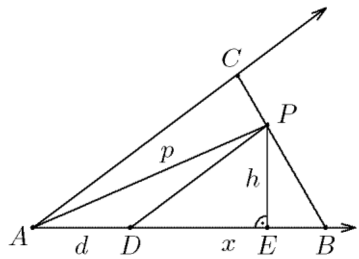
БМО 1994

1. Дадени се остар агол XAY и точка P во неговата внатрешност. Конструирај права која минува низ точката P и ги сече краците на аголот AX и AY соодветно во точките B и C така што плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на плоштината на квадрат со страна AP.

Решение. *Прв начин*. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран и нека точките D и E припаѓаат на AB и се такви што $PD \parallel AC$ и $PE \perp AB$ (цртеж десно). Да означиме

$$\overline{AP} = p, \overline{AD} = d, \overline{PE} = h \text{ и } \overline{BD} = x.$$



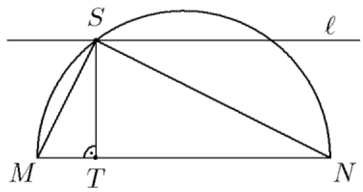
Тогаш од условот следува дека p, d и h се познати и треба да се најде x. Од $\triangle ABC \sim \triangle DBP$ следува дека

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DBP}} = \frac{2p^2}{xh}.$$

Според тоа, x е корен на квадратната равенка $x^2 - 2bx + d^2 = 0$, каде $b = \frac{p^2 - dh}{h}$.

Конструкција. 1) Конструираме отсечка со должина $b = \frac{p^2}{h} - d$.

2) Конструираме отсечка $\overline{MN} = 2b$ и полукружница k со дијаметар MN (цртеж десно).



3) Во полурамнината на k конструираме права $l \parallel MN$ која од MN е на растојание d.

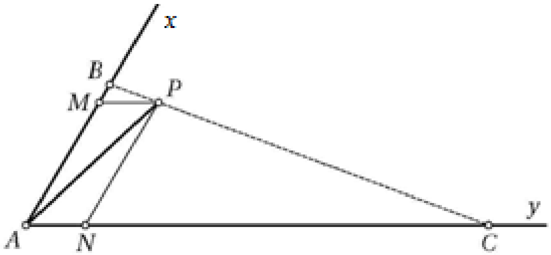
4) Конструираме нормала $ST \perp MN, T \in MN$.

5) Отсечките MT и NT имаат должини еднакви на корените на равенката $x^2 - 2bx + d^2 = 0$.

Доказ. Од правоаголниот $\triangle MNS$ имаме $\overline{MN} \cdot \overline{NT} = d^2$ и $\overline{MN} + \overline{NT} = 2b$.

Дискусија. Задачата има две решенија ако $d < b$, односно $2dh < p^2$, точно едно решение ако $d = b$, односно $2dh = p^2$ и нема решение ако $d > b$.

Втор начин. Со $S_{\mathbf{P}}$ ја означуваме плоштината на многуаголникот $\mathbf{P}$. Нека претпоставиме дека BC е бараната права. Нека M и N се точки соодветно на краците Ax и Ay такви што $PM \parallel Ay$ и $PN \parallel Ax$. Од сличноста на триаголниците BMP и PNC следува



$\frac{\overline{BM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{NC}}$, т.е. $\frac{\overline{BM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{NC}}$,

па затоа

$\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{NC} = \overline{AN}(1 + \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}})$.

Сега имаме

$$k = \frac{\overline{AP}^2}{P_{AMN}} = \frac{P_{ABC}}{P_{AMN}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}$$
$$= \frac{(\overline{AM} + \overline{BM}) \cdot \overline{AN} \cdot (1 + \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}})}{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}$$
$$= 2 + \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

Значи, доволно е да се конструира отсечка BM таква што

$$\overline{BM} + \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}} = d \text{, каде } d = (k-2)\overline{AM} \text{.}$$

Отсечка со должина d се конструира едноставно: ако h е висината од темето M во триаголникот AMP, тогаш $k = \frac{2\overline{AP}}{h}$ и $d = \frac{2(\overline{AP} - h)\overline{AM}}{h}$. Сега конструираме точка Z на кружницата над дијаметар XY, на растојание еднакво на $\overline{AM}$ од правата XY (таа постои ако и само ако $d \geq 2\overline{AM}$). Ако Z' е подножјето на нормалата од Z на XY, тогаш $\overline{AM}^2 = \overline{XZ'} \cdot \overline{Z'Y}$, т.е. $\overline{XZ'} + \frac{\overline{AM}^2}{\overline{XZ'}} = \overline{XZ'} + \overline{YZ'} = d$, па можеме да земеме $BM \cong XZ''$.

Задачата има две решенија ако $d > 2\overline{AM}$, едно решение ако $d = 2\overline{AM}$ и нема решение ако $d < 2\overline{AM}$.

2. Докажи, дека полиномот $P(x) = x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m$, каде m е цел број, има најмногу еден целоброен корен.

Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека полиномот има барем два целобројни корени. Тогаш

$$x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m = (x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d)$$

каде a и b се цели броеви. Со споредување на коефициентите добиваме

$$a + c = 1994 \qquad (1)$$
$$ac + b + d = 1993 + m \qquad (2)$$
$$ad + bc = 11 \qquad (3)$$
$$bd = m. \qquad (4)$$

Од (1) следува дека c е цел број, а тогаш од (2) следува дека и d е цел број. Повторно од (1) следува дека a и c се со иста парност, а од (3) добиваме дека тие не може да се истовремено парни. Според тоа, a и c се непарни, па од (3) заклучуваме дека b и d се со различна парност. Сега од (4) следува дека m е парен број. Но, тоа значи дека левата страна на (2) е парна, а десната страна е непарна што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека полиномот има најмногу еден целоброен корен.

