Ljubomir Vuković (Beograd)

RASTAVLJANJE POLINOMA NA PROSTE ČINIOCE

Već odmah po dolasku u šesti razred učenici se upoznaju sa činjenicom da se svaki složen broj može predstaviti (izraziti) kao proizvod prostih brojeva, koje nazivamo prostim činiocima tog broja. Na primer:

$$15=3\cdot 5, \qquad 18=2\cdot 3\cdot 3.$$

Ovu operaciju izražavanja složenog broja pomoću njegovih prostih činilaca nazivamo rastavljanjem na proste činioce.

Monom ćemo rastaviti na proste činioce ako rastavimo na proste činioce njegov koeficijent kao i stepene koji se javljaju u njegovoj glavnoj količini. Na primer:

$6x^3y^2=2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y$ jer je $6=2\cdot 3$, $x^3=x\cdot x\cdot x$ i $y^2=y\cdot y$.

U ovom članku izkožićemo neke jednostavnije slučajeve rastavljanja polinoma na proste činioce.

I *Rastavljanje polinoma čiji članovi imaju zajednički činilac.* Poznato je da posle množenja polinoma monomom imamo ovakvu jednakost: $(a+b+c)\cdot k=ak+bk+ck$. No, kako je jednakost simetična relacija, možemo pisati : $ak+bk+ck=(a+b+c)\cdot k$ ili, koristeći se i komutativnim zakonom množenja, još i:

$$ak+bk+ck=k\cdot(a+b+c).$$

Prema ovome možemo reći : *ako svi članovi polinoma sadrže zajednički činilac, onda ga možemo izraziti kao proizvod tog zajedničkog činioca i izraza koji se dobija deljenjem datog polinoma tim činiocem.*

Primer 1. Rastaviti na činioce polinom: $4ab+12ac-8ad$. Kako je $4a$ zajednički činilac svih članova polinoma, biće:

$$4ab+12ac-8ad=4a(b+3c-2d)=2\cdot 2\,a(b+3c-2d).$$

Ako samo neki članovi polinoma imaju zajednički činilac, onda treba najpre samo zbir tih članova zameniti (kao u prethodnom slučaju) proizvodom, pa tek onda ispitati da li se ceo dati polinom može zameniti jednim proizvodom.

Primer 2. Rastaviti na proste činioce polinom: $3m+3n+bm+bn$.

Izvucimo iz prva dva člana zajednički činilac 3, a iz druga dva člana zajednički činilac b, pa ćemo imati:

$$3m+3n+bm+bn=3(m+n)+b(m+n).$$

Sad je $m+n$ zajednički činilac dva sabirka sa desne strane ove jednakosti, pa je zato:

$$3m+3n+bm+bn=(3+b)(m+n).$$

Primer 2. Rastaviti na proste činioce polinom $4ak-3b+6bk-2a$.

Izvucimo iz prvog i trećeg člana ovog polinoma činilac $2k$, a iz drugog i trećeg njegovog člana činilac —1, pa ćemo imati:

$$4ak-3b+6bk-2a=2k(2a+3b)-(2a+3b).$$

Usled toga je:

$$4ak-3b+6bk-2a=(2a+3b)\ (2k-1).$$

Ali ovaj postupak ne mora dovesti uvek do rezultata, kao što će se to videti iz sledećeg primera.

Primer 3. Rastaviti na proste činioce polinom $ap+bp+aq-bq$.

Izvucimo iz prva dva člana ovog polinoma zajednički činilac p, a iz druga dva člana zajednički činilac q, pa ćemo imati:

$$ap+bp+aq-bq=p(a+b)+q\,(a-b).$$

Tako su, kako prva dva člana datog polinoma, tako i dva druga njegova člana, rastavljena na po dva prosta činioca. No, kako proizvodi $p\ (a+b)$ i $q\ (a-b)$ nemaju zajedničkog činioca, to se sam polinom ne može rastaviti na proste činioce.

II *Rastavljanje razlike kvadrata na proste činioce.*

Kako se množenjem lako utvrđuje da je $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, to je i

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b).$$

Prema tome, može se reći da je razlika kvadrata dva broja jednaka proizvodu zbira i razlike tih brojeva.

Primer 1. Rastaviti na činioce polinom $9a^2-16$.

Kako je $9a^2=(3a)^2$ i $16=4^2$, to je $9a^2-16=(3a)^2-4^2$. Zato je:

$$9a^2-16=(3\,a)^2-4^2=(3\,a+4)\ (3a-4).$$

Napomena. Rastavljanje razlike kvadrata na činioce predstavlja neki put vrlo koristan postupak pri izračunavanju brojevne vrednosti nekih izraza koji predstavljaju razliku kvadrata. Tako, na primer, ako treba da se izračuna 621^2-620^2, imamo:

$$621^2-620^2=(621+620)\ (621-620)=1241\cdot 1=1241.$$

III *Rastavljanje trinoma oblika* $a^2\pm 2ab+b^2$ *na proste činioce.*

Množenjem lako se utvrđuje da je:

$$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2 \text{ i } (a-b)^2=(a-b)\,(a-b)=$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

Zato je i obratno:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)\ (a+b) \text{ i } a^2-2ab+b^2=(a-b)\ (a-b).$$

Prema tome, može se reći: *ako su članovi trinoma kvadrat jednog broja, dvostruki proizvod tog broja i nekog drugog broja odnosno suprotna vrednost ovog dvostrukog proizvoda, i kvadrat tog drugog broja, onda trinom predstavlja kvadrat zbira odnosno kvadrat razlike ova dva broja.*

Primer 1. Rastaviti na činioce trinom: $9x^2+12x+4$.

Vidimo da je $9x^2=(3x)^2$, što znači da je prvi član datog trinoma kvadrat monoma $3x$; zatim da je $4=2^2$, tj. da je treći član kvadrat broja 2. Prema, tome, preostaje nam još da proverimo da li je broj $12x$ jednak udvostručenom proizvodu ova dva člana. Zaista, kako je $12x=2\cdot 3x\cdot 2$, to je:

$$9x^2+12x+4=(3x+2)\ (3x+2).$$

IV *Rastavljanje polinoma na proste činioce primenom dva ili više od navedenih postupaka*

Neki put se dati polinom može rastaviti na proste činioce tek primenom dva ili više od navedenih postupaka, kao što će se to videti iz sledeća dva primera.

Primer 1. Rastaviti na činioce polinome $1-4b^2+a-2ab$.

Zbir prva dva člana ovog polinoma predstavlja razliku kvadrata brojeva 1 i $2b$, pa se može predstaviti kao proizvod $(1+2b)(1-2b)$; a ako se iz druga dva člana ovog polinoma izvuče činilac a, onda njihova razlika predstavlja proivod $a\ (1-2b)$. Zato je:

$$1-4b^2+a-2ab=(1+2b)(1-2b)+a(1-2b)=(1-2b)(a+2b+1).$$

Primer 2. Rastaviti na činioce polinom $a^2+2\,ab+b^2-c^2$.

Zbir prva tri člana ovog polinoma predstavlja kvadrat zbira $a+b$, pa se zato dati polinom može predstaviti u vidu $(a+b)^2-c^2$. Kako pak sada taj polinom ima oblik razlike kvadrata, to je:

$$a^2+2\,ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)\,(a+b-c).$$

Međutim, treba zabeležiti da ima i polinoma koji se ne mogu rastaviti na činioce samo putem navedenih postupaka, nego je za njihovo rastavljanje na proste činioce potrebno i poznavanje nekih drugih pravila.

Zadaci

1. Rastaviti na činioce sledeće polinome:
a) $12a^5+18a^3$; b) $a(x+1)-b(x+1)$; c) $4x(x-5)-x+5$;
d) $a^3+4a^2+4a+16$; e) a^2-25; f) a^2-b^2+a+b; g) $-a^2+2ab-b^2$.

2. Rastaviti na činioce sledeće polinome:
a) $4a^2-m^2-2a+m$; b) $9a+6a+a^2-b^2-2ab-c^2$; c) $x^2-xy-y-1$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија