БМО 1999

1. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA.

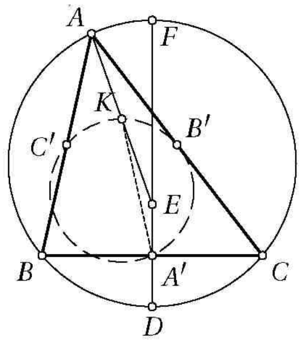
   а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K.

   б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF.

   Решение. а) Нека со A', B', C' соодветно ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Отсечките KB' и KC' се средни линии на триаголниците AEC и AEB, па затоа

$$\measuredangle C'KB' = \measuredangle BEC = \measuredangle CDB = 180^\circ - \measuredangle BAC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle B'A'C',$$

   што значи дека точката K лежи на кружницата $A'B'C'$.



   б) Отсечката KA' е средна линија во триаголникот EAD, па затоа $KA' \| AD$. Понатаму, DF е дијаметар на кружницата ABC па затоа атоа $AD \perp AF$. Конечно, од $KA' \| AD$ и $AD \perp AF$ следува $KA' \perp AF$.

2. Нека $p > 2$ е прост број таков што $3 \mid p-2$. Докажи, дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y \le p-1\}$$

   се деливи со p.

   Решение. Од $p \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$ следува дека броевите $0^3, 1^3, \dots, (p-1)^3$ даваат различни остатоци при делење со p. Навистина, ако $a^3 \equiv b^3 (\operatorname{mod} p)$, тогаш со степенување на $\frac{p-2}{3}$ добиваме $a^{p-2} \equiv b^{p-2} (\operatorname{mod} p)$. Но, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} (\operatorname{mod} p)$, па затоа $a \equiv b (\operatorname{mod} p)$. Според тоа, за секој $y \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ постои точно еден елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ делив со p. Меѓутоа,

$$s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1 = s_3,$$

   па затоа меѓу елементите $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ има најмногу $p-1$ различни.

3. Нека M, N, P се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето G на остроаголниот $\triangle ABC$ соодветно на страните AB, BC, CA. Докажи дека важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Ќе ги користиме стандардните ознаки a,b,c за страните на триаголникот соодветно наспроти темињата A,B,C, α,β,γ за соодветните агли и h_a, h_b, h_c за висините. Од

$$\overline{GM} = \tfrac{1}{3}h_c = \tfrac{1}{3}a\cos\beta, \overline{GN} = \tfrac{1}{3}h_a = \tfrac{1}{3}c\cos\beta \text{ и } \measuredangle MGN = 180^\circ - \beta$$

следува

$$P_{GMN} = \tfrac{1}{18}h_c h_a \sin\beta = \tfrac{1}{18}ac\sin^3\beta = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\beta.$$

Слично,

$$P_{GNP} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\gamma \text{ и } P_{GPM} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\alpha.$$

Според тоа, имаме

$$P_{MNP} = P_{GMN} + P_{GNP} + P_{GPM} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma). \qquad (2)$$

Но,

$$K = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + 1 - \tfrac{\cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha\cos(\beta - \gamma),$$

па како $\cos\alpha < \cos(\beta-\gamma) \le 1$ следува

$$2 = 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha < K \le 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha = 2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha \le \tfrac{9}{4}. \qquad (3)$$

Конечно, неравенствата (1) следуваат од равенството (2) и неравенствата (3).

Втор начин. Нека O и R се центарот и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и D е произволна точка во триаголникот ABC. Ако D_a, D_b, D_c се подножјата на нормалите повлечени од точката D на страните на триаголникот ABC, тогаш точна е Ојлеровата формула

$$P_{D_aD_bD_c} = \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{\overline{OD}^2}{R^2}\right)P_{ABC}.$$

Десното неравенство сега е очигледно и тоа за произволен триаголник, при што знак за равенство важи ако и само ако $G \equiv O$, т.е. триаголникот ABC е рамностран.

Левото неравенство може да биде подобрено. Поточно ќе докажеме дека $\frac{2}{9} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}}$ ако и само триаголникот ABC е остроаголен. Навистина, од формулата на Ојлер следува дека последното неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\overline{OD}^2}{R^2}\right) > \frac{2}{9}$, т.е. со неравенството $R > 3\overline{OG}$. Бидејќи $3\overline{OG} = \overline{OH}$, добиваме дека $R > \overline{OH}$, каде H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Тоа значи дека H е внатрешна точка за опишаната кружница околу триаголникот

ABC , што значи дека триаголникот е остроаголен.

4. Дадена е низата $0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots$ цели броеви таква што за секој $k \ge 0$ бројот на членовите кои не се поголеми од k е конечен (тој број да го означиме со y_k). Докажи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1) .$$

Решение. *Прв начин*. Да ги обележиме сите точки (i, j) , $i, j \ge 0$ на целобројната решетка во рамнината за кои важи $j < x_i$. За дадено i , бројот на обележените точки (i, j) е еднаков на x_i , па така во множеството

$$S = \{(i, j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$$

има најмногу $\sum_{i=0}^{n} x_i$ обележени точки. Од друга страна, за дадено j , необележени точки (i, j) за кои $i \ge 0$ има точно y_j , па така во множеството S има $\sum_{j=0}^{m} y_j$ необележени точки. Но, сите точки од множеството S се обележени или не се обележени, па затоа $\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j$ не е помал од бројот на точките на множеството S , т.е. од $(n+1)(m+1)$.

Втор начин. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Од условот на задачата следува дека за $m+n=0$ имаме $x_0 \ge 1$ или $y_0 \ge 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $m+n$. Ќе докажеме дека тоа важи за $m+n+1$. Ако $x_0 \ge m+1$, тогаш

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + x_0 \ge n(m+1) + m + 1 = (n+1)(m+1) .$$

Ако $x_0 \le m$, од условот следува дека $y_m \ge n+1$ и тогаш

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + y_m \ge (n+1)m + n + 1 = (n+1)(m+1) .$$