Vladimir Mićić (Beograd)

JEDNO POKRIVANJE TROUGLOVA I ČETVOROUGLOVA KRUGOVIMA

Često se u svakodnevnom životu nalazimo u situaciji da nešto nečim pokrijemo (kaže se i: prekrijemo); podsetimo se samo problema da se rupe na laktovima džempera ili kolenima pantalona pokriju popularnim »zakrpama«, da se mrlje od mastila ili masne mrlje na koricama svezaka i knjiga prekriju raznim nalepnicama. Pojam pokrivanja našao je svoje mesto i u matematici; tu je on strogo definisan a pokrivaju se razni skupovi, figure pomoću nekih drugih skupova ili figura.

U ovom članku posmatraćemo skupove tačaka u ravni; u daljem tekstu kad kažemo skup uvek podrazumevamo da se radi o skupu tačaka u ravni. Pretpostavljamo da su nam poznate osnovne geometrijske figure u ravni: krug, trougao, četvorougao. Da bi se izbegli mogući nesporazumi, pošto ćemo se koristiti pomenutim figurama i njihovim granicama, upotrebljavaćemo reči kružna linija, trougaona linija i četvorougaona linija za imena granica kruga, trougla i četvorougla; prema tome je krug skup tačaka u ravni koje se nalaze unutar kružne linije ili na kružnoj liniji, a slično važi i za trougao i četvorougao. Ako se od neke figure odstrani (oduzme) njena granica, dobijamo odgovarajuću *otvorenu figuru*; da bismo na slici označili da se radi o otvorenoj figuri, granicu takve figure ćemo crtati isprekidanom linijom, kako je to pokazano na slici 1.

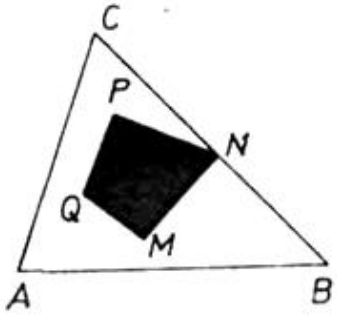
Sl. 1a

Sl. 1b

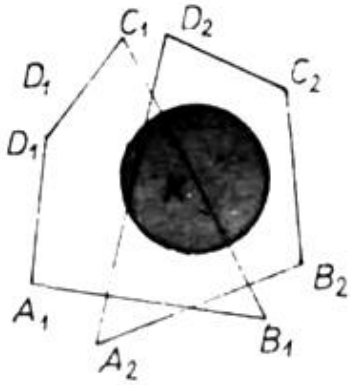
Ako neka tačka pripada jednoj figuri a ne pripada njenoj granici, onda je to *unutrašnja* tačka posmatrane figure.

D e f i n i c i j a. Neka je S ograničen skup. Skupovi $P_1, P_2, \ldots P_n$ p o k r i v a j u skup S ako i samo ako je skup S sadržan u njihovoj uniji, dakle, $S \subset P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P$.

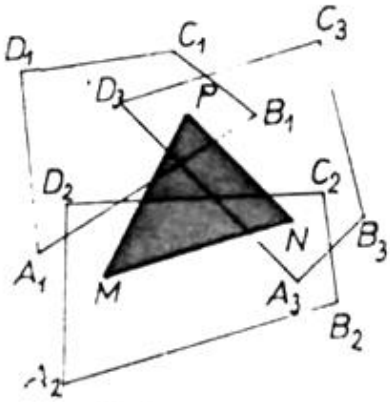
Saglasno ovoj definiciji trougao ABC pokriva četvorougao $MNPQ$, četvorouglovi $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ pokrivaju krug K dok četvorouglovi $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ i $A_3B_3C_3D_3$ ne pokrivaju trougao MNP, na slikama 2*a*, 2*b*, 2*c*.



Sl. 2a



Sl. 2b



Sl. 2c

1. U školi smo naučili da je periferijski ugao nad prečnikom prav. Ta je činjenica sadržana u tvrđenju sledeće, znatno opštije teoreme, koju ćemo sada dokazati.

T e o r e m a. Neka je duž AB prečnik kruga K, kružna linija k granica kruga K i neka tačka C ne pripada pravoj AB .Tada važi:

1° tačka C pripada kružnoj liniji k ako i samo ako je ugao $\sphericalangle ACB$ prav;

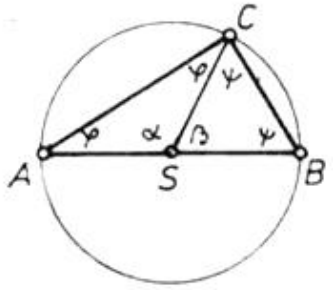
2° tačka C je unutrašnja tačka kruga K ako i samo ako je ugao $\sphericalangle ACB$ tup;

3° tačka C se nalazi izvan kruga K ako i samo ako je ugao $\sphericalangle ACB$ oštar.

