Републички натпревар 1993

I година

1. Нека a е непарен цел број. Докажете дека бројот a^3+3a^2-a-3 е делив со 48.

Решение. Ако $a=2k+1$, каде што k е цел број, тогаш

$$\begin{aligned}a^3+3a^2-a-3 &= (2k+1)^3+3(2k+1)^2-(2k+1)-3=\\ &=8k^3+12k^2+6k+1+12k^2+12k+3-2k-1-3=\\ &=8k(k^2+3k+2)\,.\end{aligned}$$

Ако k е парен број, тогаш $8k$ е делив со 16. Ако k е непарен број, тогаш k^2 и $3k$ се непарни броеви, а k^2+3k+2 е парен број, па значи $8k(k^2+3k+2)$ е број делив со 16. Во двата случаја добиваме дека $8k(k^2+3k+2)$ е број делив со 16.

Бројот $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ е производ од три последователни цели броеви, што значи дека е делив со 3, од што следува дека $3\,|\,(a^3+3a^2-a-3)$.

Бидејќи дадениот број е делив со 3 и 16, јасно е дека е делив со $3\cdot 16=48$.

2. Определете го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ чијшто збир на цифри е 17, ако сите цифри се различни и ги задоволуваат равенствата

$$2x=y-z \quad \text{и} \quad y=t^2.$$

Решение. Бидејќи $y\le 9$ и $y=t^2$, добиваме $t\le 3$.

За $t=0$ се добива $t=0=y$, што не е можно, а за $t=1$ се добива $t=1=y$, што исто така не е можно.

Нека $t=2$; тогаш $y=4$, па од $2x=y-z$ добиваме $2x=4-z$. Од тука е јасно дека z е парен број помал од 4. Можни се следните случаи:

1° $z=0$, но тогаш $x=2=t$

2° $z=2$, ова не е можно бидејќи мора $z\ne t$.

3° $z=4$, но тогаш $x=0$, па бројот не е четирицифрен.

Значи, не е можно $t=2$.

Нека $t=3$. Тогаш $y=9$, па од $2x=y-z$, добиваме $2x=9-z$. Оттука е јасно дека z е непарен број. Можни се следните случаи:

1° $z=1$, $x=4$, $\overline{xyzt}=4913$ и збирот на цифрите е 17;

2° $z=3$, $x=3$ што не е можно;

3° $z=5$, $x=2$, $\overline{xyzt}=2953$, но збирот на цифрите е 19;

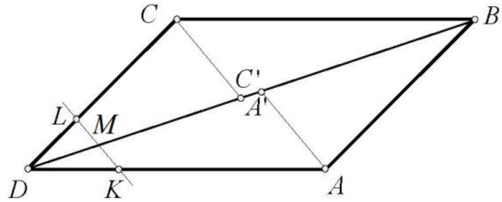
4° $z=7$, $x=1$, $\overline{xyzt}=1973$, но збирот на цифрите е 20;

5° $z=9$, $x=0$, што не е можно бидејќи според условот на задачата $\overline{xyzt}$ е четирицифрен број.

Значи, единствено решение е $\overline{xyzt}=4913$.

3. Даден е паралелограм $DABC$. На страната DC е нанесена точка L така што $3\cdot\overline{DL}=\overline{DC}$, а на страната DA е нанесена точка K така што $4\cdot\overline{DK}=\overline{DA}$. Низ точките L и K е повлечена права p која се сече со дијагоналата DB во точката M. Колкав дел од дијагоналата DB е отсечката DM?

Решение. Ги повлекуваме правите AA' и CC' паралелно со правата p, при што точките A' и C' лежат на дијагоналата DB. Тогаш триаголниците DLM и DCC' се слични ,а , исто така, и триаголниците DLM и DAA' се слични. Од сличноста на овие триаголници, добиваме



$$3\cdot\overline{DM}=\overline{DC'} \text{ и } 4\cdot\overline{DM}=\overline{DA'}.$$

Триаголниците DCC' и BAA' се складни, бидејќи имаат еднакви страни $\overline{DC}=\overline{BA}$ и соодветните агли при овие страни им се еднакви(правите CC' и AA' се паралелни). Значи $\overline{DC'}=\overline{A'B}$.

Од досега изнесеното имаме

$$\overline{DB}=\overline{DA'}+\overline{A'B}=\overline{DA'}+\overline{DC'}=4\cdot\overline{DM}+3\cdot\overline{DM}=7\cdot\overline{DM}.$$

Значи отсечката DM седмина од дијагоналата DB.

