Primjena AG-nejednakosti u stereometriji

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Razmatraju se primjene AG-nejednakosti u stereometriji, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *AG-nejednakost, stereometrija*

Applications of AG inequality in stereometry

Abstract. *Applications of AG-inequality in stereometry are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *AG-inequality, stereometry*

Ovo je treći u nizu članaka posvećenih različitim primjenama AG-nejednakosti: u [3] su obrađene primjene u planimetriji, u [4] u trigonometriji, a u ovom članku u stereometriji.

Zadatak 1. *Bazen ima oblik kvadra kome je dno kvadrat. Ako je volumen bazena 32 m^3, kolike moraju biti dimenzije bazena tako da površina strana bazena bude minimalna?*
Rješenje. Neka je a duljina brida dna, b visina bazena, P površina strana i V volumen. Tada je $V = a^2b$ i $P = a^2 + 4ab$, pa je

$$b = \frac{V}{a^2} = \frac{32}{a^2},$$

$$P = a^2 + 4a \cdot \frac{32}{a^2} = a^2 + \frac{128}{a}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{128}{a} &= a^2 + \frac{64}{a} + \frac{64}{a} \\ \geq \quad & 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{64}{a} \cdot \frac{64}{a}} = 3 \cdot 16 = 48. \end{aligned}$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Jednakost tj. minimum vrijedi ako i samo ako je $a^2 = \frac{64}{a}$, odakle slijedi $a = 4$ m. Tada je $b = \frac{32}{16} = 2$ m.

Zadatak 2. *Valja načiniti sanduk bez poklopca u obliku kvadra volumena* 36 *dm*^{3}, *tako da se duljine stranica baze odnose kao* $1:2$. *Kolike moraju biti dimenzije sanduka ako se traži da se za njegovu izradu utroši što manje materijala?*

Rješenje. Neka su a i b duljine bridova baze, c visina sanduka, O oplošje i V volumen. Iz $b : a = 1 : 2$ slijedi $a = 2b$. Kako je $V = abc$, to je

$$c = \frac{V}{ab} = \frac{36}{2b \cdot b} = \frac{18}{b^2},$$

a kako je $O = ab + 2ac + 2bc$, to je

$$\begin{aligned} O &= 2b \cdot b + 2 \cdot 2b \cdot \frac{18}{b^2} + 2b \cdot \frac{18}{b^2} \\ &= 2b^2 + \frac{72}{b} + \frac{36}{b} = 2b^2 + \frac{54}{b} + \frac{54}{b}. \end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je $2b^2 + \frac{54}{b} + \frac{54}{b} \geq 3\sqrt[3]{2b^2 \cdot \frac{54}{b} \cdot \frac{54}{b}} = 54$.

Minimum se postiže kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $2b^2 = \frac{54}{b}$ tj. $b^3 = 27$. Odatle je $b = 3$ dm, pa je $a = 6$ dm.

Zadatak 3. *Opeka ima oblik kvadra volumena* $V = x$ *cm*^{3} *i oplošja* $O = y$ *cm*^{3}. *Odredite minimalni volumen ako je* $x = 10y$.

Rješenje. Neka su a, b i c dimenzije opeke. Tada je

$$x = abc, \qquad y = 2(ab + ac + bc).$$

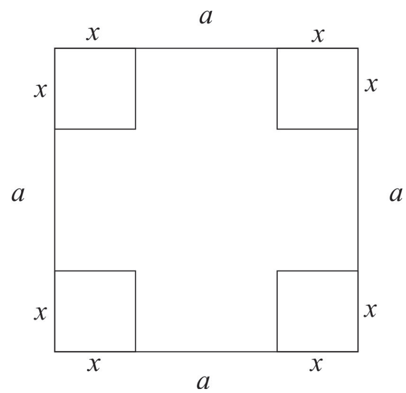
Prema AG-nejednakosti je

$$x^{\frac{2}{3}} = (a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} = (ab \cdot ac \cdot bc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{ab + ac + bc}{3} = \frac{y}{6}.$$

Kako je $x = 10y$, to je $x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{x}{60}$ tj. $x \geq 60^3 = 216000$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $ab = ac = bc$ tj. ako i samo ako je $a = b = c = 60$. Dakle, minimalni volumen uz uvjet $x = 10y$ je 216000 cm^3.

