JMMO 2010

1. Нека секој од броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ е еднаков на 1 или -1 и уште важи:

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0$$

Докажи дека n е делив со 4.

Решение. Нека

$$y_k = x_kx_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}, \text{ за } k = 1,2,...,n-3,$$

$$y_{n-2} = x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1,\ y_{n-1} = x_{n-1}x_nx_1x_2,\ y_n = x_nx_1x_2x_3.$$

Сите y_k се 1 или -1. Тогаш од условот на задачата добиваме

$$y_1 + ... + y_n = 0.$$

Затоа мора да е $n = 2k$ и уште повеќе мора точно k од броевите $y_1,..., y_n$ да се еднакви на 1 и останатите k да се еднакви на -1. Но тогаш

$$y_1...y_n = (-1)^k.$$

Од друга страна важи

$$y_1y_2...y_n = x_1^4x_2^4...x_n^4,$$

од каде добиваме $y_1y_1...y_n = 1$, па затоа $k = 2t$, односно имаме $n = 4t$.

2. Даден е трапез $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$. Нека M е средина на страната CD. Определи ги аглите на трапезот ако $\measuredangle MBC = \measuredangle CAB$.

Решение. Од условот следува дека дадениот трапез е рамнокрак. Нека K е средина на AD, и нека $\measuredangle CAB = \measuredangle MBC = \varphi$. Тогаш

$$\measuredangle MKA = 180^\circ - \measuredangle KAC = 180^\circ - \measuredangle MBA.$$

Значи четириаголникот $ABMK$ е тетивен.

Понатаму од услов следува дека триаголникот $\triangle ABD$ е рамнокрак, од каде следува дека $\measuredangle AKB = 90^\circ$. Сега заради тетивноста на $ABMK$ следува дека $\measuredangle AMB = \measuredangle AKB = 90^\circ$, т.е. триаголникот $\triangle AMB$ е рамнокрак правоаголен. Нека M_1 е подножјето на висината повлечена од M. Тогаш

$$\overline{MM_1} = \overline{AM_1} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2},$$

па добиваме дека $\varphi = 30^\circ$. Сега лесно

$$\measuredangle ABC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \text{ и } \measuredangle ADC = 105^\circ.$$

3. Дадено е купче со 2010 жетони. Еден жетон вадиме од купчето, а остатокот го делиме произволно на две купчиња. Понатаму, избираме произволно купче од добиените две купчиња, вадиме еден жетон, а остатокот произволно го делиме на две купчиња итн. Дали е можно по конечен број на повторување на оваа постапка да добиеме неколку купчиња така што во секое од нив да има по три жетони?
Решение. Нека на почетокот во првото купче имаме 2010 жетони.
По секој чекор да го разгледаме збирот S, на бројот на купчиња и бројот на жетони кои што се наоѓаат во нив. Имаме
$$S_0 = 1 + 2010 = 2011,$$
$$S_1 = 2 + (2010 - 1) = 2011,$$
$$S_2 = 3 + (2009 - 1) = 2011 \text{ итн.}$$
т.е. S е инваријанта (не се менува), при било кој чекор.
Нека претпоставиме дека бараната состојба е можна, т.е. нека по конечен број чекори сме добиле n купчиња секое со по 3 жетони. Тогаш од претходното имаме $S = n + 3n = 4n$, односно $2011 = 4n$, што не е можно. Според тоа, бараната состојба не може да се достигне.

4. Даден е бројот $2009^{2009^{2009}}$, запишан во декаден броен систем. Во еден чекор ја вршиме следнава операција: ги бришеме првата и последната цифра и нивниот збир го додаваме на бројот што останал по бришењето на првата и последната цифра.
а) Ако по конечен број на чекори останал двоцифрен број, дали тој двоцифрен број може да биде точен квадрат.
б) Ако по конечен број на чекори останал едноцифрен број, да се определи едноцифрениот број.
Решение. Ќе ги користиме следниве познати резултати:
***Својство* 1.** Секој природен број при делење со 3 и 9 дава ист остаток како и збирот на неговите цифри. ■
***Својство* 2.** Квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. ■
Ќе го докажеме следново својство.
***Својство* 3.** При било кој чекор не се менува остатокот при делење со 9.
Доказ. Нека по некој чекор е добиен бројот $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$. Според *Својството* 1 имаме
$$A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

После бришењето на првата и последната цифра го добиваме бројот $\overline{a_{n-1}...a_1}$. Значи после еден чекор добиен е бројот $B=\overline{a_{n-1}...a_1}+a_n+a_0$. Сега имаме

$$B=\overline{a_{n-1}...a_1}+a_n+a_0 \equiv a_{n-1}+...+a_1+a_n+a_0 \pmod 9,$$

т.е. $A \equiv B \pmod 9$. ■

а) Ако по конечен број на чекори е добиен двоцифрен број A тогаш според *Својството* 2 бројот A ќе дава ист остаток при делење со 3 како и бројот $2009^{2009^{2009}}$. Имаме $2009 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$ па следува

$$2009^{2009^{2009}} \equiv (-1)^{2009^{2009}} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Според *Својството* 3 и претходното добиваме дека $A \equiv 2 \pmod 3$, па според *Својството 2* не може да биде точен квадрат.

б) Ако по конечен број на чекори е добиен едноцифрениот број a тогаш според *Својството* 3 добиваме

$$a \equiv 2009^{2009^{2009}} \pmod 9.$$

Имаме $2009 \equiv 2 \pmod 9$ па следува

$$2009^{2009^{2009}} \equiv 2^{2009^{2009}} \pmod 9$$

и јасно $2^3 \equiv -1 \pmod 9$. Понатаму

$$2009^{2009} \equiv 2^{2009} \equiv -1^{2009} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$$

т.е.

$$2009^{2009} = 3k+2,$$

каде k е непарен природен број. Сега имаме

$$2009^{2009^{2009}} \equiv 2^{3k+2} = (2^3)^k \cdot 4 \equiv (-1)\cdot 4 \equiv 5 \pmod 9$$

од каде е јасно дека $a=5$.

5. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}$ се такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$a^4+b^4+c^4 \ge a+b+c.$$

Решение. Од неравенство

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$$

добиваме дека за секои $x,y,z \in \mathbb{R}$ важи

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx.$$

Со примена на ова неравенство имаме

$$\begin{aligned}
a^4+b^4+c^4 &\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\
&= (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \\
&\geq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab) \\
&= abc(a+b+c) \\
&= a+b+c,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.