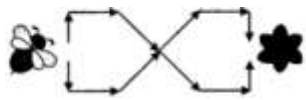
Ристо Малчески, Скопје
Методи Главче, Скопје

ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

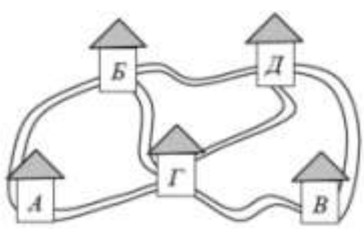
Често пати имаме потреба да определиме број на можности за некој настан, како на пример, на колку различни начини може да се стигне од едно до друго место кои се поврзани со повеќе патишта или на колку различни начини може да се организира играњето на натпреварите на еден фудбалски трунир во кој секоја екипа игра со секоја од преостанатите екипи. Задачите од ваков вид се познати како комбинаторни задачи, т.е. припаѓаат на посебна математичка област. Ќе разгледаме неколку групи задачи од овој вид, при што ќе ги објасниме некои од начините на елементарните комбинаторни пребројувања.

Задача 1. По колку различни патеки може пчеличката Маја да стигне до цветот ако таа оди по патеките што ги покажуваат стрелките на цртежот десно?



Решение. Пчеличката Маја може да тргне во 2 насоки, нагоре и надолу. На местото каде што патеките се спојуваат таа може да избере каде ќе оди и има 2 избора (нагоре или надолу). Според тоа, бројот на патеките по кои пчеличката Маја може да стигне до цветот е еднаков на $2 \cdot 2 = 4$.

Задача 2. На колку различни начини автобус може да стигне од селото *А* во селото *В* ако низ секое од селата *Б*, *Г* и *Д* минува само по еднаш?



Решение. Ако автобусот тргне од *А* кон *Г*, тогаш тој мора прво да оди во *Б* (Зошто?), потоа во *Д* и на крајот во *В*. Според тоа, во овој случај имаме само еден пат *АГБДВ*. Ако автобусот прво тргне кон *Б*, тој може да продолжи или кон *Г* или кон *Д*. Во првиот случај имаме *АБГДВ*, а во вториот случај *АБДГВ*. Според тоа, автобусот од *А* во *В*, минувајќи само по еднаш низ *Б*, *Г* и *Д* може да стигне на 3 начини.

Задача 3. Матеа има зелена, бела и црвена маица, бели и зелени шорцеви и зелени и црвени патики. Таа сака да се облече така што ќе носи облека и обувки во само две бои. Определи го бројот на начините на кои може да се облече Матеа.

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на следнава табела:

	Маица	**Шорцеви**	**Патики**
1	*Зелена*	*Зелени*	Црвени
2	*Зелена*	Бели	*Зелени*
3	*Бела*	*Бели*	Црвени
4	*Бела*	*Бели*	Зелени
5	*Црвена*	Бели	*Црвени*
6	*Црвена*	Зелени	*Црвени*
7	Бела	*Зелени*	*Зелени*
8	Црвена	*Зелени*	*Зелени*

Според тоа, Матеа може да се облече на 8 различни начини.

Задача 4. Ивана има: сина и црвена шапка, жолта и црвена блуза и жолта, сина и зелена сукња. Ивана не носи шапка и блуза со иста боја. На колку начини таа може да ги избере сукњата, блузата и шапката?

Решение. Ако Ивана избере сина шапка, тогаш блузата може да ја избере на два начина, а сукњата на три начина. Значи, во овој случај имаме $2 \cdot 3 = 6$ избора. Ако Ивана избере црвена шапка, тогаш блузата може да ја избере на еден начин, а сукњата на 3 начина. Значи, во овој случај имаме $1 \cdot 3 = 3$ избора. Други можности не постојат, па затоа вкупниот број избори е еднаков на $6 + 3 = 9$.

Задача 5. Во секој квадрат и секој триаголник на цртежот десно треба да се нацрта ѕвезда, кругче и срце, така што фигурите кои имаат заедничка страна содржат различни цртежи? Определи го бројот на начините на кои може да се нацртаат ѕвездата, кругчето и срцето.

