha_1 > 30^\circ$, $\beta_1 > 30^\circ$ и $\gamma_1 > 30^\circ$. Од $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 180^\circ$, следува $\alpha_1 < 120^\circ$, $\beta_1 < 120^\circ$ и $\gamma_1 < 120^\circ$, па затоа

$$\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 > \sin^3 30^\circ = \tfrac{1}{8}. \qquad (2)$$

Од друга страна, користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, конвексноста на синусната функција на $[0^\circ, 180^\circ]$ и неравенството $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90^\circ$, добиваме:

$$\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2 \le \left(\tfrac{\sin\alpha_2 + \sin\beta_2 + \sin\gamma_2}{3}\right)^3 \le \left(\sin\tfrac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3}\right)^3 < \sin^3 30^\circ = \tfrac{1}{8},$$

што противречи на (1) и (2). Од овде следува дека $\min\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \le 30^\circ$.

6. Низата $x_0, x_1, \ldots$ е ограничена, ако постои константа C таква што $|x_i| < C$, за секое $i \ge 0$. Нека $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Најди ограничена бесконечна низа реални броеви $x_0, x_1, \ldots$ таква што

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \ge 1, \text{ за секои } i, j \in \mathbb{N},\ i \ne j.$$

Решение. Ако $a > 1$, тогаш од $|i - j| \ge 1$ следува

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \ge |x_i - x_j| \cdot |i - j|,$$

па доволно е да се конструира низа $x_0, x_1, \ldots$ таква што

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j| \ge 1. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека низата $x_i = 4\{i\sqrt{2}\}$, каде што $\{x\} = x - [x]$ е функцијата *децимален дел од* x, го задоволува условот (1). Нека $i > j$. Тогаш

$$\begin{aligned} r &= [i\sqrt{2}] - [j\sqrt{2}] < i\sqrt{2} - j\sqrt{2} + 1 \le i\sqrt{2} - j\sqrt{2} + i - j \\ &= (\sqrt{2}+1)(i-j) < (4-\sqrt{2})(i-j). \end{aligned}$$

Освен тоа, ако за природните броеви m и n важи $m < (4-\sqrt{2})n$, тогаш

$$4n|\sqrt{2}n - m| = \tfrac{4n|2n^2 - m^2|}{\sqrt{2}n + m} \ge \tfrac{4n}{\sqrt{2}n + m} > 1.$$

Користејќи ги овие неравенства добиваме

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| \cdot |i - j| &= |4\{i\sqrt{2}\} - 4\{j\sqrt{2}\}| \cdot |i - j| \\ &= 4|i - j| \cdot |(i - j)\sqrt{2} - r| \\ &= 4n|\sqrt{2}n - r| > 1. \end{aligned}$$