Регионален натпревар 1998

I година

1. Тројца патници седнале да јадат. Првиот извадил 3 сомуни, а вториот 4 сомуни. Ги поделиле седумте сомуни на три еднакви делови и ги изеле. Третиот патник извадил 7 гроша и им рекол: „Јас немав сомуни, но еве ви давам 7 гроша, а вие поделете си ги правилно“.

Колку гроша му припаѓаат на првиот, а колку на вториот патник?

Решение. Секој патник изел $\frac{7}{3}$ од сомуните. Третиот патник ги платил своите $\frac{7}{3}$ со 7 гроша-значи секоја третина сомун ја платил по 1 грош.

Првиот патник донел 3 сомуни, т.е. $\frac{9}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{2}{3}$. Слично, вториот патник донел $\frac{12}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{5}{3}$ од сомуните. Конечно, првиот патник треба да добие 2 гроша, а вториот патник 5 гроша.

2. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Ако

$$S_k = b_1 + b_2 + ... + b_k,\ k = 1, 2, 3..., n,$$

докажи дека

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = (a_1 - a_2)S_1 + (a_2 - a_3)S_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_nS_n.$$

Решение. Од $S_1 = b_1$, $S_2 = b_1 + b_2$, $S_3 = b_1 + b_2 + b_3, \ldots$ следува:

$$b_1 = S_1,\ b_2 = S_2 - S_1,\ b_3 = S_3 - S_2, \ldots,\ b_n = S_n - S_{n-1}.$$

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n &= a_1S_1 + a_2(S_2 - S_1) + a_3(S_3 - S_2) + ... + a_n(S_n - S_{n-1}) \\ &= a_1S_1 + a_2S_2 - a_2S_1 + a_3S_3 - a_3S_2 + ... + a_nS_n - a_nS_{n-1} \\ &= (a_1 - a_2)S_1 + (a_2 - a_3)S_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_nS_n \end{aligned}$$

3А. Дадена е низата броеви $1, 1, 2, 3, 7, 22, 155, ...$ во која секој член, почнувајќи од третиот, е еднаков на производот од претходните два члена зголемен за 1. Докажи дека ниеден член на низата не е делив со 4.

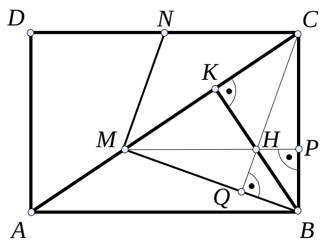
Решение. Лесно се воочува дека по секои два непарни членови на низата, следува парен член, по него два непарни, па пак парен, итн. Доволно е да докажеме дека ниту еден од парните членови не е делив со 4. За таа цел избираме пет последователни членови на низата: a, b, c, d, e од кои b, e се парни; a, c, d се непарни. Тогаш:

$$c = ab + 1, \quad d = bc + 1, \quad e = cd + 1 = (ab + 1)(bc + 1) + 1 = ab^2c + b(a + c) + 2.$$

Бидејќи b е парен број, следува $4 \mid ab^2c$. Производот $b(a+c)$ е исто така делив со 4, бидејќи b е парен и збирот $a+c$ е парен број. Значи, првите два собироци се деливи со 4, а третиот не, па оттука заклучуваме дека e не е делив со 4.

4А. Во правоаголникот $ABCD$ е повлечена нормалата BK на дијагоналата AC. Точките M и N се средини на отсечките AK и CD, соодветно. Докажи дека $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Нека $BK \perp AC$ (види цртеж). Тогаш BK е висина во триаголникот $\triangle MBC$. Да ги повлечеме другите две висини MP и CQ и нека тие се сечат во точката H, која е ортоцентар на триаголниккот $\triangle MBC$.



Бидејќи $MP \perp BC$ и M е средина на отсечката AK, следува дека MH е средна линија во триаголникот ABK, па имаме: $\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $MH \parallel NC$.