Втор начин. Нека претпоставиме дека x е целобројна нула на дадениот полином. Тогаш

$$-m=\frac{x^4-1994x^3+1993x^2-11x}{x^2+1}=x^2-1994x+1992+\frac{1983x-1992}{x^2+1}.$$

Според тоа, x^2+1 е делител на $1983x-1992$, па затоа x^2+1 е делител на $1983^2x^2-1992^2=1983^2(x^2+1)-(1983^2+1992^2)$. Тоа значи дека x^2+1 е делител на $1983^2+1992^2=3^2\cdot 877817$. Последното е можно само за $x=0$, бидејќи кога $x\neq 0$ имаме $x^2+1\nmid 3^2$, а 877187 е прост број и не е од видот x^2+1. Од претходно изнесеното следува дека дадениот полином може да има најмногу една целобројна нула.

3. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n\geq 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Решение. *Прв начин*. Да означиме

$$S=|a_n-a_1|+\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k| \qquad (1)$$

и на реалната оска да ги разгледаме точките $A_1,A_2,...,A_n$ со координати $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно. Тогаш збирот S е еднаков на должината на затворената искршена линија $A_1A_2...A_nA_1$. Ќе ја оцениме оваа должина ако го разгледаме покривањето на интервалите од видот $[k,k+1]$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Ако $k<\frac{n}{2}$, интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2k$ пати, бидејќи на располагање имаме најмногу k леви краеви на покривните отсечки, а секоја точка е крајна за две отсечки. Аналогно при $k\geq\frac{n}{2}$ интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2(n-k)$ пати. Според тоа, кога $n=2m$ имаме

$$S\leq 2[1+2+...+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$

а кога $n=2m+1$ имаме

$$S\leq 2[1+2+...+m+m+(m-1)+...+2+1]=2m(m+1).$$

Можеме да ги обединиме двете оценки со

$$S\leq 2m(n-m),\text{ каде } m=[\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n - a_1| \geq 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m-1)$.

Не е тешко да се провери дека пермутацијата зададена со $a_{2k} = k$ и $a_{2k-1} = n-m-k$, за $k = 1, 2, ..., m$, $a_n = m+1$, ако n е непарен број, дава збир $2m(n-m)-1$. Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

Втор начин. Да означиме $S = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|$, каде $a_{n+1} = a_1$. Овој збир може да се запише во видот

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \text{ , за некои } \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ и } c_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1},$$

при што $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$. За секој i важи $c_i \in \{-2, 0, 2\}$. Ги разгледуваме множествата $A = \{i \mid c_i = 2\}$ и $B = \{i \mid c_i = -2\}$. Од $c_1 + c_2 + ... + c_n = 0$ следува дека $|A| = |B| = k$, за некој $k \leq \frac{n}{2}$. Според тоа,

$$S = 2\sum_{i \in A} x_i - \sum_{i \in B} x_i \leq 2(n + (n-1) + ... + (n-k+1)) - 2(1 + 2 + ... + k) = 2k(n-k).$$

Изразот $2k(n-k)$ прима најголема вредност за $k = [\frac{n}{2}]$, па затоа

$$S \leq 2k(n-k) \text{ , каде } k = [\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n - a_1| \geq 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m)-1$.

Равенство се достигнува, на пример, за пермутацијата

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (m+1, 1, m+2, 2, m+3, 3, ..., m) \text{ , каде } m = n - [\tfrac{n}{2}].$$

Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

4. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A.)

Решение. Нека A е фиксиран член на групата и $A_1, A_2, ..., A_r$ се познаниците на A. Тогаш од условот на задачата следува дека меѓу лицата $A_1, A_2, ..., A_r$ не постојат двајца кои се познаваат и за секои две лица A_i и A_j, $1 \leq i < j \leq r$ постои точно едно лице $A_{ij} \neq A$ кое се познава со двајцата. Освен тоа, не постојат две од лицата A_{ij} кои се познаваат меѓу себе, бидејќи во спротивно ќе има член на групата кој има барем три заеднички познаници со A.

Множеството членови A_{ij}, $1 \leq i < j \leq r$ всушност е множеството од оние лица кои не го познаваат A. Според тоа, $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, од каде наоѓаме $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$.

Добиениот израз за r не зависи од изборот на A, што значи дека сите членови на групата имаат ист број познаници.

Од условот $n \geq 5$ следува $r \geq 3$. Уште повеќе, бидејќи познаниците на $A_{1,2}$ се A_1, A_2 и уште $r-2$ членови на множеството $\{A_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq r\}$ треба да биде исполнето неравенството $r-2 < \binom{r-2}{2}$, па затоа $r \geq 5$ и $n \geq 16$.

Ќе дадеме пример на група од 16 лица $A, A_1, A_2, ..., A_5, A_{1,2}, A_{1,3}, ..., A_{4,5}$ во која познанствата се меѓу следниве парови

1) $(A, A_i), i = 1, 2, ..., 5$
2) (A_i, A_{ij}), $(A_j, A_{ij}), 1 \leq i < j \leq 5$,
3) $(A_{ij}, A_{km}), 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < m \leq 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$.

Лесно се проверува дека оваа група ги има саканите својства, па затоа најмалиот број е 16.