4. Разложете го на множители изразот $A=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-1-(x^5-1)\\&=(2+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+x^3+x^4+x^5)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\&=(2x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4)\end{aligned}$$

II година

1. Решете ја равенката

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

Решение. Имаме

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

$$\frac{3}{x}+\frac{3}{x-5}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}=0$$

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6}=0$$

Оттука е јасно дека едно решение на равенката е $x_1=\frac{5}{2}$. Ако за $x\neq\frac{5}{2}$ ја поделиме равенката со $2x-5$ и воведеме смена $x^2-5x=t$, ја добиваме равенката

$$\frac{3}{t}+\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t+6}=0,$$

од која по множењето со $t(t+4)(t+6)$ се сведува на квадратна равенка и чиишто решенија се $t_1=-\frac{9}{2}$ и $t_2=-2$. Со замена на овие вредности во направената смена добиваме две квадратни равенки чиишто решенија се $x_{2/3}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$ и $x_{4/5}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Бидејќи за сите добиени решенија почетната равенка е осмислена, добиваме дека равенката има пет решенија,

2. Нека $a_1,a_2,a_3,...,a_{1993}$ и $b_1,b_2,b_3,...,b_{1993}$, p и q се реални броеви различни од нула и нека

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{1993}^2=p^2$$

$$b_1^2+b_2^2+...+b_{1993}^2=q^2$$

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_{1993}b_{1993}=pq\,.$$

Докажете дека

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_{1993}}{b_{1993}}$$

Решение. Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2, а третото со $-2pq$ и потоа ги собереме трите така добиени равенства, добиваме

$$(a_1p-b_1q)^2+(a_2p-b_2q)^2+...+(a_np-b_1q)^2=0\,.$$

Збирот на квадрати е 0 ако и само ако сите собироци се 0, од каде што веднаш следува

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_{1993}}{b_{1993}}\,.$$

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ и повлечени се две прави, коишто страните AB и CD ги делат на три еднакви делови. Да се докаже дека плоштината на делот од четириаголникот $ABCD$ што се наоѓа меѓу тие две прави е третина од плоштината на целиот четириаголник.

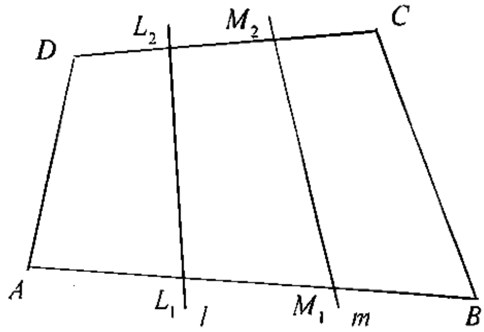
Решение. Нека l и m се правите што ги делат страните AB и CD на три еднакви делови и при тоа

$$AB \cap l = \{L_1\},\ AB \cap m = \{M_1\},$$

$$CD \cap l = \{L_2\} \text{ и } CD \cap m = \{M_2\}.$$

Нека $P_{AL_1D} = x$ и $P_{M_1M_2B} = y$. Тогаш

$$P_{L_2L_1M_1} = \frac{x+y}{2}, \qquad (1)$$



Навистина.

$$P_{AL_1D} = \frac{\overline{AL_1} \cdot h_1}{2} = x,\ P_{M_1M_2B} = \frac{\overline{M_1B} \cdot h_3}{2} = y \text{ и } \quad P_{L_2L_1M_1} = \frac{\overline{L_1M_1} \cdot h_2}{2}.$$

Висината h_2 е средна линија на трапезот со основи h_1 и h_3, па за неа важи

$$h_2 = \frac{h_1+h_3}{2}.$$

Со оглед на ова и фактот што $\overline{AL_1} = \overline{M_1B} = \overline{L_1M_1}$ се добива (1). Аналогно на ова, ако означиме $P_{DL_1L_2} = z$ и $P_{CM_2B} = u$, добиваме

$$P_{L_2M_2M_1} = \frac{z+u}{2} \qquad (2)$$

Нека P е плоштина на четириаголникот $ABCD$, а P_1 е плоштоината на четириаголникот меѓу правите l и m. Со оглед на (1), (2) и воведените ознаки, добиваме

$$P = 3\frac{x+y+z+u}{2} \quad \text{и} \quad P_1 = \frac{x+y+z+u}{2},$$

од каде што веднаш следува дека $P = 3 \cdot P_1$.