Решение. Секој триаголник е соседен со два триаголници во кои веќе се нацртани два различни цртежи, па затоа распоредот на ѕвездата, кругчето и срцето во триаголниците е еднозначно определен. Секој од шесте триаголници е соседен со по еден квадрат во кој може да се нацртаа двата цртежи кои ги нема во триаголникот. Значи, за секој квадрат имаме 2 можности и како има 6 квадрати, заклучуваме дека бројот на начините на кои може да се нацртаат ѕвездата, кругчето и срцето е еднаков на

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

Задача 6. На колку различни начини може една до друга да се наредат:

а) една златна и две сребрени монети,

б) една златна и 3 сребрени монети,

в) две златни и две сребрени монети.

Решение. Со З и С да означиме златна и сребрена монета.

а) Имаме: ЗСС, СЗС и ССЗ, што значи дека една златна и две сребрени монети една до друга може да се наредат на 3 начин.

б) Имаме: ЗССС, СЗСС, ССЗС и СССЗ, што значи дека една златна и три сребрени монети една до друга може да се наредат на 4 начини.

в) Имаме: ССЗЗ, СЗСЗ, СЗЗС, ЗССЗ, ЗСЗС и ЗЗСС, што значи дека две златни и две сребрени монети една до друга може да се наредат на 6 начини.

Задача 7. Славе купил неколку книги. На прашањето колку книги купил, тој одговорил дека го купил најмалиот можен број книги за кои важи:

1) Барем една книга е за 1 евро поскапа од некоја друга книга.
2) Барем една книга е за 2 евра поскапа од некоја друга книга.
3) Барем една книга е за 3 евра поскапа од некоја друга книга.
4) Барем една книга е за 4 евра поскапа од некоја друга книга.
5) Барем една книга е за 5 евра поскапа од некоја друга книга.
6) Барем една книга е за 6 евра поскапа од некоја друга книга.
7) Барем една книга е за 7 евра поскапа од некоја друга книга.

Колку книги купил Славе?

Решение. Нека претпоставиме дека Славе купил четири книги. Ако цените на книгите се a, b, c и d, тогаш нивните разлики се $b-a, c-a,$ $c-b, d-a, d-b, d-c$, т.е. имаме најмногу шест различни броеви, а според условот на задачата треба да имаме најмалку седум различни броеви. Според тоа, Славе купил пет или повеќе книги. Ќе покажеме дека најмалиот број книги за кои важат условите од 1) до 7) е еднаков на пет.

Можеме да земеме дека цената на најефтината книга е 1 евро (Зошто?). Последователно ќе определиме пет броја за кои се исполнети условите од 1) до 7).

За да е исполнет условот 1) треба да имаме книга од 2 евра.

Ако имаме книги од 1, 2 и 3 евра, тогаш се исполнети условите 1) и 2), но ако имаме книги од 1, 2 и 4 евра, тогаш се исполнети и условите 1), 2) и 3).

Ако имаме книги од 1, 2, 4 и 5 евра, тогаш се исполенти условите од 1) до 4), но ако имаме книги од 1, 2, 4 и 6 евра, тогаш се исполнети условите од 1) до 5).

Ако имаме книги од 1, 2, 4, 6 и 7 евра, тогаш се исполнети условите од 1) до 6), но ако имаме книги од 1, 2, 4, 6 и 8 евра, тогаш се исполнети условите од 1) до 7).

Значи, Славе купил пет книги, на пример, по цени 1, 2, 4, 6 и 8 евра.

Лесно се гледа дека пет книги со цени 1, 2, 3, 5 и 8 евра ги задоволуваат условите од 1) до 7). Најди барем уште еден пример на пет броја, помали од 9, за кои се исполенти условите од 1) до 7).

Задача 8. Елена и Ангела се родени во иста седмица, но по возраст се разликуваат најмалку три дена. Определи го бројот на паровите денови во кои се родени девојчињата.