Оттука следува дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, $CH \perp MB$, па следува дека и $MN \perp MB$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

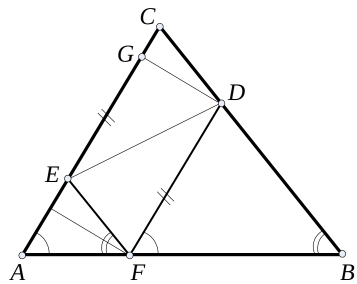
Втор начин. Како и во првиот начин на решавање докажуваме дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, тогаш четириаголникот $MQCN$ е трапез, па затоа $\measuredangle QMN + \measuredangle MQC = 180^\circ$, од каде што, бидејќи $\measuredangle MQC = 90^\circ$ следува $\measuredangle QMN = 90^\circ$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

3Б. Одреди го најмалиот природен број, на кој производот на цифрите е еднаков на 75600.

Решение. Го разложуваме бројот 75600 на прости множители и добиваме $75600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Бидејќи сите прости делители на 75600 се едноцифрени броеви, тоа значи дека постои број таков што производот на неговите цифри е еднаков на 75600.

Бараниот број ги содржи цифрите 5, 5 и 7, бидејќи со множење на кој било од броевите 2, 3, 5. 7 со 5 или 7 се добива број поголем од 9. Производот $2^4 3^3$ можеме да го запишеме со најмногу 7 цифри ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$), а со најмалку 3цифри ($6 \cdot 8 \cdot 9$). Бидеји се бара најмалиот природен број, заклучуваме дека тој се запишува со цифрите 6, 8, 9, 5, 5, 7, а тоа е бројот 556789.

4Б. На страната AB на триаголникот ABC е избрана произволна точка F, а точките D и E се на страните BC и AC, такви што $FD \parallel AC$ и $FE \parallel BC$. Изрази ја плоштината P на триаголникот CDE преку плоштините P_1 и P_2 на триаголниците AFE и BDF.



Решение. Од условот на задачата следува дека $FDCE$ е паралелограм, па важи $\overline{FD}=\overline{EC}$. Триаголниците AFE и FDB се слични, и заради $\overline{FD}=\overline{EC}$ добиваме

$$P_1:P_2=\overline{AE}^2:\overline{FD}^2=\overline{AE}^2:\overline{EC}^2. \qquad (1)$$

Понатаму, триаголниците AFE и EDC имаат еднакви висини ($\overline{FH}=\overline{DG}$), па имаме

$$P_1:P=\overline{AE}:\overline{EC}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $P_1:P_2=P_1^2:P^2$, т.е. $P=\sqrt{P_1P_2}$.

II година

1. Ако z и w се комплексни броеви такви што $\mathrm{Re}\,z>0$ и $\mathrm{Re}\,w>0$, тогаш $|\frac{z-w}{\bar{z}+w}|<1$. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Нека $z=x+iy$, $w=a+ib$. Тогаш

$$|\frac{z-w}{\bar{z}+w}|=\frac{|z-w|}{|\bar{z}+w|}=\frac{|(x-a)+(y-b)i|}{|(x+a)+(-y+b)i|}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}}.$$

Ако $x>0$ и $a>0$, тогаш $(x-a)^2<(x+a)^2$, а $(y-b)^2=(b-y)^2$, па затоа подкоренова величина на броителот е секогаш помала од онаа на именителот, т.е. дропката е помала од 1, со што тврдењето е докажано.

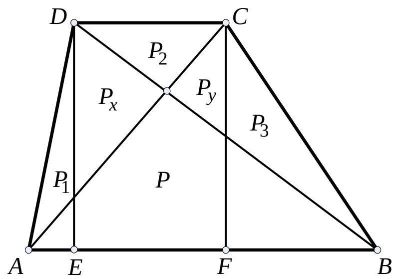
Втор начин. Од $\mathrm{Re}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,w>0$ и од својствата на комплексните броеви имаме

$$\begin{aligned}|z-w|^2-|\bar{z}-w|^2&=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})-(\bar{z}+w)(z+\bar{w})\\&=z\bar{z}-\bar{z}w-z\bar{w}+w\bar{w}-z\bar{z}-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}\\&=-[z(w+\bar{w})+\bar{z}(w+\bar{w})]\\&=-(w+\bar{w})(z+\bar{z})=-4\,\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Re}\,w<0,\end{aligned}$$

т.е. $|z-w|^2<|\bar{z}+w|^2$, од што следува $|\frac{z-w}{\bar{z}+w}|<1$.

2. Низ крајните точки на помалата основа на трапезот $ABCD$ се повлечени две паралелни прави, коишто заедно со дијагоналите го делат трапезот на седум триаголника и еден петаголник. Докажи дека плоштината на тој петаголник е еднаква на збирот на плоштините на трите триаголници, чија што една страна е или крак или помалата основа на трапезот.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со помала основа CD. Повлекуваме две паралелни прави низ C и D кои ја сечат поголемата основа (за да имаме 7 триаголници, види цртеж). Нека со P ја означиме плоштината на петаголникот, а со P_1, P_2, P_3 плоштините на триаголниците чија една страна е кракот AD, помалата основа CD и кракот BC, соодветно.



Најпрво да забележиме дека $P_{ACD} = P_{BCD}$. Од друга страна четириаголникот $EFCD$ е параллелограм чија плоштина е двапати поголема од плоштината на секој од триаголниците ACD, односно BCD. Според тоа

$$P + P_x + P_2 + P_y = P_1 + P_x + P_2 + P_y + P_2 + P_3,$$

т.е. $P = P_1 + P_2 + P_3$.

3А. Најди ги сите позитивни броеви a, за коишто и двата корена на равенката $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ се цели броеви.

Решение. Равенката ќе има реални решенија, ако $D \geq 0$, т.е.

$$0 \leq a^2 - 4a^2(1-7a^2) = a^2(28a^2 - 3),$$

од каде што добиваме $a^2 \geq \frac{3}{28}$, т.е. $\frac{1}{a} \leq \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Од Виетовите формули имаме $x_1 + x_2 = -\frac{1}{a}$. Бидејќи x_1 и x_2 се цели броеви, следува дека и $-\frac{1}{a}$ е цел број, а од $a > 0$ заклучуваме дека $\frac{1}{a}$ е природен број. Единствени природни броеви за кои важи $\frac{1}{a} \leq \sqrt{\frac{28}{3}}$ се броевите 1, 2 и 3. Значи, $a \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$. За овие вредности на a соодветните вредности на дискриминантите се $D_1 = 25$, $D_{\frac{1}{2}} = 1$, $D_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{81}$, а соодветните решенија на равенките се: -3 и 2; -3 и 1; -2 и -1.

4А. Ако x, y, z и $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ се рационални броеви, тогаш и $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ се исто така рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, тогаш $\sqrt{y} + \sqrt{z} = r - \sqrt{x}$. Последниот израз го квадрираме и го добиваме изразот

$$2\sqrt{zy} = (r^2 + x - z - y) - 2r\sqrt{x},$$

од кој со повторно квадрирање добиваме

$$4yz = (r^2 + x - y - z)^2 + 4r^2x - 4r(r^2 + x - z - y)\sqrt{x}.$$

Бидејќи x, y, z и r се рационални броеви, заклучуваме дека и $\sqrt{x}$ е рационален број. На сличен начин заклучуваме дека и $\sqrt{y}$, односно $\sqrt{z}$ е рационален број.

3Б. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{13}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3} \\ xyz=1 \end{cases}$$

Решение. Имаме: $y+z=\frac{13}{3}-x$, $x(y+z)=\frac{13}{3}-yz$, $zy=\frac{1}{x}$. Ако од првата и третата равенка замениме во втората ја добиваме равенката

$$x(\tfrac{13}{3}-x)=\tfrac{13}{3}-\tfrac{1}{x},$$

која е еквивалентна на равенката $13x^2-3x^3-13x+3=0$, т.е. на равенката

$$(x-1)(3x\ \ -10x+3)=0.$$

Решенија на последната равенка се $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$.