Zadatak 4. *Od kvadratnog kartona stranice duljine a odreže se pri svakom vrhu kvadrat stranice duljine* x. *Preostali dio presavije se tako da se dobije kutija (bez poklopca) oblika pravilne četverostrane prizme. Koliki treba biti* x *da bi volumen nastale kutije bio što veći?*

Rješenje.



Slika 1.

Promotrimo sliku 1. Volumen nastale kutije je jednak

$$V = (a-2x)^2 x = (a-2x)(a-2x)x.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$(a-2x)(a-2x)x \leq \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+x}{3}\right)^3 = \left(\frac{2a-3x}{3}\right)^3.$$

Maksimum se postiže kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $a-2x = x$, odakle je $x = \frac{a}{3}$.

Zadatak 5. *Dokažite da je kocka kvadar s maksimalnim volumenom pri danom oplošju, a s minimalnim oplošjem pri danom volumenu.*
Rješenje. Neka su a, b, c duljine bridova kvadra, O oplošje i V volumen. Vrijedi

$$O = 2(ab+ac+bc), \qquad V = abc.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2b^2c^2 = (ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{2(ab+bc+ca)}{6}\right)^3 = \left(\frac{O}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

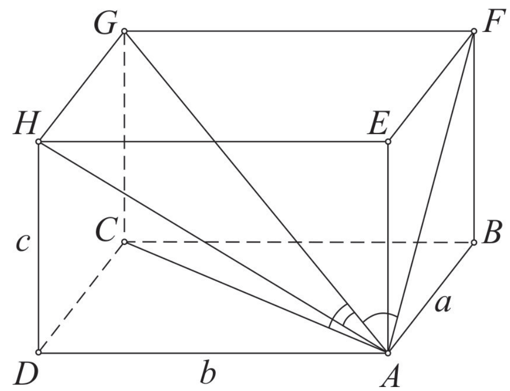
Ako je dano oplošje O, tada je maksimalan volumen jednak $\left(\frac{O}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$ i postiže se ako i samo ako je $ab = bc = ca$ tj. $a = b = c$, odnosno ako je kvadar kocka.

Ako je dan volumen V, tada je minimalno oplošje jednako $6V^{\frac{2}{3}}$ i postiže se za $a = b = c$ tj. ako je dani kvadar kocka.

Zadatak 6. *Neka su α, β, γ kutovi koje prostorna dijagonala zatvara s dijagonalama strana pravokutnog paralelepipeda $ABCDEFGH$. Dokažite da vrijedi*

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Rješenje.



Slika 2.

Promotrimo sliku 2. Neka je $\sphericalangle CAG = \alpha$, $\sphericalangle HAG = \beta$, $\sphericalangle FAG = \gamma$. Iz trokuta CAG, HAG i GAF dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{c}{D}, \quad \sin\beta = \frac{a}{D}, \quad \sin\gamma = \frac{b}{D},$$

gdje je D duljina prostorne dijagonale. Vrijedi:

$$\sin^2\alpha = \frac{c^2}{D^2}, \quad \sin^2\beta = \frac{a^2}{D^2}, \quad \sin^2\gamma = \frac{b^2}{D^2}.$$

Obzirom da su $\sin^2\alpha$, $\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$ pozitivni brojevi, smijemo rabiti AG-nejednakost, pa imamo

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma}.$$

Kako je

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{D^2} = \frac{D^2}{D^2} = 1,$$

to je

$$\frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma},$$

tj.

$$\frac{1}{27} \geq \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma.$$

Odavde slijedi (jer su $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ pozitivni)

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma$, tj. ako je pravokutni paralelepiped kocka.