4. Да се определат рационалните вредности на x, за коишто бројот $8x^2 - 2x - 3$ е квадрат на рационален број.

Решение. Да го разложиме дадениот израз:

$$8x^2 - 2x - 3 = (2x+1)(4x-3). \qquad (1)$$

За рационални вредности на x двата множители на десната страна се рационални броеви. Производот на овие два рационални броја е квадрат на рационален број, ако и само ако постојат рационални броеви d, u и v така што:

$$2x+1 = du^2 \text{ и } 4x-3 = dv^2. \qquad (2)$$

Решавајќи го (2) како систем од равенки по непознати x и d се добива

$$d = \frac{5}{2u^2-v^2} \text{ и } x = \frac{1}{2}\frac{3u^2+v^2}{2u^2-v^2}. \qquad (3)$$

Бидејќи u и v се рационални, а $\sqrt{2}$ е ирационален, изразот што се јавува како именител е 0 ако и само ако $u = v = 0$. Значи, единствен недозволен избор на u и

v е $u=v=0$. За секој друг избор на рационални броеви u и v рационалниот број x (одбран како во (3)) ги задоволува барањата на задачата и притоа важи

$$8x^2-2x-3=(\tfrac{5uv}{2u^2-v^2})^2 \ .$$

III година

1. Нека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ се реални корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$. Кои услови треба да ги исполнуваат p и q, за да важи $\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot180^\circ$.

Решение. Нека важи $\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot180^\circ$; тогаш $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$, т.е.

$$\tfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\sqrt{3} \quad (1)$$

Со примена на Виетовите врски за решенијата на квадратната равенка, добиваме $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-p$ и $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=q$, па, со замена во (1) се добива

$$p=(q-1)\sqrt{3}\,. \quad (2)$$

Покрај овој услов, дискриминантата на квадратната равенка мора да е ненегативна, т.е. мора $p^2-4q\geq0$. Ако во овој услов, замениме p од (2), добиваме

$$3q^2-10q+3\geq0\,.$$

Решението на ова неравенка е

$$q\leq\tfrac{1}{3} \quad \text{или} \quad q\geq3\,. \quad (3)$$

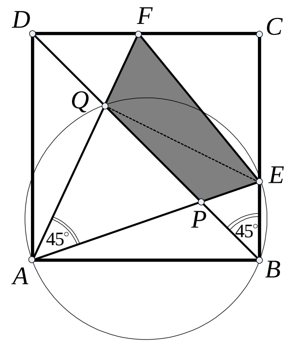
Значи, p и q мора да ги задоволат условите (2) и (3) .

Обратно, ако p и q ги задоволуваат условите (2) и (3), тогаш дискриминантата на квадратната равенка ќе биде позитивна и ќе постојат реални решенија коишто, секако, се еднакви на $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ за погодно избрани α и β. Но, според Виетовите врски, и со оглед на (2), се добива дека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ го задоволуваат равенството (1), од каде што $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$, т.е. $\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot180^\circ$.

2.Од темето A на квадратот $ABCD$ кон внатрешноста се повлечени две полуправи коишто зафаќаат агол од 45°. Едната од нив ја сече страната BC во точката E, а дијагоналата BD во точката P, а другата полуправа ја сече страната CD во точката F а дијагоналата BD во точката Q. Докажете дека плоштината на триаголникот APQ е еднаква на плоштината на четириаголникот $PQFE$.

Решение. Точките A,B,E и Q лежат на една кружница, бидејќи отсечката EQ од точките A и B се гледаат под еднаков агол од 45°. Бидејќи $\measuredangle ABE=90^\circ$, добиваме дека и $\measuredangle EQA = 90^\circ$. Оттука е јасно дека $\measuredangle QEA = 45^\circ$, па, значи, триаголникот ΔAQE е рамнокрак и правоаголен со прав агол во Q. Според тоа:

$$\overline{AE} = \sqrt{2} \cdot \overline{AQ}. \qquad (1)$$



Аналогно се покажува дека

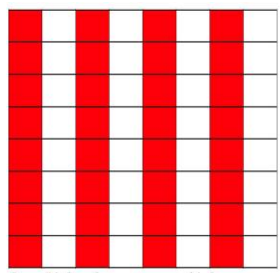
$$\overline{AF} = \sqrt{2} \cdot \overline{AP}. \qquad (2)$$

Со P_1 и P_2 ќе ги означиме плоштините на триаголниците AQP и AEF соодветно. Тогаш, со оглед на (1) и (2), добиваме

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \sin 45^\circ}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AF} \sin 45^\circ} = \frac{1}{2}.$$

Значи $2P_1 = P_2$, од каде што следува дек аплоштината на триаголникот APQ е еднаква наплоштината на четириаголникот $PQFE$.