Dokaz. 1° Dokažimo prvo: ako tačka C pripada kružnoj liniji k, onda je ugao $\sphericalangle ACB$ prav; to je, u stvari, pomenuto tvrđenje o periferijskom uglu. Obeležimo sa S centar kruga K. Imamo da je trougao ASC jednakokrak jer su duži AS i CS podudarne; odatle sledi da je, uz oznake upotrebljene na slici 3, pri čemu su veličine uglova merene stepenima,

$$\alpha+2\varphi=180°, \qquad \varphi=90°-\frac{1}{2}\alpha.$$

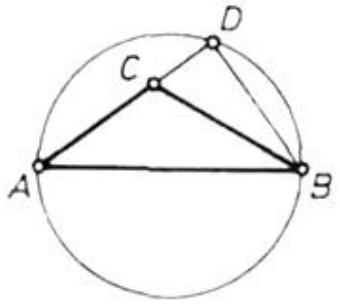
Na isti način je $\psi=90°-\frac{1}{2}\beta$ pa, pošto je $\alpha+\beta=180°$, to konačno dobijamo da je $\varphi+\psi=90°$, čime je naše tvrđenje dokazano.



Sl. 3

Dokažimo sada: ako je ugao $\sphericalangle ACB$ prav, onda tačka C pripada kružnoj liniji k. Pretpostavimo suprotno da tačka C ne pripada kružnoj liniji k. Onda postoje dve mogućnosti: a) tačka C je unutrašnja tačka kruga K; b) tačka C se nalazi izvan kruga K.

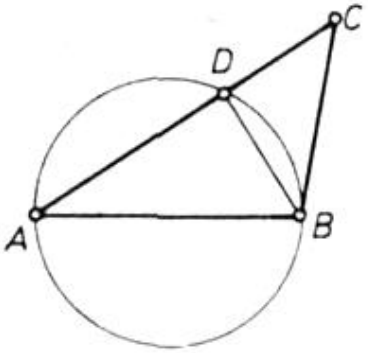
Dokažimo da nijedna od ovih mogućnosti ne može biti ispunjena.



Sl. 4

a) Ako je C unutrašnja tačka kruga K, onda prava AC seče kružnu liniju k u nekoj tački D (sl. 4); prema već dokazanom pod 1° ugao $\sphericalangle ADB$ je prav pa je u pravouglom trouglu BDC ugao $\sphericalangle BCD$ manji od pravog ugla, odakle sledi da je njemu suplementni ugao $\sphericalangle ACB$ veći od pravog ugla, što je suprotno pretpostavci da je ugao $\sphericalangle ACB$ prav. Dakle, tačka C ne može ležati unutar kružne linije k, odnosno, nije unutrašnja tačka kruga K.

b) Ako je tačka C izvan kruga K, onda prava AC ili prava BC seče kružnu liniju k u nekoj tački D koja se nalazi s iste strane prave AB s koje se nalazi i tačka C (sl. 5). Neka, određenosti radi, prava AC seče kružnu liniju k u tački D. Onda je, prema dokazanom pod 1°, ugao $\sphericalangle ADB$ prav, pa je u pravouglom trouglu BDC ugao $\sphericalangle DCB$ oštar; taj je ugao jednak uglu $\sphericalangle ACB$, koji je po pretpostavci prav, pa nije mogućno da bude oštar. Dakle, tačka C se ne može nalaziti izvan kruga K ako je ugao $\sphericalangle ACB$ prav.



Sl. 5

Na taj način smo dokazali: ako je ugao $\sphericalangle ACB$ prav, onda tačka C pripada kružnoj liniji k.

2° Dokažimo prvo: ako je tačka C unutrašnja tačka kruga K, onda je ugao $\sphericalangle ACB$ tup. U tom cilju možemo se poslužiti slikom 4 i zaključak je, u stvari, već izveden prilikom dokaza tvrđenja 1°, slučaj a).

Dokažimo sada: ako je ugao $\sphericalangle ACB$ tup, onda je C unutrašnja tačka kruga K. Pretpostavimo da tačka C nije unutrašnja tačka kruga K. Onda tačka C pripada kružnoj liniji k ili se nalazi izvan kruga K. Ako C pripada liniji k, onda je, prema dokazanom, ugao $\sphericalangle ACB$ prav, što je suprotno pretpostavci da je taj ugao tup. Ako se tačka

C nalazi izvan kruga K, onda se možemo poslužiti slikom 5, i na isti način kao je to učinjeno u slučaju 1° b), zaključiti da je ugao $\sphericalangle ACB$ oštar, što je isto tako suprotno pretpostavci da je taj ugao tup.

Na taj način smo dokazali: ako je ugao $\sphericalangle ACB$ tup, onda je C unutrašnja tačka kruga K.

Time je tvrđenje 2° dokazano.

3° Čitaocu neće predstavljati teškoću da sam dokaže treći deo naše teoreme.

P o s l e d i c a. Neka je duž AB prečnik kruga K i neka tačka C ne pripada pravoj AB. Krug K pokriva trougao ABC ako i samo ako je ugao $\sphericalangle ACB$ ili tup ili prav.

2. Dodelimo proizvoljnom trouglu ABC krugove K_1, K_2, K_3 čiji su prečnici, tim redom, stranice BC, CA, AB trougla.

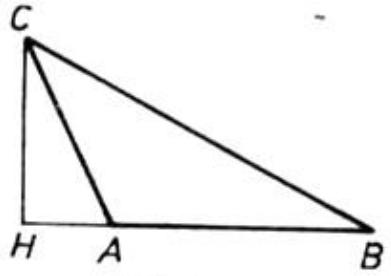
P r i m e r 1. Dokazati da bilo koja dva od krugova K_1, K_2, K_3 pokrivaju trougao ABC.

Rešenje. Pošto su sve tri stranice trougla ravnopravne a samim tim su ravnopravna i sva tri kruga, to možemo, ne narušavajući opštost rasuđivanja, dokazati da krugovi K_1 i K_2 pokrivaju trougao ABC.

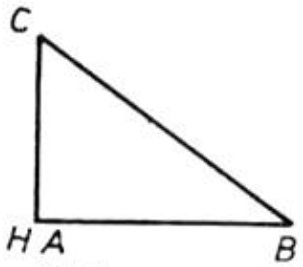
Neka prava h prolazi kroz tačku C i normalna je na pravu AB. Označimo sa H presečnu tačku prave AB i prave h. Postoje pet mogućnosti:

a) Tačka A se nalazi između tačaka H i B (sl. 6); onda je ugao $\sphericalangle BAC$ tup pa krug K_1, čiji je prečnik stranica BC, pokriva trougao ABC, a samim tim pokrivaju ga krugovi K_1 i K_2.

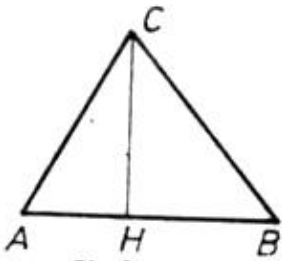
b) Tačka H se poklapa s tačkom A (sl. 7); onda je ugao $\sphericalangle BAC$ prav, pa opet krug K_1, a zbog toga i krugovi K_1 i K_2, pokriva trougao ABC.



Sl. 6



Sl. 7

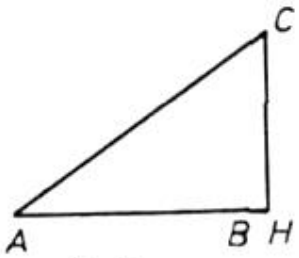


Sl. 8

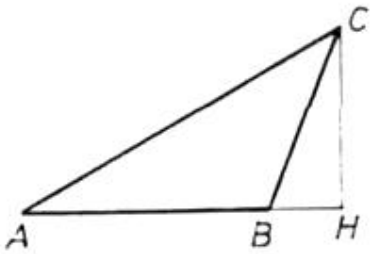
c) Tačka H se nalazi između tačaka A i B (sl. 8); krug K_1 pokriva trougao BCH a krug K_2 pokriva trougao ACH pa opet krugovi K_1 i K_2 pokrivaju trougao ABC.

d) Tačka H se poklapa s tačkom B (sl. 9); onda je ugao $\sphericalangle ABC$ prav, pa krug K_2, čiji je prečnik stranica CA, pokriva trougao ABC, a samim tim pokrivaju ga krugovi K_1 i K_2.

e) Tačka B se nalazi između tačaka A i H (sl. 10); onda je ugao $\sphericalangle ABC$ tup pa krug K_2 pokriva trougao ABC, a samim tim pokrivaju ga krugovi K_1 i K_2.



