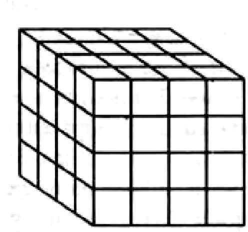
Самоил Малчески
Скопје

РАСЕКУВАЊЕ ОБОЕНА КОЦКА НА ЕДИНЕЧНИ КОЦКИЧКИ



Нека е дадена обоена коцка со раб со должина n сантиметри, $n>1$. Ако со рамнини паралелни на нејзините ѕидови ја расечеме коцката на единечни коцки, т.е. на коцки со должина $1cm$, тогаш ќе добиеме n^3 единечни коцки (на цртежот десно е дадена коцка со раб $4cm$ која е расечена на $4^3=64$ единечни коцки). Притоа, од добиените единечни коцки само коцките кои ги содржат темињата на големата коцка имаат по три обоени ѕидови, што значи дека се добиени 8 единечни коцки со по три обоени ѕидови. Понатаму, по два обоени ѕидови имаат сите коцки кои се наоѓаат на рабовите на големата коцка, но не ги содржат нејзините темиња, што значи дека на секој раб имаме по $n-2$ коцки со по два обоени ѕидови. Големата коцка има 12 рабови, па затоа со расекувањето добивме $12(n-2)$ единечни коцки кои имаат по два обоени ѕидови. Слично, по еден обоен ѕид имаат единичните коцки кои се наоѓаат на надворешните ѕидови, но кои не се на рабовите на големата коцка. На секој ѕид имаме по n^2 единечни коцки и како 4 се во темињата на големата коцка и $4(n-2)$ се преостанатите коцки на рабовите од ѕидот, добиваме дека на секој ѕид имаме по $n^2-4(n-2)-4=(n-2)^2$ единечни коцки кои имаат по еден обоен ѕид. Но, големата коцка има 6 ѕидови, па затоа при расекувањето се добиени $6(n-2)^2$ единечни коцки со по еден обоен ѕид. Конечно, при расекувањето добивме

$$n^3-(8+12(n-2)+6(n-2)^2)=n^3-6n^2+12n-8=(n-2)^3$$

единечни коцки кои немаат ниту еден обоен ѕид. Да резимираме, при расекувањето имаме:

1) 8 единечни коцки со по три обоени ѕида,
2) $12(n-2)$ единечни коцки со по точно два обоени ѕида,
3) $6(n-2)^2$ единечни коцки со по точно еден обоен ѕид,

4) $(n-2)^3$ единечни коцки кои немаат обоен ѕид.

Забелешка. Ако коцка со должина на раб n сантиметри, $n\in\mathbb{N}$, е расечена на единечни коцки и притоа секоја од добиените коцки има барем еден обоен ѕид, тогаш бројот на коцките кои немаат обоен ѕид е еднаков на 0. Според 4) важи $(n-2)^3=0$, од каде следува $n-2=0$, т.е. $n=2$. Значи, при расекувањето се добиени $n^3=2^3=8$ единечни коцки, што според 1) значи дека секоја од добиените коцки има по три обоени ѕида. Понатаму, бидејќи $12(n-2)\neq 8$ заклучуваме дека бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида не може да биде еднаков на бројот на коцките кои имаат обоено точно три ѕида. Слично од $6(n-2)^2\neq 8$ следува дека бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид не може да биде еднаков на бројот на коцките кои имаат обоено точно три ѕида. Од друга страна, од $(n-2)^3=8$ следува $n=4$, што значи дека кај коцката со должина на раб $4\,cm$, при сечењето на единечни коцки бројот на коцките со три обоени ѕида е еднаков на бројот на коцките кои немаат ниту еден обоен ѕид.

Задача 1. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Дали е можно бројот на коцките кои имаат барем еден обоен ѕид да е еднаков на половина од вкупниот број добиени коцки?

Решение. Нека претпоставиме дека одговорот на прашањето е потврден. Тогаш бројот на коцките кои имаат барем еден обоен ѕид е еднаков на бројот на коцките немаат ниту еден обоен ѕид, т.е. на $(n-2)^3$. Но, секоја коцка или има барем еден обоен ѕид или нема ниту еден обоен ѕид, што значи дека при расекувањето се добиени $2(n-2)^3$ единечни коцки. Според тоа, $n^3=2(n-2)^3$, од каде добиваме $\frac{n}{n-2}=\sqrt[3]{2}$, што не е можно бидејќи $\frac{n}{n-2}$ е рационален, а $\sqrt[3]{2}$ е ирационелан број. Конечно, од добиената противречност следува дека бројот на коцките кои имаат барем еден обоен ѕид не може да е еднаков на половина од вкупниот број добиени коцки. ■

Задача 2. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Дали е можно бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида да е еднаков на бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид?

Решение. Бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид е еднаков на $(n-2)^3$, а бројот на коцките кои кои имаат обоено точно два ѕида е еднаков на $12(n-2)$. Ако $(n-2)^3=12(n-2)$, тогаш бидејќи $n-2\neq 0$, добиваме $\frac{n-2}{2}=\sqrt{3}$, што не е можно бидејќи $\frac{n-2}{2}$ е рационален, а $\sqrt{3}$ е ирационален број. Значи, бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида нбе може да е еднаков на бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид. ■

Задача 3. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ е расечена на единечни коцки. Ако бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид е k пати поголем од бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида, докажи дека вкупниот број коцки е куб на парен број.