Решение. Деновите на раѓање може да бидат

По-Ч, По-Пе, По-Са, По-Н, В-П, В-Са, В-Н, Ср-Са, Ср-Н, Ч-Н,

што значи дека имаме 10 можности. За секоја од овие можности имаме 2 начина на распоредување на девојчињата. Значи, вкупниот број парови во кои се родени девојчињата е еднаков на $2 \cdot 10 = 20$.

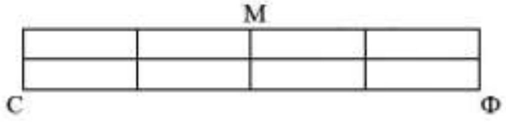
Задача 9. Андријана, Елеонора и Марија се родени во некои од деновите од вторник до недела во една иста седмица, но секои две по возраст се разликуваат за најмалку два дена. Определи го бројот на распоредите на деновите во кои може да се родени девојчињата?

Решение. Деновите на раѓање може да бидат:

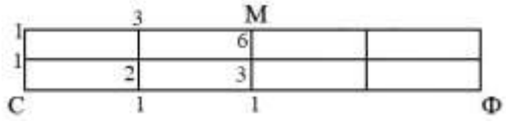
В-Ч-Са, В-Ч-Н, В-Пе-Н, Ср-Пе-Н.

За секоја од овие можности девојчињата може да бидат распоредени: првото на 3 начини, потоа второто на 2 начини и на крајот третот на 1 начин, односно на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начини. Според тоа, бројот на распоредите на деновите во кои може да се родени девојчињата е еднаков на $4 \cdot 6 = 24$.

Задача 10. Горјан учествува на училишниот маратон, кој се одржува на улиците од неговата населба. На цртежот десно е прикажан планот на населбата, при што почетокот на трката е во точката С, крајот на трката е во точката Ф и секој натпреварувач треба да помине низ контролната точка М. Определи го бројот на најкратките патеки по кои Горјан може да ја истрча трката.

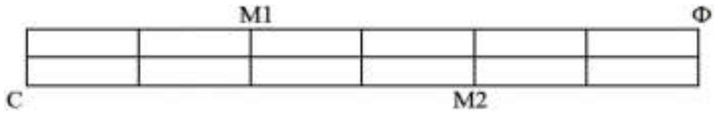


Решение. Прво ќе ги преброиме најкратките патеки од точката С до точката М. Забележуваме дека најкратките патеки

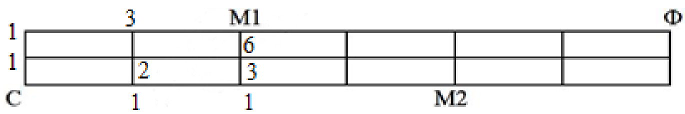


се добиваат ако се движиме само нагоре или надесно. На секоја раскрсница го запишуваме бројот на патиштата од С до таа раскрсница, кој е еднаков на збирот на броевите запишани под него или лево од него (Зошто?). Така го добиваме цртежот десно. Значи, од С до М имаме 6 најкратки патишта. Слично, од М до Ф имаме 6 најкратки патишта. Според тоа, бројот на најкратките патеки по кои Горјан може да ја истрча трката е еднаков на $6 \cdot 6 = 36$.

Задача 11. На долниот цртеж е дадена мрежа од улици по кои се одвива училишниот крос. Учениците тргнуваат од раскрсницата С, прво минуваат низ првата контрола (раскрсницата М1), потоа низ втората контрола (раскрсницата М2) и пристигнуваат на целта (раскрсницата Ф). Определи го бројот на најкратките различни патишта по кои можат да поминат натпреварувачите.



Решение. Да ги изброиме најкратките патишта од С до М1. По најкраток пат все движиме само нагоре и надесно. На секоја раскрсница го запишуваме бројот на патиштата од С до неа, кој е еднаков на збирот на броевите запишани во раскрсницата под неа и лево од неа. Така за М1 добиваме 6 патишта (видо цртеж).



Од М1 до М2 и од М2 до Ф повоторно имаме по 6 патишта. Според тоа, вкупниот број најкратки патишта е еднаков на $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Во последните три задачи од ова наше дружење нема да определуваме број на можности како во претходните разгледувања, туку ќе покажеме како може во некои случаи да се определи најмал број потези за да се постигне определена цел. Како и претходните задачи и овој вид проблеми се дел од комбинаториката, која е богатство од различни идеи и методи.

Задача 12. Имаш пет топчиња со различна маса (цртеж десно). При секое мерење можеш да избереш две точно две топчиња и на вага да ја измериш нивната заедничка маса. Определи го најмалиот број мерење со кои можеш да ја најдеш заедничката маса на петте топчиња.

Решение. Со едно мерење можеме да ја определиме заедничката маса на било кои две топчиња, па затоа со две мерења можеме да ја определиме заедничката маса на кои било четири топчиња. Понатаму, со третото мерење не можеме да ја определиме масата на петтото топче, што значи дека се потребни повеќе од три мерења.

Ќе покажеме како со помош на 4 мерења може да ја определиме заедничката маса на петте топчиња. Гледајќи од лево на десно топчињата да ги означиме со A, B, C, D, E. Имаме:

- со првото мерење ја наоѓаме заедничката маса на топчињата A и B,
- со второто мерење ја наоѓаме заедничката маса на топчињата C и D,
- со третото мерење ја наожаме заедничката маса на топчињата C и E,
- со четвртото мерење ја наоѓаме заедничката маса на топчињата D и E.

Ако сега ги собреме добиените маси при третото и четвртото мерење, а потоа ја одземеме масата добиена при второто мерење и добиената разлика ја поделиме со 2, тогаш ја добиваме масата на топчето E. Конечно, ако масата на топчето E ја собереме со масите добиени при првото и второто мерење, ја добиваме заедничката маса на петте топчиња.

Задача 13. Во девет купчиња имаме 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 камчиња. Имаме право од две купчиња да земеме еднаков број камчиња и да ги преместиме во трето купче. Треба сите камчиња да ги собереме во едно купче. Дали тоа можеме да го направи со помалку од 7 преместувања?

Решение. Вкупно имаме 45 камчиња, што значи непарен број камчиња. Во секој чекор преместуваме парен број камчиња, па затоа треба сите камчиња да ги пренесуваме во купче кое има непарен број камчиња. Понатаму, бидејќи на крајот треба да испразниме 8 купчиња и тоа треба да го направиме во најмногу 6 преместувања, потребно е најмалку во две преместувања да празниме по две купчиња, што значи со претходните преместувања да сме направиле две купчиња со еднаков број камчиња. Едно решение на задачата е:

$$\begin{aligned}(1,2,3,4,5,6,7,8,9) &\to (0,2,3,4,5,6,6,8,11) \to (0,2,3,4,5,0,0,8,23)\\ &\to (0,2,0,4,2,0,0,8,29) \to (0,0,4,4,0,0,0,8,29)\\ &\to (0,0,0,0,0,0,8,8,29) \to (0,0,0,0,0,0,0,0,45).\end{aligned}$$

Задача 14. Во девет купчиња има 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 топчиња. Имаме право од две различни купчиња да земеме еднаков број топчиња и да ги префрлиме во трето купќе. Дали може со помалку од 6 префрлања сите топчиња да ги собереме во едно купче?

Решение. Одговорот на прашањето е потврден и тоа може да се направи на следниот начин:

$$\begin{aligned}(1,2,3,4,5,6,7,8,9) &\to (1,1,3,3,7,6,7,8,9) \to (0,0,3,3,7,8,7,8,9) \to (0,0,0,0,7,8,7,8,15)\\ &\to (0,0,0,0,0,8,0,8,29) \to (0,0,0,0,0,0,0,0,45).\end{aligned}$$

На крајот од ова наше дружење само ќе забележиме дека задачите кои претходно ги разгледавме се задавани за учениците од прво, второ и трето одделение на бројните натпревари кои се одржуваат во земјите на нашето потесно и пошироко опкружување.