ЈБМО 2020

1. Определи ги сите тројки реални броеви (a,b,c) такви што:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \\ a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Јасно, ако (a,b,c) е решение на системот (1), тогаш и тројката $(-a,-b,-c)$ е решение на (1). Затоа можеме да претпоставиме дека $abc>0$. Од првата равенка на (1) добиваме

$$a+b+c=\frac{ab+bc+ca}{abc}. \tag{2}$$

Понатаму,

$$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}),$$

од каде добиваме

$$ab+bc+ca=\frac{a+b+c}{abc}. \tag{3}$$

Прво ќе докажеме дека $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ се различни од 0. Нека го претпоставиме спротивното дека од (2) и (3) следува

$$a+b+c=ab+bc+ca=0.$$

Тогаш имаме

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0,$$

па затоа $a=b=c=0$, што е противречност. Сега, ако ги помножиме (2) и (3), добиваме

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(abc)^2},$$

од каде следува $(abc)^2=1$ и како претпоставивме дека $abc>0$, добиваме $abc=1$. Според тоа, релациите (2) и (3) последователно го добиваат видот

$$a+b+c=ab+bc+ca$$
$$abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0$$
$$(a-1)(b-1)(c-1)=0.$$

Од последното равенство следува дека најмалку еден од броевите a,b,c е еднаков на 1. Нека $c=1$. Ако замениме во $a+b+c=ab+bc+ca$, добиваме $a+b+1=ab+b+a$, односно $ab=1$. Сега, ако земиме $a=t$, тогаш $b=\frac{1}{t}$ и добиваме дека решенија на задачата се подредените тројки $(t,\frac{1}{t},1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Понатаму, од почетните разгледувања следува дека решенија се и подредените тројки $(t,\frac{1}{t},-1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Според тоа, решенија на системот (1) се подредените тројки

$$(t,\frac{1}{t},1),(t,\frac{1}{t},-1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

и сите нивни пермутации.

2. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, $\measuredangle BAC=90^\circ$. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето A на страната BC. Нека $Z\neq A$ е точка од правата AB таква што $\overline{AB}=\overline{BZ}$. Нека (c) е кружницата опишана околу $\triangle AEZ$. Нека D е втората пресечна точка на (c) и ZC и нека F е дијаметрално спротивната точка на D во кружницата (c). Точката P е пресекот на правите FE и CZ. Ако тангентата на (c) во Z ја сече PA во T, докажи дека точките T,E,B,Z се конциклични.

Решение. Прво ќе докажеме дека PA е тангента на (c) во A.

Бидејќи E,D,Z,A се конциклични, добиваме

$$\measuredangle EDC=\measuredangle EAZ=\measuredangle EAB.$$

Затоа $\triangle ABC$ и $\triangle EBA$ се слични. Според тоа, $\measuredangle EAB=\measuredangle BCA$, па затоа $\measuredangle EDC=\measuredangle BCA$. Бидејќи $\measuredangle FED=90^\circ$, важи $\measuredangle PED=90^\circ$ и затоа

$$\measuredangle EPD=90^\circ-\measuredangle EDC=90^\circ-\measuredangle BCA=\measuredangle EAC.$$

Затоа точките E,A,C,P се конциклични. Тоа значи дека $\measuredangle CPA=90^\circ$ и затоа триаголникот PAZ е правоаголен. Но, B е средина на AZ, па затоа $\overline{PB}=\overline{AB}=\overline{BZ}$ и така $\measuredangle ZPB=\measuredangle PZB$.

Освен тоа $\measuredangle EPD=\measuredangle EAC=\measuredangle CBA=\measuredangle EBA$, од каде следува дека точките P,B,E,Z се исто така конциклични.

Сега, забележуваме дека

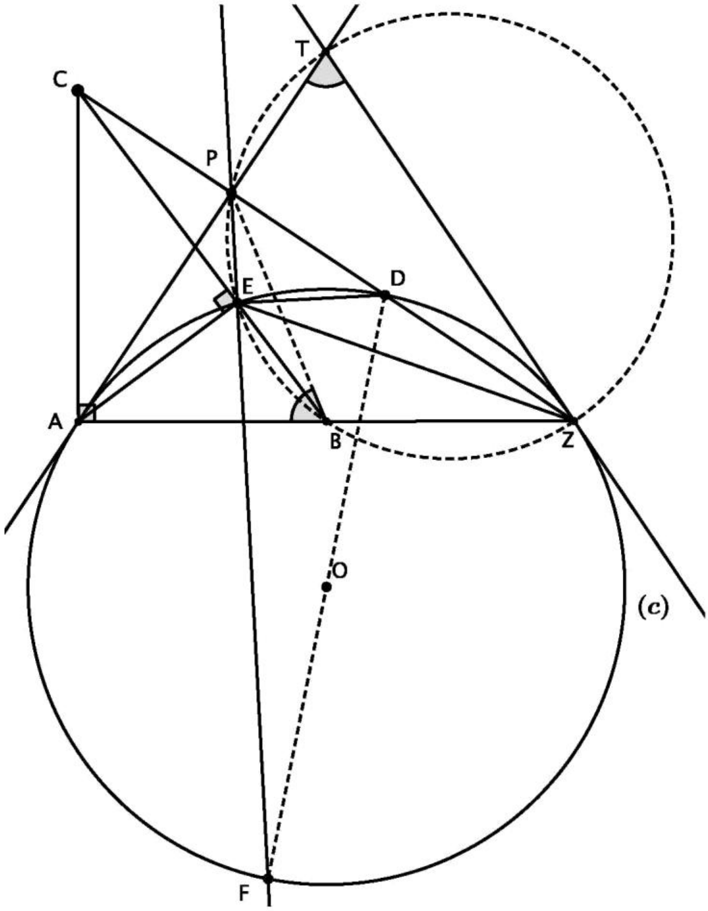
$$\measuredangle PAE=\measuredangle PCE=\measuredangle ZPB-\measuredangle PBE=\measuredangle PZB-\measuredangle PZE=\measuredangle EZB,$$

па затоа PA е тангента на (c) во A.

Понатаму, добиваме дека $\overline{TA}=\overline{TZ}$. Затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle PTZ&=180^\circ-2\measuredangle TAB=180^\circ-2(\measuredangle PAE+\measuredangle EAB)\\&=180^\circ-2(\measuredangle ECP+\measuredangle ACB)\\&=180^\circ-2(90^\circ-\measuredangle PZB)=2\measuredangle PZB\\&=\measuredangle PZB+\measuredangle BPZ=\measuredangle PBA\end{aligned}$$

од каде следува дека точките T, P, B, Z се конциклични и бидејќи точките P, B, E, Z заклучуваме дека точките T, E, B, Z се конциклични.



3. Ана и Бојан ја играт следнава игра.
   Ана избира множество $A=\{1,2,...,n\}$ за некој природен број $n\geq 2$. Потоа, почнувајќи од Бојан, тие наизменично избираат по еден број од множеството A при што се исполнети следниве услови: на почеток Бојан избира произволен број, потоа бројот кој се избира во секој следен чекор мора да е различен од сите претходно избрани броеви и да се разликува за 1 од некој веќе избран број. Играта завршува кога сите броеви од множеството A ќе бидат избрани. Ана победува ако збирот на сите броевиу кои таа ги избрала е сложен број, а во спротивно победува Бојан. Кој има победничка стратегија?

   Решение. Да се каже дека Ана има победничка стратегија, тоа значи дека таа може да најде број n со кој ќе го формира множеството A така што ќе може соодветно да одговори на сите избори на Бојан и секогаш на крајот збирот на броевите кои ги избрала да биде сложен број. Ако таков број n не постои, тоа ќе значи дека Бојан има победничка стратегија.

Ана може прво да се обиде да ги провери малите вредности на n. Навистина, ова ја дава следната победничка стратегија за неа: таа првично избира $n=8$ и одговара на сите можни избори направени од Бојан како што е прикажано во листата подолу (во секој ред алтернативно се дадени изборите на Бојан и Ана, почнувајќи од Бојан):

1 2 3 4 5 6 7 8
2 3 1 4 5 6 7 8
2 3 4 1 5 6 7 8
3 2 1 4 5 6 7 8
3 2 4 5 1 6 7 8
3 2 4 5 6 1 7 8
4 5 3 6 2 1 7 8
4 5 3 6 7 8 2 1
4 5 6 7 3 2 1 8
4 5 6 7 3 2 8 1
4 5 6 7 8 3 2 1
5 4 3 2 1 6 7 8
5 4 3 2 6 7 1 8
5 4 3 2 6 7 8 1
5 4 6 3 2 1 7 8
5 4 6 3 7 8 2 1
6 7 5 4 3 8 2 1
6 7 5 4 8 3 2 1
6 7 8 5 4 3 2 1
7 6 8 5 4 3 2 1
7 6 5 8 4 3 2 1
8 7 6 5 4 3 2 1

Лесно се проверува дека во секој ред збирот на броевите избрани од Ана е парен број поглем од 2, или е 15 или 21, што значи дека е сложен број, па таа победува.

4. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) такви што

$$1+\frac{p^q-q^p}{p+q}$$

е прост број.

Решение. Јасно е дека $p \neq q$. Ако

$$1+\frac{p^q-q^p}{p+q}=r,$$

тогаш имаме

$$p^q-q^p=(r-1)(p+q). \qquad (1)$$

Од малата теорема на Ферма следува

$$p^q-q^p \equiv -q \pmod p.$$

Понатаму,

$$(r-1)(p+q) \equiv rq-q \pmod p$$

па затоа од (1) следува

$$rq \equiv 0 \pmod p,$$

т.е. $p \mid rq$, што значи $p \mid r$, па затоа $p=r$. Сега, повторно од (1) имаме

$$p^q-q^p=(p-1)(p+q). \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека $p=2$. Навистина, ако p е непарен, тогаш од малата теорема на Ферма следува

$$p^q-q^p \equiv p \pmod q$$

и бидејќи

$$(p-1)(p+q) \equiv p(p-1) \pmod q$$

добиваме

$$p(p-2) \equiv 0 \pmod q$$

од каде следува $q \mid p(p-2)$, т.е. $q \mid p-2$, од каде следува $q \leq p-2 < p$. Сега од (2) последователно добиваме

$$p^q-q^p \equiv 0 \pmod{p-1},$$
$$1-q^p \equiv 0 \pmod{p-1},$$
$$q^p \equiv 1 \pmod{p-1}.$$

Јасно, $(q,p-1)=1$ и ако $k=\mathrm{ord}_{p-1}(q)$, тогаш како што е познато $k \mid p$ и $k<p$. Според тоа, $k=1$. Затоа

$$q \equiv 1 \pmod{p-1},$$

односно $p-1 \mid q-1$, од каде следува $p-1 \leq q-1$, т.е. $p \leq q$, што противречи на $q \leq p-2 < p$. Затоа $p=2$ и (2) добиваме

$$2^q = q^2 + q + 2.$$

Сега, со математичка индукција лесно се докажува дека за секој природен број $n \geq 6$ важи $2^n > n^2 + n + 2$. Според тоа, $q \leq 5$ и со непосредна проверка добиваме дека единстено решение е $q = 5$. Конечно, единствено решение е парот $(p, q) = (2, 5)$.

Забелешка. Во решението на задачата клучен момент е таканеречениот ред на цел број и неговите својства. Овие содржини 2019 година не беа вклучени во програмата за ЈБМО. Не може да се каже дали станува збор за превид на Жирито или има проширување на програмата. На читателот му препорачуваме да ги прошири своите знаења, што може да го направи консултирајќи ја наведената литература.