Решение. Бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид е $6(n-2)^2$, а бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида е $12(n-2)$. Ако $6(n-2)^2=k\cdot 12(n-2)$, тогаш $(n-2-2k)(n-2)=0$, од каде добиваме $n=2$ или $n=2(k+1)$. Според тоа, n е парен број, па затоа вкупниот број коцки е $n^3=2^3$ или $n^3=(2(k+1))^3$, т.е. тој е куб на парен број. ■

Задача 4. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Бројот на коцките кои немаат обоен ѕид е k, $k\in\mathbb{N}$ пати помал од бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида. Определи го бројот k.

Решение. Од условот на задачата следува $k(n-2)^3=12(n-2)$ и како $n-2\neq 0$, добиваме $(n-2)^2=\frac{12}{k}$. Но $k\in\mathbb{N}$, па затоа $\frac{12}{k}\leq 12$. Природни броеви кои се точни квадрати и се помали од 12 се $1=1^2, 4=2^2, 9=3^2$, па затоа:

- $\frac{12}{k}=1$, од каде следува $k=12$,
- $\frac{12}{k}=4$, од каде следува $k=3$,
- $\frac{12}{k}=9$, од каде следува $k=\frac{4}{3}$ и ова не е природен број.

Конечно, единствени решенија се $k=3$ или $k=12$. ■

Задача 5. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Бројот на коцките со точно еден обоен ѕид е k, $k \in \mathbb{N}$ пати поголем од бројот на коцките кои немаат обоен ѕид. Определи го бројот k.

Решение. Од условот на задачата следува $6(n-2)^2 = k(n-2)^3$ и како $n-2 \neq 0$, добиваме $k(n-2) = 6$. Од последното равенство следува $n-2 = \frac{6}{k}$, па како $n \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека $k \mid 6$, односно $k = 1,2,3$ или 6. ■

Задача 6. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Определи го бројот n ако бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид е еднаков на бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида. Колку коцки немаат обоено ниту еден ѕид?

Решение. Од условот на здачата следува $6(n-2)^2 = 12(n-2)$ и како $n-2 \neq 0$, добиваме $n-2 = 2$, односно $n = 4$. Бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид е еднаков на $(n-2)^3 = (4-2)^3 = 2^3 = 8$.

Задача 7. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Определи го вкупниот број единечни коцки, ако бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид е за 50% поголем од бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид.

Решение. Бројот на коцките кои немаат обоено ниту еден ѕид е $(n-2)^3$, а бројот на коцките кои имаат обоено точно еден ѕид е $6(n-2)^2$. Од условот на задачата следува равенството $(n-2)^3 = 1{,}5 \cdot 6(n-2)^2$ и како $n-2 \neq 0$, добиваме $n-2 = 9$, односно $n = 11$. Конечно, вкупниот број единечни коцки е еднаков на $n^3 = 11^3 = 1331$. ■

Задача 8. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Бројот на единечните коцки кои имаат само еден обоен ѕид е k $(k > 1)$ пати помал од бројот на коцките кои имаат точно два обоени ѕида. Определи го k. Колку единечни коцки се добиени во ова расекување?

Решение. Бројот на коцките кои имаат точно еден обоен ѕид е $6(n-2)^2$, а бројот на коцките кои имаат точно два обоени ѕида е $12(n-2)$. Од условот на задачата имаме $12(n-2)=6k(n-2)^2$ и како $n-2\neq 0$, добиваме $k(n-2)=2$. Според тоа, $k|2$ и како $k>1$ следува дека $k=2$. Значи, $2(n-2)=2$, од каде добиваме $n=3$. Конечно, во ова расекување се добиени $n^3=3^3=27$ единечни коцки. ■

Задача 9. Обоена коцка со должина на раб $n\,cm$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$) е расечена на единечни коцки. Бројот на необоените коцки е k пати поголем од бројот на коцките кои имаат точно два обоени ѕида. Определи ја најмалата можна вредност на k, а потоа за така определената вредност k пресметај го бројот на единечните коцки кои имаат точно еден обоен ѕид.

Решение. Бројот на необоените коцки е еднаков на $(n-2)^3$, а бројот на коцките кои имаат обоено точно два ѕида е еднаков на $12(n-2)$. Од условот на задачата следува $(n-2)^3=12k(n-2)$ и како $n-2\neq 0$, добиваме $(n-2)^2=12k$. Последното значи $(n-2)^2=2^2\cdot 3k$, па затоа најмалата можна вредност на k за која $12k$ е точен квадрат е $k=3$. Според тоа, $(n-2)^2=12\cdot 3=36$, од каде добиваме $n-2=6$, односно $n=8$.

Конечно, бројот на коцките кои имаат точно еден обоен ѕид е еднаков на $6(n-2)^2=6\cdot 6^2=216$. ■