Бидејќи равенките во системот се симетрични заклучуваме дека решенија на системот се следните шест подредени тројки, т.е. пермутациите на броевите: 1, 3 и $\frac{1}{3}$.

4Б. Ако за реалните броеви a, b, c важи: $a>0$ и $b>a+c$, тогаш равенката $ax^2+bx+c=0$ има две реални решенија. Докажи!

Решение. Треба да докажеме дека од $a>0$ и $b>a+c$ следува $D>0$.

1) Ако $c<0$, тогаш поради $a>0$ имаме $D=b^2-4ac\geq -4ac>0$.

2) Ако $c\geq 0$, тогаш од неравенствата $a>0$ и $b>a+c$ ги добиваме неравенствата $a+c>0$ и $b>a+c>0$. Од последното неравенство следува дека

$$D=b^2-4ac>(a+c)^2-4ac=(a-c)^2>0.$$

III година

1. Реши ја равенката $x^2+3+\log_2(x^2-4x+6)=4x$.

Решение. Ја запишуваме равенката во видот

$$\log((x-2)^2+2)=1-(x-2)^2.$$

Бидејќи

$$\log((x-2)^2+2)\geq \log_2 2=1$$

следува

$$\log((x-2)^2+2)\geq 1\geq 1-(x-2)^2.$$

Равенство е исполнето за $x-2=0$, т.е. $x=2$ кое е и единствено решение на равенката.

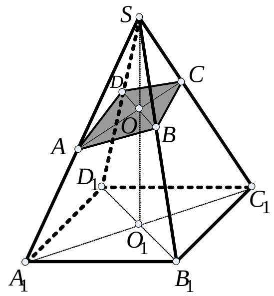
2. Рамнината Σ ги сече бочните рабови A_1S, B_1S, C_1S, D_1S на правилна четириаголна пирамида $A_1B_1C_1D_1S$ во точки чии растојанија до врвот на пирамидата се a, b, c, d соодветно. Докажи дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

Решение. Да го означиме со φ аголот што висината го зафаќа со бочните рабови на пирамидата и пресечните точки на рамнината со бочните рабови на пирамидата да ги означиме со A, B, C, D соодветно. Тогаш

$$\overline{SA}=a\,,\quad \overline{SB}=b\,,\quad \overline{SC}=c\,,\quad \overline{SD}=d\,.$$

Од триаголникот ACS имаме $P_{ASC}=P_{AOS}+P_{OSC}$, па затоа

$$\frac{1}{2}ac\cos 2\varphi=\frac{1}{2}a\cdot\overline{SO}\sin\varphi+\frac{1}{2}c\cdot\overline{SO}\sin\varphi\,.$$



Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\,. \qquad (1)$$

Аналогно, од триаголникот BDS добиваме:

$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\,. \qquad (2)$$

Од равенствата (1) и (2) следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

3А. Нека во триаголникот ABC аголот при врвот на темето C е 120° и нека биектрисите на аглите во темињата A, B, C ги сечат спротивните страни во точките D, E, F, соодветно. Докажи дека $\measuredangle DEF=90^\circ$.

Решение. Нека AD, BE, CF се бисектриси на аглите α, β, γ во триаголникот ABC (види цртеж). Очигледно CD е бисектриса на $\measuredangle KCF$, а AD на $\measuredangle CAB$. Затоа FD е бисектриса на $\measuredangle CFB$ (на надворешниот агол кај темето F на триаголникот AFC-бисектрисите се сечат во една точка која е центар на припишаната кружница). Значи,

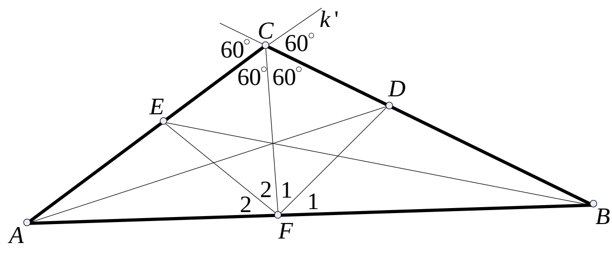
$$\measuredangle CFD=\measuredangle BFD=\measuredangle 1\,.$$

Слично, FE е бисектриса на $\measuredangle AFC$, па следува

$$\measuredangle AFE=\measuredangle EFC=\measuredangle 2\,.$$

Оттука следува дека

$$\measuredangle EFD=\measuredangle 1+\measuredangle 2=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ.$$



4А. Ако решенијата на равенката $x^3+ax^2+3x-1=0$ се позитивни реални броеви, тогаш тие се меѓусебно еднакви и притоа $a=-3$. Докажи!

Решение. Од Виетовите формули за равенката добиваме:

$$x_1+x_2+x_3=-a, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3, \quad x_1x_2x_3=1.$$

Ако второто равенство го поделиме со $x_1x_2x_3$ добиваме

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=3.$$

Од неравенството меѓу хармониска и геометриска средина за позитивните броеви x_1, x_2, x_3 добиваме

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}} \le \sqrt[3]{x_1x_2x_3}=1,$$

т.е.

$$3 \le \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}.$$

Но, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=3$, што значи дека меѓу овие две средини важи знак за равенство , а тоа е можно ако и само ако $x_1=x_2=x_3$.

3Б. Ако за реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ важи

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1,$$

тогаш $|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \le 1$. Докажи!

Решение. *Прв начин*. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}=\sqrt{1}\sqrt{1}=1$$

Втор начин. Користејќи ги неравенствата $|x+y| \le |x|+|y|$, $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| &\le |a_1b_1|+|a_2b_2|+...+|a_nb_n|\\ &\le \frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+...+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\\ &= \frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{2}+\frac{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

4Б. Докажи дека

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}.$$

Решение. Нека $x=\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$. Равенството го множиме со $8\cos\frac{\pi}{14}$ и добиваме

$$\begin{aligned}8x\cdot\cos\frac{\pi}{14} &= 8\cos\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=4\sin\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}\\ &= 2(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14})\sin\frac{3\pi}{14}=2\cos\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=\sin\frac{6\pi}{14}\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{6\pi}{14})=\cos\frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

Следствено, $8x=1$, т.е. $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=x=\frac{1}{8}$.

IV година

1. Најди го коефициентот пред x^2 во развојот $(1+x+x^2)^9$.

Решение. Да ставиме $x+x^2 = x(1+x) = y$. Тогаш дадениот израз го добива обликот $(1+y)^9$, а општиот член е: $T_{k+1} = \binom{9}{k} y^k$, $0 \le k \le 9$. Но, $y^k = x^k(1+x)^k$, па ако општиот член на биномот $(1+x)^k$ го означиме со L_{m+1} добиваме $L_{m+1} = \binom{k}{m} x^m$, $0 \le m \le k$. Сега, општиот член на развојот $(1+x+x^2)^9$ е:

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} x^k \binom{k}{m} x^m = \binom{9}{k}\binom{k}{m} x^{k+m},\ 0 \le k \le 9, 0 \le m \le k.$$

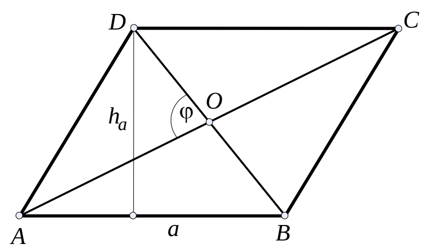
Бидејќи го бараме коефициентот пред x^2 следува дека $k+m=2$, па од $0 \le m \le k$ добиваме $0 \le 2-k \le k$, т.е. $k \ge 1$ и $k \ge 2$, што е можно за $k = 1,2$. Соодветните вредности за m ги добиваме од условот $k+m=2$, т.е. $m = 1,0$.

Според тоа, постојат два члена во развојот на изразот $(1+x+x^2)^9$ кои содржат x^2 и збирот на нивните коефициенти е:

$$\binom{9}{1}\binom{1}{1} + \binom{9}{2}\binom{2}{0} = 45.$$

2. Докажи дека помалата висина во паралелограмот $ABCD$ е еднаква на $\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$, каде што a и b се должините на страните, а φ е остриот агол меѓу дијагоналите на паралелограмот.

Решение. Од условот на задачата следува дека $a > b$, т.е. $h_a < h_b$. Значи, треба да докажеме дека $h_a = \frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$. Плоштината P на паралелограмот $ABCD$ е:



$$\begin{aligned} P &= 2P_{AOD} + 2P_{AOB} \\ &= 2\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{2}\sin\varphi + 2\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}\sin(\pi-\varphi) \\ &= 2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \end{aligned}$$

Од друга страна $P = ah_a$, па затоа $ah_a = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, т.е. $d_1d_2 = \frac{2ah_a}{\sin\varphi}$. Од косинусната теорема за триаголникот AOB добиваме

$$\begin{aligned} b^2 &= (\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 - 2\tfrac{d_1}{2}\tfrac{d_2}{2}\cos\varphi = \tfrac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\varphi) \\ &= \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - 2\tfrac{2ah_a}{\sin\varphi}\cos\varphi) \end{aligned}.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$h_a = \frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi,$$

кое и требаше да се докаже.

3А. Броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ се последователни членови на аритметичка прогресија, а и броевите $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n$ се исто така последователни членови на аритметичка прогресија. Одреди го n, ако $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$, а $\cos\alpha_n = -\frac{1}{2}$.

Решение. Нека d е разлката на првата прогресија. Тогаш:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha_{n-1} = d$$

и за секој $1 < k < n$ важи $\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}}{2} = \alpha_k$. Исто така за втората прогресија имаме

$$2\cos\alpha_k = \cos\alpha_{k-1} + \cos\alpha_{k+1} = 2\cos\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}}{2}\cos\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_{k+1}}{2} = 2\cos\alpha_k \cos d .$$

Оттука $\cos\alpha_k(1-\cos d) = 0$. Ако $1-\cos d = 0$, тогаш $d = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, па од условот $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)d$ следува $\cos\alpha_n = \cos\alpha_1$, што противречи на условите

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ и } \cos\alpha_n = -\frac{1}{2}.$$

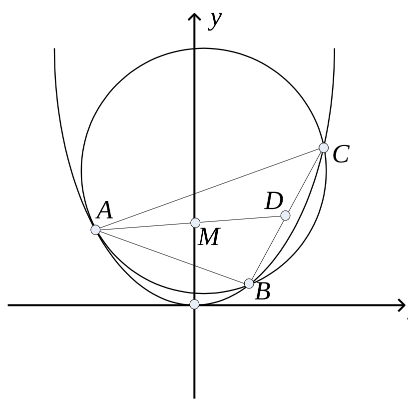
Значи, $\cos\alpha_k = 0$ за секој k, $1 < k < n$, па прогресијата е:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \cos\alpha_2 = 0,\ \cos\alpha_3 = 0,\ ...,\ \cos\alpha_{n-1} = 0,\ \cos\alpha_n = -\frac{1}{2}.$$

а при аритметичка прогресија тоа е можно само ако низата има три члена. Значи, $n = 3$ и во овој случај низите се $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{2\pi}{3}$.

4А. Дадена кружница допира дадена парабола во точката A и ја сече во точките B и C. Докажи дека средината на тежишната линија AD на триаголникот ABC припаѓа на оската на параболата.

Решение. Воведуваме координатен систем, таков што темето на параболата е во координатниот почеток, оската на параболата е $y-$оската и е нормална на $x-$ оската. Тогаш равенката на параболата е од видот $y = mx^2$, $m > 0$.



Нека a, b, c се апсциси на точките A, B, C, соодветно. Апсциса на точката D е $\frac{b+c}{2}$, а апсциса на средината на отсечката AD, на точката M е $\frac{2a+b+c}{4}$.