Sl. 9

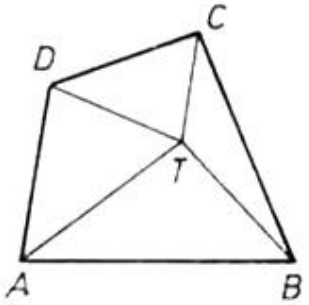


Sl. 10

Vidimo da krugovi K_1 i K_2 u svakom slučaju pokrivaju trougao ABC, čime je naše tvrđenje dokazano.

P r i m e r 2. Dodelimo proizvoljnom konveksnom četvorouglu $ABCD$ krugove K_1, K_2, K_3, K_4 čiji su prečnici, tim redom, stranice AB, BC, CD, DA četvorougla. Dokazati da krugovi K_1, K_2, K_3, K_4 pokrivaju četvorugao $ABCD$ (sl. 11).

Rešenje: Pretpostavimo da posmatrana četiri kruga ne pokrivaju četvorougao; onda postoji bar jedna tačka četvorougla koja se nalazi izvan sva ta četiri kruga. Neka je to tačka T. Pošto je T izvan kruga K_1, to je ugao $\sphericalangle ATB$ oštar. Isto tako, pošto je tačka T izvan kruga K_2, i ugao $\sphericalangle BTC$ je oštar. Na isti način su i uglovi $\sphericalangle CTD$ i $\sphericalangle DTA$ oštri. Zbir uočena četiri ugla je zbir četiri oštra ugla, pa je manji od punog ugla. S druge strane je očigledno da zbir ta četiri ugla predstavlja pun ugao, što je suprotno dokazanoj činjenici da je on manji od



Sl 11.

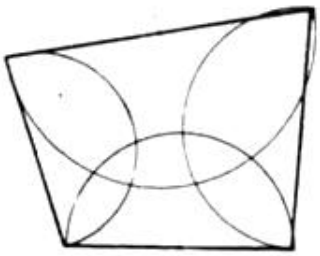
punog ugla. Dakle, ne može postojati tačka četvorougla koja nije pokrivena bar jednim od posmatranih krugova, čime je naše tvrđenje dokazano.

Lako je videti da smo drugi primer mogli rešavati koristeći se rezultatom prvog primera. Dijagonala deli konveksan četvorougao na dva trougla; svaki od tih trouglova pokriven je sa dva kruga čiji su prečnici odgovarajuće dve stranice četvorougla, pa je četvorougao pokriven sa posmatrana četiri kruga.

Na taj način upoznali smo se s jednim od mnogobrojnih problema pokrivanja figura u ravni figurama određenog tipa. Zadaci koji slede treba da pomognu daljem usvajanju pokazanog metoda rešavanja tih problema; želja je autora da oni podstaknu čitaoca i na postavljanje novih problema posmatranog tipa i njihovo rešavanje.

Zadaci

1. Proizvoljnom otvorenom konveksnom četvorouglu *ABCD* (sl. 12) dodeljeni su otvoreni krugovi kao u Primeru 2. Mora li tim krugovima posmatrani četvorougao biti pokriven?

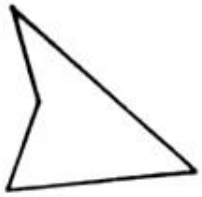


Sl. 12

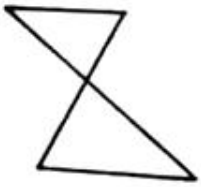
2. Konveksnom četvorouglu dodeljeni su krugovi kao u Primeru 2. Dokazati da u tom četvorouglu ne postoji tačka koja je unutrašnja tačka za sva četiri posmatrana kruga.

3. Za pokrivanje proizvoljnog trougla ne moraju se koristiti sva tri kruga čiji su prečnici stranice tog trougla. Lako je videti da postoje i konveksni četvorouglovi za čije se pokrivanje ne moraju koristiti sva četiri kruga čiji su prečnici stranice četvorougla (nacrtati nekoliko takvih četvorouglova). Dokazati da se ne može proizvoljan konveksan četvorougao pokriti sa manje od četiri kruga čiji su prečnici stranice tog četvorougla.

4. Razmislite o problemu pokrivanja nekonveksnih četvorouglova (sl. 13 i sl. 14) krugovima čiji su prečnici stranice tih četvorouglova; posebno razmotriti problem pokrivanja prostih nekonveksnih četvorouglova a posebno problem pokrivanja četvorouglova čija granica, odgovarajuća četvorougaona linija, ima tačku samopresecanja.



Sl. 13



Sl. 14

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија