XLVII олимпијада

1. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Во внатрешноста на триаголникот избрана е точка P таква што

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

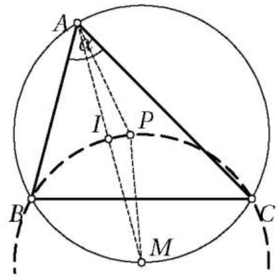
Докажи, дека $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha,$$

т.е.

$$\measuredangle BPC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha = \measuredangle BIC.$$



Тоа значи дека P лежи на опишаната кружница ω околу $\triangle BCI$. Бидејќи центарот на кружницата ω е во средината M на лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи A (бидејќи $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI}$), добиваме дека

$$\overline{AP} \geq \overline{AM} - \overline{MP} = \overline{AM} - \overline{MI} = \overline{AI},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.

2. За дијагоналата на правилниот 2006-аголник $\mathfrak{R}$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $\mathfrak{R}$ на две дела такви што секој од деловите се состои од непарен број страни на $\mathfrak{R}$. За страните на $\mathfrak{R}$ исто така сметаме дека за добри.

Ги разгледуваме разбивањата на многуаголникот $\mathfrak{R}$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали такви што не постојат две дијагонали со заедничка внатрешна точка. Определи го најголемиот можен број рамнокраки триаголници со по две добри страни кои може да се појават во такво разбивање.

Решение. Рамнокраките триаголници со две добри страни ќе ги наречеме добри. Темињата на добар триаголник T ја делат границата на $\mathfrak{R}$ на три дела, од кои два, да кажеме $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$, се состојат од непарен број страни. Ќе велиме дека T ги поседува сите страни во $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$.

Секој добар триаголник различен од T поседува парен број страни во секој од деловите $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$. Бидејќи бројот на страните во $\mathfrak{R}_i$ е непарен, барем една од нив, да кажеме a_i, не ја поседува ниту еден добар триаголник освен T. На триаголникот T му придружуваме две страни a_1 и a_2. По конструкција, не постојат два триаголници кои имаат заедничка придружена страна, па затоа добри триаголници не може да има повеќе од 1003.

Пример со 1003 добри триаголници може да се добие со повлекување на дијагоналите $A_{2k-2}A_{2k}$, за $k = 1, 2, \dots, 1003$ (каде $A_0 \equiv A_{2006}$) и уште произволни

1000 дијагонали.

3. Определи го најмалиот реален број M таков што неравенството
$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (1)$$
важи за секои реални броеви a, b и c.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\ge b\ge c$. Да означиме $a-b=m, b-c=n, a+b+c=s$. Левата страна на неравенството (1) се разложува како
$$L=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)=mn(m+n)s,$$
а додека десната како
$$a^2+b^2+c^2=\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{3}.$$
Бидејќи $(m+n)^2\le\frac{2}{3}(m^2+n^2+(m+n)^2)$, од неравенството меѓу средните имаме
$$2L^2\le\frac{(m+n)^6s^2}{8}\le s^2\left(\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}\right)^3\le\left(\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{4}\right)^4=\frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4},$$
т.е. $L\le\frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2$. Знак за равенство важи ако и само ако $m=n$ и $s^2=\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$, од каде лесно следува дека $a:b:c=(1+\frac{3}{\sqrt{2}}):1:(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. Значи, $M=\frac{9}{16\sqrt{2}}$.

Втор начин. Имаме $L=|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$. Случајот $a+b+c=0$ етривијален, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$. Моничниот кубен полином чии нули се $a-m, b-c$ и $c-a$ е од облик
$$P(x)=x^3+qx+r,\ q=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2),\ r=-(a-b)(b-c)(c-a).$$
Тогаш $M=\max r\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{-2}$. Бидејќи сите три нули на полиномот $P(x)$ се реални, важи $D=(\frac{q}{3})^3+(\frac{r}{2})^2\ge 0$, односно $r^2\ge-\frac{4}{27}q^3$. Оттука следува
$$M^2\le f(q)=-\frac{4}{27}q^3\left(\frac{1-2q}{3}\right)^{-2}.$$
Функцијата f достигнува максимум $\frac{3^4}{2^9}$ во точката $q=-\frac{3}{2}$, па затоа $M\le\frac{9}{16\sqrt{2}}$. Случајот на равенство едноставно се наоѓа.

4. Определи ги сите парови цели броеви (x, y) такви што
$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Решение. Нека $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$. Бројот y е непарен и $2^x \mid (y-1)(y+1)$, но двата множители не се деливи со 4, од каде следува дека еден од нив е делив со 2^{x-1}, т.е. $y=2^{x-1}z\pm1$. Од друга страна, очигледно е дека

$$2^x+1<y<2^{x+1}-1\text{, за } x\geq 2,$$

па затоа $z=3$. Ако означиме $t=2^{x-1}$, тогаш почетната равенка го добива обликот $8t^2+2t+1=(3t\pm1)^2$. Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $t=8$. Сега, $x=4$ и $y=23$ и тоа навистина е решение, бидејќи $1+2^4+2^9=23$.

5. Нека $P(x), \deg P=n>1$ е полином со целобројни коефициенти и нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека за полиномот

$$Q(x)=\underbrace{P(P(...P(P}_{k \text{ пати}}(x))...)).$$

постојат најмногу n цели броеви t такви што $Q(t)=t$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $Q(t)=t$, тогаш $P(P(t))=t$. Нека $x_0=t$ и $x_{i+1}=P(x_i)$ за $i\geq 0$, така што $x_k=x_0$. Да означиме $d_i=x_{i+1}-x_i$. Бидејќи

$$d_i \mid P(x_{i+1})-P(x_i)=x_{i+2}-x_{i+1}=d_{i+1}$$

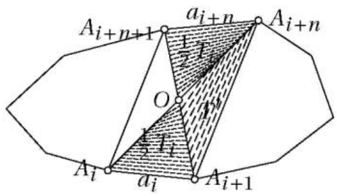
за секој i, од $d_k=d_0$ следува дека $|d_0|=|d_1|=...=|d_k|$. Нека $d_1=d_0=d\neq 0$. Тогаш $d_2=d$ (во спротивно ќе важи $x_3=x_1$, па во низата никогаш нема да се појави x_0); слично $d_3=d$ итн, па затоа $x_k=x_0+kd\neq x_0$, за секој k, што е противречност. Според тоа, $d_1=-d_0$, па затоа $x_2=x_0$, т.е. $P(P(t))=t$.

Ако секој $t\in\mathbb{Z}$ за кој е $Q(t)=t$ задоволува $P(t)=t$, тогаш бројот на решенијата е помал или еднаков на $\deg P=n$. Да претпоставиме дека за некој $t_1\in\mathbb{Z}$ важи $P(t_1)=t_2\neq t_1$ и $P(t_2)=t_1$ и да разгледаме произволен $t_3\notin\{t_1,t_2\}$ и $P(t_3)=t_4$ со $P(t_4)=t_3$. Тогаш $t_1-t_3 \mid t_2-t_4 \mid t_1-t_3$, т.е. $|t_1-t_3|=|t_2-t_4|$, а аналогно и $|t_1-t_4|=|t_2-t_3|$. Ако $t_1-t_3=t_2-t_4=k\neq 0$, второт равенство го добива обликот $|t_1-t_2+k|=|t_2-t_1+k|$, што не е можно. Затоа мора да важи $t_1-t_3=t_4-t_2$, т.е. $P(t_1)+t_1=P(t_3)+t_3=c$ за некој c. Според тоа, сите целобројни решенија на равенката $P(P(t))=t$ се нули на полиномот $P(x)+x-c$, а нив ги има најмногу n.

6. На секоја страна b на конвексниот многуаголник $\Re$ и ја придружуваме најголемата плоштина на триаголникот кој се содржи во $\Re$ и чија една страна е b. Докажи, дека збирот на сите плоштини придружени на страните на мно-

гуаголникот $\Re$ е поголем или еднаков на двократната плоштина P на многуаголникот $\Re$.

Решение. *Прв начин*. На секое теме A на многуаголникот $\Re$ му соодветствува единствена точка A' на границата на $\Re$ таква што правата AA' ја полови плоштината на $\Re$. Сметајќи ги и овие точки по потреба во темињата, можеме да претпоставиме дека $\Re$ има парен број темиња $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, и дека секоја дијагонала A_iA_{i+n} $(i = 1,...,n)$ ја полови неговата плоштина.



Со a_i и d_i да ги означиме страната A_iA_{i+1} и полуправата A_iA_{i+n}, $1 \le i \le 2n$ (индексите се по модул $2n$), соодветно. За $i = 1,...,n$, нека $\Re_i$ е областа ограничена со d_i, d_{i+1}, a_i и a_{i+n}, а T_i е нејзината плоштина. Ќе докажеме дека областите $\Re_i$ го покриваат целиот $\Re$. Нека X е произволна точка во внатрешноста на $\Re$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека X е лево од d_i. Бидејќи X е десно од d_{i+n}, постои j $(i \le j < i+n)$ таков што X е лево од d_j и десно од d_{j+1}, а тогаш $X \in \Re_j$. Оттука следува дека $T_1 + \ldots + T_n \ge P$.

Со P_i да ја означиме плоштината придружена на страната a_i $(1 \le i \le n)$. Нека d_i и d_{i+1} се сечат во точката O. Триаголниците OA_iA_{i+1} и $OA_{i+n}A_{i+n+1}$ имаат плоштина $\frac{1}{2}T_i$, додека барем еден од триаголниците OA_iA_{i+n+1} и $OA_{i+1}A_{i+n}$ има плоштина T' која не е помала од $\frac{1}{2}T_i$. Според тоа, $P_i + P_{i+n} \ge \frac{1}{2}T_i + T' \ge T_i$. Конечно,

$$P_1 + \ldots + P_{2n} \ge 2(T_1 + \ldots + T_n) \ge 2P.$$

Знак за равенство важи ако и само ако многуаголникот $\Re$ е централно симетричен.

Втор начин. Со S_a да ја означиме плоштината придружена на страната a. Ќе велиме дека темето V е придружено на страната a на конвексниот (може и дегенериран) многуаголник $\Re$ ако триаголникот определен со a и V има плоштина S_a. Дефинираме $\sigma(\Re) = \sum_a S_a$ и $\delta(\Re) = \sigma(\Re) - 2[\Re]$, каде со $[X]$ е означена плоштината на многуаголникот X. Со индункција по бројот n на меѓусебно непаралелните страни во $\Re$ ќе докажеме дека $\delta(\Re) \ge 0$ за секој $\Re$. Ова е тривијално за $n = 2$. Нека $n \ge 3$.

Разгледуваме две соседни страни AB и BC без заеднички придружени темиња (јасно вакви страни постојат). Нека правите низ темињата U и V придружени на страните AB и BC, паралелни на тие страни соодветно, се сечат во точката X. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека на отсечките UX и VX нема други темиња на $\Re$, (Зошто?). Страните и темињата на $\Re$ кои лежат внатре во $\triangle UVX$ ќе ги нарекуваме пасивни (со исклучок на U и V). Лесно се гледа дека пасивните темиња не се придружени на ниту една страна на $\Re$, како и дека на сите пасивни страни им е придружено темето B. Сега да го разгледаме многуаголникот $\Re'$ добиен со замена на сите пасивни темиња на $\Re$ со точката X. Бидејќи темето B е придружено и на страните UX и VX во $\Re'$, збирот на плоштините придружени на пасивните страни се зголемил за плоштината S на делот на четириаголникот $BUXV$ надвор од $\Re$, додека останатите придружени плоштини не се променија. Според тоа, $\sigma(\Re') = \sigma(\Re) + S$. Бидејќи $[\Re'] = [\Re] + S$, следува дека $\delta(\Re') = \delta(\Re) - S$.

Со премин од $\Re$ на $\Re'$ бројот на непаралелните страни се намали, па од индуктивната претпоставка имаме $0 \le \delta(\Re') \le \delta(\Re)$.