Равенката на кружницата е од видот $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$. Координатите на заедничките точки на параболата и кружницата го задоволуваат системот равенки

$$y = mx^2 \text{ и } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

од каде што следува

$$(x-\alpha)^2+(mx^2-\beta)^2=r^2,$$

т.е.

$$m^2x^4+(1-2m\beta)x^2+(-2\alpha)x+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0$$

Но, корените на ова равенка се апсцисите на точките A,B,C, т.е. $x=a, x=b, x=c$ при што $x=a$ е двоен корен. Од Виетовите формули следува $2a+b+c=0$, што значи дека апсцисата на точката M е 0, а тоа значи дека M лежи на $y-$ оската, т.е. на оската на параболата.

3Б. Нека $a_0,a_1,a_2,...,a_{2n},a_{2n+1}$ е растечка аритметичка прогресија со позитивни членови. Докажи дека

$$\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{n}{a_0a_{2n}}.$$

Решение. Бидејќи прогресијата е растечка, точни се неравенствата

$$\frac{1}{a_0a_1}<\frac{1}{a_1a_2}<\frac{1}{a_2a_3}<...<\frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}<\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}.$$

Да ја означиме со d разликата на прогресијата и нека

$$S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}.$$

Тогаш за удвоената сума $2S$, имајќи ги предвид горните неравенства имаме:

$$\begin{aligned}2S&=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\\&<\frac{1}{a_0a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\\&=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2n-2}}-\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n}})\\&=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{2n}})=\frac{1}{d}\frac{a_{2n}-a_0}{a_0a_{2n}}=\frac{2n}{a_0a_{2n}}\end{aligned}$$

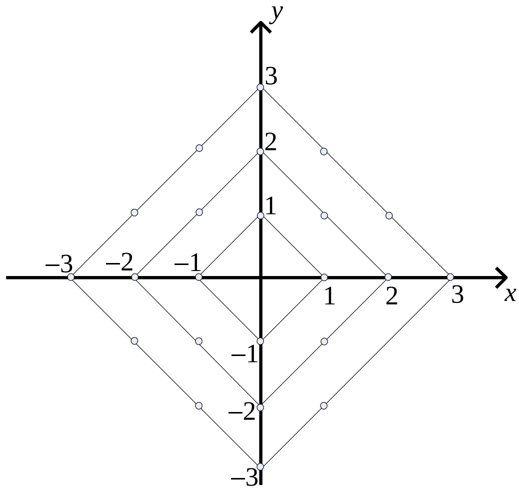
На сличен начин добиваме

$$\begin{aligned}2S&=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\\&>\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}\\&=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+1}})\\&=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2n+1}})=\frac{1}{d}\frac{a_{2n+1}-a_1}{a_1a_{2n+1}}=\frac{2n}{a_1a_{2n+1}}\end{aligned}$$

Конечно, $\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<S<\frac{n}{a_0a_{2n}}$

4Б. Нека n е природен број. Колку различни решенија $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ има неравенката $|x|+|y|\le n$.

Решение. Графикот на функцијата $|x|+|y|=n$ е квадрат со темиња $(n,0)$, $(-n,0)$, $(0,n)$ и $(0,-n)$ (види цртеж).



Да видиме колку целобројни решенија има ова равенка за конкретни вредности на n.

За $n=0$, таа има едно решение.

За $n=1$ таа има 4 целобројни решенија.

За $n=2$ таа има 8 целобројни решенија.

За $n=3$ таа има 12 целобројни решенија итн.

Очигледно, за $n=k$ равенката $|x|+|y|=k$ има $4k$ целобројни решенија.

Од досега изнесеното е јасно дека бројот на целобројни решенија на неравенката $|x|+|y|\leq n$ е еднаков на збирот на целобројните решенија на равенките

$$|x|+|y|=k\,,\ k=0,1,2,...,n$$

и истиот изнесува

$$14+8+12+...+4n=1+4(1+2+...+N)=1+2n(n+1)\,.$$