Zadatak 7. *Koja pravilna četverostrana prizma uz stalni volumen $V = 216$ cm^3 ima minimalno oplošje?*
Rješenje. Neka je a duljina osnovnog brida, v duljina visine, O oplošje i V volumen prizme. Tada je

$$O = 2a^2 + 4av, \qquad V = a^2 v.$$

Kako je $v = \frac{V}{a^2} = \frac{216}{a^2}$, to je

$$O = 2a^2 + 4a \cdot \frac{216}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} O &= 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3\sqrt[3]{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} \\ &= 3\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 216 \cdot 2 \cdot 216} = 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 216. \end{aligned}$$

Minimum, tj. jednakost vrijedi ako i samo ako je $2a^2 = \frac{432}{a}$, tj. $a^3 = 216$, odakle dobivamo $a = 6$ cm. Tada je $v = \frac{216}{36} = 6$ cm.

Zadatak 8. *Volumen pravilne trostrane prizme je V. Kolika mora biti duljina osnovnog brida a da bi oplošje prizme bilo minimalno?*
Rješenje. Iz $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}v$ slijedi $v = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$, gdje je v duljina visine prizme. Tada je

$$O = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4V}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4V\sqrt{3}}{a}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4V\sqrt{3}}{a} \leq 2\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4V\sqrt{3}}{a}} = 2\sqrt{6aV}.$$

Minimum, tj. jednakost vrijedi kada je $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{4V\sqrt{3}}{a}$, odakle dobivamo $a = 2\sqrt[3]{V}$.

Zadatak 9. *Promotrimo one uspravne kružne valjke kojima je zbroj duljina polumjera baze i visine* 10 *cm. Odredite koji od ovih valjaka ima najveću površinu plašta. Koliki je u tom slučaju volumen valjka?*
Rješenje. Neka je r duljina polumjera osnovke, v duljina visine, P površina plašta i V volumen valjka. Tada je $r + v = 10$, $P = 2r\pi v$. Prema AG-nejednakosti je

$$2r\pi v \leq 2\pi \cdot \left(\frac{r+v}{2}\right)^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 50\pi.$$

Površina plašta je maksimalna kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $r = v = 5$ cm. Tada je volumen $V = r^2\pi v = 5^2\pi \cdot 5 = 125\pi$ cm^3.

Zadatak 10. *Volumen valjka iznosi* 1*. Odredite duljinu polumjera osnovke i duljinu visine valjka tako da valjak ima minimalno oplošje.*
Rješenje. Kako je $V = r^2\pi v$, to je $r\pi v = \frac{V}{r} = \frac{1}{r}$. Sada je

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r^2\pi + \frac{2}{r}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$O = 2r^2\pi + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \geq 3\sqrt[3]{2r^2\pi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi}.$$

Jednakost tj. minimum vrijedi ako i samo ako je $2r^2\pi = \frac{1}{r}$, tj. $2r^3\pi = 1$, odnosno $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$. Tada je $v = \frac{1}{r^2\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$.

Zadatak 11. *Suma duljina promjera osnovke i visine uspravnog kružnog valjka iznosi* 3*. Odredite te duljine tako da valjak ima maksimalan volumen.*
Rješenje. Iz $2r + v = 3$ slijedi $v = 3 - 2r$. Tada je $V = r^2\pi v = r^2\pi(3 - 2r)$, tj. $\frac{1}{\pi}V = r^2(3 - 2r)$. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{1}{\pi}V = r \cdot r \cdot (3 - 2r) \leq \left(\frac{r + r + 3 - 2r}{3}\right)^3 = 1.$$

Maksimum tj. jednakost vrijedi ako i samo ako je $r = 3 - 2r$, tj. $r = 1$. Tada je $v = 1$.

Zadatak 12. *Koji uspravni kružni valjak danog volumena V ima najmanje oplošje?*
Rješenje. Iz $V = r^2\pi v$ slijedi $v = \frac{V}{r^2\pi}$. Tada je

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$2r^2\pi \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \leq \left(\frac{2r^2\pi + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}}{3}\right)^3 = \frac{O^3}{27},$$

tj. $2\pi V^2 \leq \frac{O^3}{27}$ odnosno $O \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. Oplošje je minimalno kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $2r^2\pi = \frac{V}{r}$, tj. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2 V}}{2\pi}$. Tada je $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2 V}}{\pi}$. Dakle, $v = 2r$.

Zadatak 13. *Kolike su duljine visine v i polumjera osnovke r uspravnog kružnog valjka maksimalnog plašta upisanog u stožac polumjera osnovke duljine* 8 *cm i visine duljine* 12 *cm.*

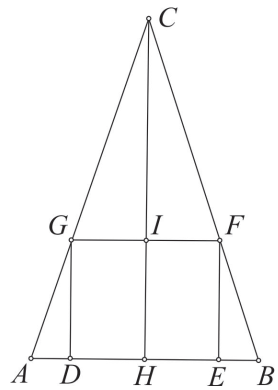
Rješenje. Nacrtajmo osni presjek (slika 3). Imamo $|HE| = r$ i $|HI| = v$. Iz sličnosti trokuta CAH i GAD imamo redom

$$|AH| : |AD| = |CH| : |GD|,$$

$$8 : (8 - r) = 12 : v,$$

$$8v = 12(8 - r),$$

$$v = \frac{3(8 - r)}{2}.$$



Slika 3.

Površina plašta valjka iznosi

$$P = 2r\pi v = 2r\pi \cdot \frac{3(8 - r)}{2} = 3r\pi(8 - r).$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$r(8 - r) \leq \left(\frac{r + (8 - r)}{2}\right)^2 = 16,$$

to je

$$P \leq 3\pi \cdot 16 = 48\pi.$$

Maksimum se postiže kada vrijedi jednakost, a to je za $r = 8 - r$ tj. $r = 4$ cm. Tada je $v = 6$ cm.

Zadatak 14. *U uspravni kružni stožac upišite uspravni kružni valjak maksimalnog volumena.*

Rješenje. Neka je R duljina polumjera osnovke stošca, v duljina visine stošca, r duljina polumjera osnovke valjka i v_1 duljina visine valjka. Nacrtajmo osni presjek (slika 3). Imamo $|CH| = v$, $|IH| = v_1$, $|HE| = r$, $|HB| = R$. Iz sličnosti trokuta AHC i ADG slijedi

$$|HC| : |DG| = |AH| : |AD|,$$

odnosno

$$v : v_1 = R : (R - r).$$

Odatle dobivamo

$$v_1 = \frac{v(R-r)}{R}.$$

Tada je volumen valjka

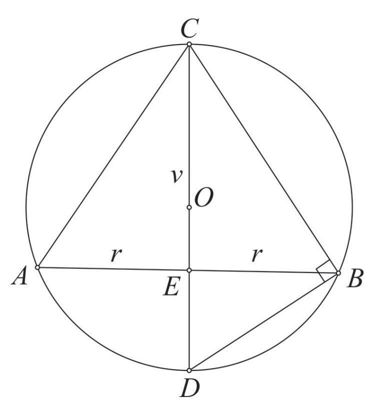
$$V = r^2 \pi v_1 = r^2 \pi \cdot \frac{v(R-r)}{R} = \frac{v\pi}{R} r^2 (R - r).$$

Jasno je da je $0 < r < R$, pa je $R - r > 0$. Volumen je maksimalan kada je $r^2(R-r)$ maksimalan jer je $\frac{v\pi}{R}$ konstanta. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} r^2(R-r) &= 4 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (R - r) \\ &\leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + (R-r)}{3} \right)^3 = 4 \cdot \frac{R^3}{27}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi (a tada je volumen maksimalan) onda i samo onda kada je $\frac{r}{2} = R - r$, odakle slijedi $r = \frac{2}{3}R$. Tada je $v_1 = \frac{1}{3}v$.

Zadatak 15. *Kolike su duljina polumjera i duljina visine uspravnog kružnog stošca maksimalnog volumena koji se može upisati u kuglu polumjera duljine R?*
Rješenje. Nacrtajmo osni presjek (slika 4).



Slika 4.

Neka je r duljina polumjera stošca, v duljina visine stošca, R duljina promjera kugle, a V volumen stošca. Onda je $|BE| = |AE| = r$, $|CE| = v$, $|CD| = 2R$. Prema Talesovom poučku, kut $\sphericalangle DBC$ je pravi. Primijenimo Euklidov poučak na pravokutni trokut CDB :

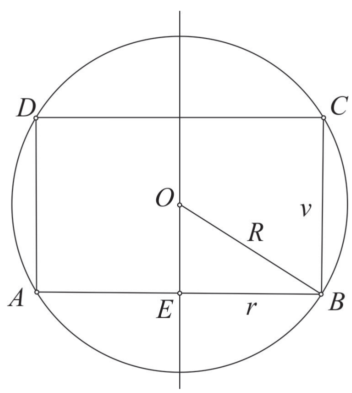
$$|BE| = \sqrt{|CE| \cdot |ED|}$$

odnosno

$$r = \sqrt{v(2R - v)}.$$

Imamo
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi v = \frac{1}{3}v(2R-v)\pi v = \frac{\pi}{6}v(4R-2v)v.$$
Prema AG-nejednakosti je
$$v(4R-2v)v \leq \left(\frac{v+(4R-2v)+v}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{64R^3}{27},$$
pa je
$$V \leq \frac{\pi}{6}\cdot\frac{64R^3}{27} = \frac{32R^3\pi}{81}.$$
Volumen je maksimalan kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $v = 4R-2v$, odakle dobivamo $v = \frac{4}{3}R$. Tada je $r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

Zadatak 16. *U krug polumjera R upisan je pravokutnik koji rotira oko pravca koji prolazi središtem kruga paralelno dvjema stranicama pravokutnika. Odredite maksimalan volumen rotacijskog tijela.*
Rješenje. Dobiveno rotacijsko tijelo je uspravni kružni valjak. Neka je r duljina polumjera osnovke, v duljina visine i V volumen valjka.



Slika 5.

Imamo (slika 5): $|AE| = |EB| = r$, $|AD| = |BC| = v$, $|BO| = R$. Nadalje,
$$v = 2\sqrt{R^2-r^2}, \qquad V = r^2\pi v = r^2\pi\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}.$$
Prema AG-nejednakosti je
$$\begin{aligned}
r^2\sqrt{R^2-r^2} &= \sqrt{r^4(R^2-r^2)} = \sqrt{4\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot(R^2-r^2)}\\
&= 2\sqrt{\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot(R^2-r^2)} \leq 2\sqrt{\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+(R^2-r^2)}{3}\right)^3}\\
&= 2\sqrt{\left(\frac{R^2}{3}\right)^3} = \frac{2R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}.
\end{aligned}$$

Volumen je maksimalan kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$. Odatle dobivamo $r = R\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. Tada je $v = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$ i $V_{max} = \frac{4\sqrt{3}}{9}R^3\pi$.

Zadatak 17. *Opseg jednakokračnog trokuta iznosi* 40 *cm. Kolike trebaju biti duljine njegovih stranica da bi volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko osnovice bio maksimalan?*

Rješenje. Dobiveno rotacijsko tijelo se sastoji od dva sukladna stošca koji imaju zajedničku bazu. Neka je duljina osnovice trokuta $2a$, a kraka b. Tada je $2a+2b = 40$, tj. $a + b = 20$. Duljina visine povučene na osnovicu je $v = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{400 - 40a}$. Kako je v duljina polumjera baze stošca, a a duljina visine, to je volumen rotacijskog tijela jednak

$$V = 2 \cdot \frac{v^2\pi a}{3} = \frac{2}{3}\pi a(400 - 40a) = \frac{80\pi}{3}a(10 - a).$$

Prema AG-nejednakosti je

$$V = \frac{80\pi}{3}a(10 - a) \leq \frac{80\pi}{3} \cdot \left(\frac{a + (10 - a)}{2}\right)^2 = \frac{80\pi}{3} \cdot 25 = \frac{2000\pi}{3}.$$

Volumen je maksimalan kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $a = 10 - a$ tj. $a = 5$ cm. Tada je $b = 20 - 5 = 15$ cm. Dakle, duljine stranica trokuta su 10 cm i 15 cm.

Zadatak 18. *Kotao se sastoji od valjka koji završava dvjema polusferama. Odredite dimenzije kotla tako da bi pri danom volumenu V njegovo oplošje bilo minimalno.*

Rješenje. Neka je v visina valjkastog dijela, a R zajednički polumjer osnovke valjka i polusfere. Tada je, prema uvjetu zadatka, volumen kotla

$$V = R^2\pi v + \frac{4}{3}R^3\pi \tag{1}$$

odakle je

$$v = \frac{V - \frac{4}{3}R^3\pi}{R^2\pi}. \tag{2}$$

Oplošje kotla je

$$O = 2R\pi v + 4R^2\pi. \tag{3}$$

Uvrstimo iz (2) vrijednost v u (3) i dobivamo

$$O = 2\Big(\frac{V}{R} + \frac{2R^2\pi}{3}\Big) = 2\Big(\frac{V}{2R} + \frac{V}{2R} + \frac{2R^2\pi}{3}\Big).$$

Prema AG-nejednakosti je

$$O \geq 2 \cdot 3\sqrt[3]{\frac{V}{2R} \cdot \frac{V}{2R} \cdot \frac{2R^2\pi}{3}} = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2\pi}{6}}.$$

Minimum se postiže kada vrijedi jednakost, a to je onda i samo onda kada je $\frac{V}{2R} = \frac{2R^2\pi}{3}$ odakle dobivamo

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{4}$$

Iz (1) i (4) zaključujemo da će oplošje biti minimalno kada je $R^2\pi \cdot v = 0$ tj. $v = 0$. Dakle, minimalno oplošje kotla se dostiže kada se on sastoji samo iz dvije polusfere:

$$O_{min} = 4R^2\pi = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}.$$

Literatura

[1] J. BLÁZSOVICS, *Őtősőm lesz matematikából*, Novotrade, Budapest, 1990.

[2] L. BŐRCSŐK, *Érettségi, felvételi feladatok, Matematika*, Szukits Kőnyvkiado, Szeged, 1999.

[3] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena AG-nejednakosti u planimetriji*, Osječki matematički list 9(2) (2009), 55–68.

[4] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena AG-nejednakosti u trigonometriji*, Osječki matematički list 10(1) (2010), 1–14.

[5] L. GERŐCS, *Irány az egyetem 1993*, Nemzeti Tankőnyvkiado, 1993.

[6] S. MINTAKOVIĆ, *Zbirka zadataka iz infinitezimalnog računa*, Svjetlost, Sarajevo, 1979.

[7] B. PAVKOVIĆ, B. DAKIĆ, Ž. HANJŠ, P. MLADINIĆ, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.

[8] I. H. ŠIVANISKIJ, *Posobie po matematike dlja tehnikumov*, Visšaja škola, Moskva, 1970.

[9] A. VARENCZA, T. ROZGONYI, *A tanárképző főiskolák Peter Rosza matematikai versenyei IV, 1986–2002*, Typotex, Budapest, 2003.