Републички натпревар 1982

I година

1. Збирот на 5 природни броеви е 1982. Која најголема вредност може да ја прими нивниот најголем заеднички делител?

Решение. Нека a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се тие броеви и нека d е нивниот најголем заеднички делител. Тогаш $a_i = k_i d$, $i = 1,2,3,4,5$ и, притоа,

$$d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) = 1982,$$

т.е.

$$ds = 2 \cdot 991,$$

каде што $s = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$.

Бидејќи $s \geq 5$, имаме: $s = 991$, $d = 2$ или $s = 1982$, $d = 1$. Значи, најголемата можна вредност што може да ја прими d е 2.

2. а) Да се докаже дека за кои било позитивни реални броеви x и y важи неравенството

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \qquad (*)$$

б) Ако a, b, c се позитивни реални броеви и ако $a + b + c = 1$, тогаш

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

Докажи!

Решение. а) Од $(x-y)^2 \geq 0$ добиваме $x^2 + y^2 \geq 2xy$, па ќе имаме

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} = 2.$$

б) Од $a + b + c = 1$ имаме:

$$\frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}, \qquad \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}, \qquad \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Собирајќи ги овие равенства, имајќи го предвид (*), добиваме:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Да забележиме дека равенството ќе важи за

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 2, \text{ т.е. } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

3. Тројца луѓе A, B и C се допишуваат меѓу себе, така што:

- A му пишува на B секој трет ден, а на C секој втор ден;
- B му пишува на A по добиени четири писма од A и C, а на C секој трет ден;

- C му пишува на A по добиени три писма од A и B, а на B секој четврти ден.

По колку дена A ќе добие 61 писмо, ако писмата патуваат по еден ден?

Решение. Со x да го означиме бројот на деновите за кои на A му е испратено 61 писмо. За тоа време B добил од A $\frac{x-1}{3}$ писма, а од C $\frac{x-1}{4}$ писма, или вкупно од A и C: $\frac{7(x-1)}{12}$ писма. Исто така, C од A добил $\frac{x-1}{2}$ писма, а од B добил $\frac{x-1}{3}$ писма, или вкупно од A и B: $\frac{5(x-1)}{6}$ писма.

Значи, за x дена B на A ќе му испрати $\frac{7(x-1)}{12\cdot 4}$ писма, а C на A ќе му испрати $\frac{5(x-1)}{6\cdot 3}$ писма, т.е. на A ќе му бидат испратени вкупно $\frac{7(x-1)}{48}+\frac{5(x-1)}{18}=61$ писмо. Решението на ова равенка е $x=145$. Бидејќи последното испратено писмо треба да патува еден ден, A ќе добие 61 писмо за 146 дена.

4. Нека M е произволна внатрешна точка за правилниот тетраедар $ABCD$. Да се докаже дека збирот на растојанието од M до ѕидовите на тетраедарот е константен.

Решение. Правилниот тетраедар $ABCD$ го разбиваме на четири тетраедри: $ABCM$, $BCDM$, $CDAM$ и $DABM$. Тогаш имаме

$$V_{ABCM}+V_{BCDM}+V_{CDAM}+V_{DABM}=V_{ABCD}.$$

Растојанието од точката M до ѕидот XYZ да го означиме со d_{XYZ}; тогаш имаме

$$V_{ABCM}=\frac{1}{3}P_{ABC}d_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{ABC},$$

$$V_{BCDM}=\frac{1}{3}P_{BCD}d_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{BCD}$$

$$V_{CDAM}=\frac{1}{3}P_{CDA}d_{CDA}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{CDA},$$

$$V_{DABM}=\frac{1}{3}P_{DAB}d_{DAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{DAB}.$$

Бидејќи $V_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$, од (1) добиваме

$$d_{ABC}+d_{BCD}+d_{CDA}+d_{DAB}=H.$$

II година

1. Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви со модул 1 и нека $z_1+z_2+z_3=0$. Да се докаже дека

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

Решение. Од $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ добиваме

$$|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|=1.$$

Нека $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,2,3$. Од $|z_k + z_j| = 1$ за $k \neq j$ добиваме

$$(x_k^2 + x_j^2) + (y_k^2 + y_j^2) + 2(x_k x_j + y_k y_j) = 1$$
$$2 + 2 \cdot (x_k x_j + y_k y_j) = 1$$
$$2(x_k x_j + y_k y_j) = -1.$$

Користејќи го тоа, за модулот на $z_k - z_j$ ($k, j \in \{1,2,3\}$, $k \neq j$) добиваме

$$\begin{aligned} |z_k - z_j|^2 &= (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 \\ &= (x_k^2 + x_j^2) + (y_k^2 + y_j^2) - 2(x_k x_j + y_k y_j) \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

т.е.

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}.$$

2. Од местото A кон местото B истовремено тргнуваат две групи туристи. Првата група тргнала со автобус движејќи се со просечна брзина од $20\,km/s$ и стигнала до местото C што е на половина пат меѓу A и B, а потоа тргнале пешки. Втората група тргнала пешки, а по 1 час се качила на автобус, кој се движел со просечна од $30\,km/h$. Во местото C, првата група стигнала 35 минути порано од втората, а во местото B стигнала 1 час и 25 минути подоцна. Колку се оддалечени местата A и B и колкава е просечната брзина на групите, кога одат пешки, ако просечната брзина на првата група е за $1\,km/h$ поголема од просечната брзина на втората група?

Решение. Со x да ја означиме просечната брзина на првата група (кога оди пешки). Тогаш просечната брзина на втората група (кога оди пешки) ќе биде $y = x - 1$. Ако со s го означиме растојанието меѓу местата A и B, тогаш, од условите на задачата, добиваме:

$$\frac{\frac{s}{2}}{20} + \frac{7}{12} = 1 + \frac{\frac{s}{2}(x-1)}{30}$$
$$\frac{\frac{s}{2}}{x} = \frac{\frac{s}{2}}{30} + 2$$

од каде што добиваме $x_1 = 6$, $x_2 = 67,25$, $s_1 = 30$, $s_2 = -215$.

Значи, просечната брзина на првата група (кога одат пешки) е $6\,\mathrm{km/h}$, на втората $5\,\mathrm{km/h}$, а местата A и B се оддалечени $30\,\mathrm{km}$.

3. Да се конструира правоаголен триаголник ABC, со прав агол кај темето C, ако е дадена хипотенузата c, а тежишната линија t_c е геометриска средина на катетите.

Решение. По услов имаме $t_c^2 = ab$; но, $t_c = \frac{c}{2}$, па, значи, $c^2 = 4ab$. За висината h_c имаме $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{c}{4}$, па триаголникот ABC (со дадени c и h_c) може да се конструира.

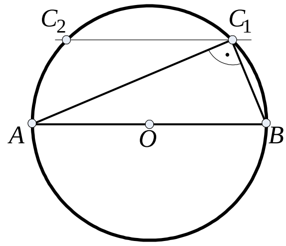
Конструкција. 1) $\overline{AB} = c$;

2) O средина на AB;

3) права p, паралелна со AB и на растојание $h_c = \frac{c}{4}$ од неа;

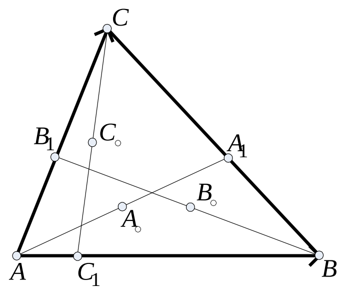
4) кружница $k(O,\overline{OA})$;

5) темето C припаѓа на $P \cap k$ (види цртеж).



4. Нека A_1, B_1 и C_1 се произволни внатрешни точки соодветно од страните BC, CA и AB на триаголникот ABC и нека A_0, B_0 и C_0 се средини на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1, соодветно. Да се докаже дека точките A_0, B_0 и C_0 не се колинеарни.

Решение. Да ставиме $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (види цртеж). Тогаш $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Точката C_1 лежи на страната AB што значи дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ се колинерани, па постои реален број λ $(0 < \lambda < 1)$, така што $\overrightarrow{AC_1} = \lambda\vec{b}$. Исто така, постојат реални броеви μ и ν $(0 < \mu, \nu < 1)$, така што $\overrightarrow{BA_1} = \mu(\vec{c} - \vec{b})$, $\overrightarrow{AB_1} = \nu\vec{c}$.



За да докажеме дека точките A_0, B_0, C_0 не се колинеарни, доволно е да докажеме дека векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_0C_0}$ не се колинеарни, т.е. не постои реален број x така што $\overrightarrow{A_0C_0} = x\overrightarrow{A_0B_0}$. За таа цел, прво да ги најдеме векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_0C_0}$. Имаме

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_0B_0} &= \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_0} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} \\
&= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{AB_1}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mu\overrightarrow{BC} + \nu\overrightarrow{AC}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mu\vec{b} + (\nu - \mu)\vec{c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0C_0} &= \overrightarrow{A_0A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_0}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1})\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{AC_1})\\ &= \tfrac{1}{2}((1-\mu)\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{AB})\\ &= \tfrac{1}{2}((1-\mu)(\vec{c}-\vec{b})+\lambda\vec{b})\\ &= \tfrac{1}{2}((\lambda+\mu-1)\vec{b}+(1-\mu)\vec{c})\end{aligned}.$$

Да ја разгледаме, сега, равенката $\overrightarrow{A_0C_0}=x\overrightarrow{A_0B_0}$, т.е.

$$(\lambda+\mu-1-x\mu)\vec{b}+(1-\mu-x\nu+x\mu)\vec{c}=\vec{0}.$$

Векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не се колинеарни, па, ќе имаме

$$\begin{aligned}\lambda+\mu-1-x\mu=0\\ 1-\mu-x\nu+x\mu=0\end{aligned}$$

Бидејќи $0<\mu<1$, првата равенка има единствено решение $x=\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}$. Втората равенка има решение ако $\mu-\nu\neq 0$, или, пак, $\mu-\nu=0$ и $\mu-1=0$. Во вториот случај имаме $\mu=\nu=1$, што не е можно. Значи, и втората равенка има единствено решение $x=\frac{\mu-1}{\mu-\nu}$.

За равенката $\overrightarrow{A_0C_0}=x\overrightarrow{A_0B_0}$ да има решение, треба

$$\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}=\frac{\mu-1}{\mu-\nu},$$

од каде што добиваме $\lambda=-1+\frac{\mu(1-\nu)}{\mu-\nu}<0$, што не е можно.

Следствено, не постои реален број x, така што да важи $\overrightarrow{A_0C_0}=x\overrightarrow{A_0B_0}$, т.е. точките A_0, B_0 и C_0 не се колинеарни.

III година

1. Да се најде збирот на коефициентите при непарните степени на x на полиномот

$$p(x)=(x^2+2x+2)^{1982}+(x^2-3x-3)^{1982}.$$

Решение. Ако $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ е полином од n-ти степен, тогаш

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n,$$

$$f(-1)=a_0-a_1+a_2-...+(-1)^n a_n,$$

па, значи $\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))$ е збирот на коефициентите пред парните степени на x, а $\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))$ е збирот на коефициентите пред непарните степени на x.

Според тоа, збирот на непарните степени на x на полиномот $p(x)$ ќе биде:

$$\frac{1}{2}[p(1)-p(-1)]=\frac{1}{2}(5^{1982}+5^{1982}-1-1)=5^{1982}-1.$$

2. Нека α,β и γ се агли на еден триаголник ABC. Да се докаже дека:

а) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$ ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен,

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2$ ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен,

в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен.

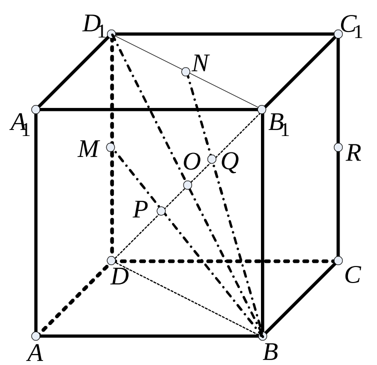
Решение. За изразот $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ имаме:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma&=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}+\tfrac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2(\alpha+\beta)\\&=1-\tfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)\\&=2-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=2+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

Според тоа $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$, т.е. ако и само ако еден од аглите α,β,γ е прав.

3. Рамнините ACD_1 и DC_1A_1 ја сечат дијагоналата DB_1 на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1$) во точките P и Q. Да се докаже дека $\overline{DP}=\overline{PQ}=\overline{QB_1}$.

Решение. Да го разгледаме триаголникот DBD_1 (види цртеж). Точката M е средина на страната DD_1, а точката O е средина на страната BD_1 и $P=BM\cap DO$. Значи, P е тежиштето на триаголникот DBD_1, од каде што следува дека: $\overline{DP}=\frac{2}{3}\overline{DO}=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\overline{DB_1}=\frac{1}{3}\overline{DB_1}$.



На ист начин, од триаголникот BB_1D_1, добиваме дека $\overline{QB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}$, па значи:

$$\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}.$$

4. Нека A и B се n-цифрени броеви, n-непарен, коишто при делењето со k даваат ист остаток $r \neq 0$. Да се најде барем еден број k, што не зависи од n, така што бројот C, добиен со допишување на цифрите од A и B, да е делив со k.

Решение. Нека $A = ka + r$, $B = kb + r$, $0 < r < k$; тогаш имаме:

$$C = 10^n A + B = 10^n(ka + r) + (kb + r) = k(10^n a + b) + (10^n + 1)r.$$

Бројот C е делив со k ако и само ако бројот $10^n + 1$ е делив со k. Бидејќи $n = 2m + 1$, имаме

$$10^n + 1 = 10^{2m+1} + 1 = (10+1)(10^{2m} - 10^{m-1} + ... + 1) = 11D,$$

што значи дека еден број k што го задоволува условот на задачата е бројот 11.

IV година

1. Да се најде збирот на сите трицифрени броеви што може да се формираат од цифрите 1, 2, 3 и 4.

Решение. Од цифрите 1, 2, 3 и 4 може да се формираат $4^3 = 64$ трицифрени броеви. Секоја цифра на последното место се јавува ист број пати, т.е. секоја од цифрите 1, 2, 3, 4 како последна се јавува во 16 трицифрени броеви. Затоа, збирот на едниците е:

$$16(1+2+3+4) = 160,$$

а збирот на десетките и стотките ќе биде 1600 и 16000 соодветно. Според тоа, збирот на сите трицифрени броеви ќе биде

$$160 + 1600 + 16000 = 17760.$$

2. Четири броја a_1, a_2, a_3, a_4 формираат аритметичка прогресија. Производот од првиот и четвртиот член е еднаков на поголемиот корен на равенката

$$x^{1+\log x} = 0,001^{-\frac{2}{3}},$$

а збирот на квадратите на вториот и третиот член е петпати поголем од редниот број на членот во развојот на

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[6]{y}\right)^{20}$$

што не зависи од y. Да се најдат тие броеви.

Решение. Да ја решиме, прво, дадената равенка. Неа можеме да ја напишеме во обликот

$$x^{1+\log x} = 10^2,$$

Од каде што добиваме

$$(1+\log x)\log x = 2,$$

т.е. $\log x = 1$ и $\log x = -2$ или $x = 10$ и $x = 10^{-2}$.

Да го најдеме, сега, членот на развојот на дадениот бином што не зависи од y. Притоа $(k+1)$-от член е:

$$\binom{20}{k} y^{\frac{k-20}{4}+\frac{k}{6}},$$

а ако тој не зависи од y, мора да биде

$$\frac{k-20}{4}+\frac{k}{6}=0,$$

т..е. $k=12$. Значи, 13-от член не зависи од y.

Од условот на задачата имаме

$$a_1a_4 = 10, \qquad a_2^2 + a_3^2 = 5\cdot 13,$$

т.е.

$$a_1(a_1+3d)=10, \qquad 2a_1^2 + 5d^2 + 6a_1d = 65,$$

од каде што добиваме $d=\pm 3$, $a_1 = \mp 10$. Значи, бараните броеви се $-10,-7,-4,-1$ или $10,7,4,1$.

3. Да се докаже дека

$$S = \operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2 + \operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3 + \ldots + \operatorname{tg}a_n\operatorname{tg}a_{n+1} = \frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1 \cos a_{n+1}\operatorname{tg}\alpha} - n,$$

каде што $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ се последователни членови на артиметичка прогресија со разлика α.

Решение. Имаме

$$\operatorname{tg}(a_{k+1}-a_k) = \frac{\operatorname{tg}a_{k+1}-\operatorname{tg}a_k}{1+\operatorname{tg}a_{k+1}\operatorname{tg}a_k}, \quad k = 1,2,3,\ldots,n,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}a_{k+1}\operatorname{tg}a_k = \frac{\operatorname{tg}a_{k+1}-\operatorname{tg}a_k}{\operatorname{tg}\alpha} - 1, \quad k = 1,2,3,\ldots,n.$$

Собирајќи ги овие равенства за k од 1 до n добиваме

$$S = \frac{\operatorname{tg}a_{n+1}-\operatorname{tg}a_1}{\operatorname{tg}\alpha} - n = \frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1 \cos a_{n+1}\operatorname{tg}\alpha} - n.$$

4. Должините на сите рабови на правилна четиристрана пирамида $SABCD$ (со врв S) се еднакви на a. Низ точката A, поставена е рамнина Σ што е нормална на рамнината ACS и минува низ средината M на работ SC. Да се најде волуменот на четиристраната пирамида, отсечена од дадената пирамида со рамнината Σ.

Решение. Според условот на задачата, треба да го најдеме волуменот V на пирамидата $SAKMN$ (види цртеж). Тристраните пирамиди $KSAM$ и $NSAM$ имаат еднакви волумени. Ако SAM ја земеме како основа на овие пирамиди, тогаш тие имаат еднакви висини, KR и NR. Според тоа,

$$V = \frac{2}{3} P_{ASM} \cdot \overline{KR}.$$

Бидејќи $\measuredangle ASM = 90^\circ$, следува дека

$$P_{ASM} = \frac{1}{2}\overline{AS} \cdot \overline{MS} = \frac{a^2}{4}.$$

Точката R е тежиште на триаголник ACS, па ќе имаме

$$\overline{SR} : \overline{SO} = 2:3.$$

Од сличноста на триаголниците SRK и SOB добиваме:

$$\overline{RK} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SO}}\overline{OB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

На крајот, бараниот волумен ќе биде:

$$V = \frac{2}{3} P_{ASM} \cdot \overline{RK} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}.$$