3. Докажете дека шаховска табла со димензии 8×8 не може да се препокрие со 15 L-тетрамина и едно квадратно тетрамино.



Решение. Да ја обоиме таблата така што првата колона ќе ја обоиме црвено, втората колона ќе ја обоиме бело, третата црвено и така наизменично се до осмата колона која ќе биде обоена бело. Гледаме дека при вака обоена табла секое L-тетрамино секогаш препокрива непарен број на црвени полиња (едно или три). Петнаесет вакви фигури ќе препокријат повторно непарен број на црвени полиња, а заедно со едно квадратно тетрамино, коешто покрива точно две црвени полиња, конечно ќе бидат покриени, со помош на сите расположиви фигури, непарен број на црвени полиња. Но, таблата е обоена така што има подеднаков број на бели и црвени полиња, и тоа по 32, па значи дадените тетрамина никако не можат да го покријат парниот број полиња.

4. Нека x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 се ненегативни реални броеви чијшто збир е 1. Да се определи максималната можна вредност на изразот

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5.$$

Решение. Поради ненегативноста на броевите x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, важи неравенството

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \le (x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_5) \qquad (1)$$

Имајќи го предвид неравенството $ab \le \frac{1}{4}(a+b)^2$ за $a = x_2 + x_4$ и $b = x_1 + x_3 + x_5$ добиваме

$$(x_2+x_4)(x_1+x_3+x_5)\le\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) е јасно дека вредноста на дадениот израз не надминува $\frac{1}{4}$. Дадениот израз за $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ и $x_3=x_4=x_5=0$ е еднаков на $\frac{1}{4}$, па значи тоа е неговата максимална вредност (ова вредност се достигнува и за некои други вредности на променливите).

IV година

1. Нека n е природен број, нека $x_0=\frac{1}{n}$ и нека за секој $k=1,2,....,n-1$ важи

$$x_k=\frac{1}{n-k}(x_0+x_1+...+x_{k-1}).$$

Пресметајте го збирот $S_k=x_0+x_1+...+x_k$.

Решение. За $k=0$ и $k=1$ имаме

$$S_0=x_0=\frac{1}{n};$$

$$S_1=x_0+x_1=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}x_0=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}.$$

Можеме да претпоставиме дека $S_k=\frac{1}{n-k}$. За $k=0$ и $k=1$ тоа е точно. да претпоставиме дека дадената формула е точна за $k\le s$. Тогаш за $k=s+1$ имаме

$$S_{s+1}=S_s+x_{n-s}=\frac{1}{n-s}+\frac{1}{n-s-1}S_s=\frac{1}{n-s}+\frac{1}{n-s-1}\frac{1}{n-s}=\frac{1}{n-(s+1)}.$$

Според принципот на математичка индукција, добиваме дека за секое k важи $S_k=\frac{1}{n-k}$.

2. Да го означиме со $\{x\}$ дробниот дел од бројот x, т.е. $\{x\}=x-[x]$, каде што со $[x]$ е означен целиот дел од x, т.е. најголемиот цел број помал од x. Така на пример

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}, \qquad \{3\}=0, \qquad \left\{\frac{7}{3}\right\}=\left\{2\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}, \text{ итн.}$$

Докажи дека равенката

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$$

нема решение во множеството на рационалните броеви.

Решение. Нека рационалниот број $x=\frac{m}{n}$, каде m и n се ненулти заемно прости цели броеви е решение на дадената равенка. Тогаш од

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1,$$

добиваме

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

од каде што е јасно дека $x+\frac{1}{x}$ е цел број. Да го означиме тој цел број со k, т.е. нека $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=k$. Од овде добиваме $m^2+n^2=kmn$, од каде што следува дека m е делител на n^2 и n е делител на m^2, а бидејќи m и n се заемно прости, тоа е можно ако и само ако $|m|=|n|=1$, т.е. само за $x=\pm 1$. Но, за $x=\pm 1$ важи

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=0.$$

Значи, дадената равенка нема решение во множеството на рационалните броеви.

3. Иста како задача 4 од трета година

4. Иста како задача 3 од трета година