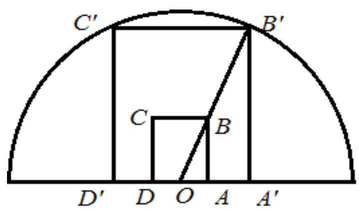
Алија Муминагиќ, Данска
Јенс Карстенсен, Данска

# ПО РЕШЕНИЕТО НА ЕДНА ЗАДАЧА

На часовите по математика јчеста активност на учениците е решавањето задачи. Меѓутоа, малку ученици по успешното решавање на одредена задача, разгледуваат дали истата задача може да ја решат и на друг начин, дали тргнувајќи од дадената задача може да состават нива задача, дали во литературата постојат слични задачи и истите да ги решат. Во следните разгледувања ќе покажеме како по решавањето на дадена задача може да се состави нова задача и иостата да се реши.

**Задача 1.** Во полукружница со радиус $r$ да се впише квадрат.

**Решение.** ***Прв начин.*** *Анализа.* Нека е дадена полукружница $k(O,r)$ и нека во неа е впишан квадрат $A'B'C'D'$ (цртеж десно). На отсечката $OB'$ избираме произволна точка $B$ и од истата повлекуваме нормала на дијаметарот на полукружницата и нека пресечната точка на нормалата и дијаметарот е точката $A$. Над отсечката $AB$ го конструираме квадратот $ABCD$. Сега квадратите $ABCD$ и $A'B'C'D'$ се хомотетични со центар на хомотетија $O$ и коефициент на хомотетија $d=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.




*Конструкција.* Последователно имаме:

- ја конструираме полукружницата $k(O,r)$,
- во внатрешноста на покружницата $k(O,r)$ над нејзиниот дијаметар конструираме квадрат $ABCD$ за кој центарот $O$ е средината на страната $DA$,
- ги повлекувамне правите $OB$ и $OC$ и во пресеците на овие прави со полукружницата ги наоѓаме точките $B'$ и $C'$, соодветно,
- од точките $B'$ и $C'$ повлекуваме нормали на дијаметарот на полукружницата и во пресек на истите со дијаметарот на полукружницата ги определуваме точките $A'$ и $B'$, со што е конструиран бараниот квадрат $A'B'C'D'$.

*Доказ*. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

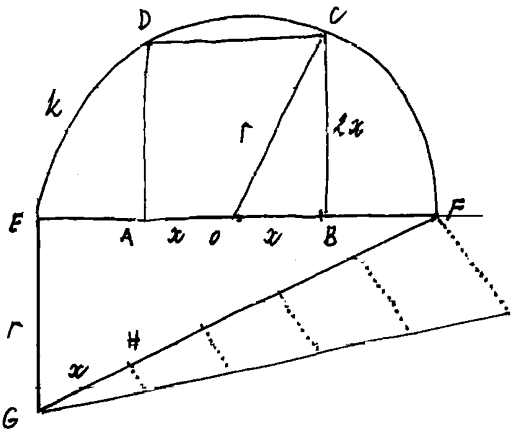
*Дискусија*. Задачата има едно и единствено решение.

***Втор начин.*** *Анализа*. Нека е дадена полукружницата $k(O,r)$ и нека во неа е впишан квадратот $ABCD$ (цртеж долу десно). Нека должината на страната на квадратот е $\overline{AB}=2x$. Јасно, $O$ е средина на страната $AB$, односно $\overline{AO}=\overline{BO}=x$. Од Питагоровата теорема, применета на триаголникот $OBC$, следува $r^2=x^2+(2x)^2$, т.е. $r=x\sqrt{5}$, од каде добиваме $x=\frac{r\sqrt{5}}{5}$.

*Конструкција*. Треба да конструираме отсечка со должина $x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. За та цел прво конструираме отсечка со должина

$$x_1 = r\sqrt{5} = \sqrt{r^2 + (2r)^2},$$

така што во точката $E$ на дијаметарот $EF$ на полукружницата $k(O,r)$ конструираме нормала и на неа ја наоѓаме определуваме точка $G$ таква што $\overline{EG} = r$. Јасно, $\overline{GF} = x_1 = r\sqrt{5}$. Понатаму,



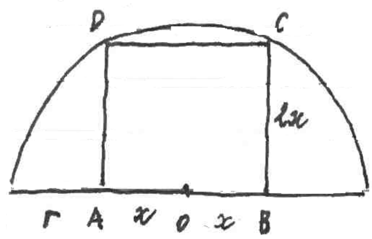

отсечката $GF$ ја делиме на пет еднакви дела и ја добиваме отсечката $\overline{GH} = x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Понатаму, на дијаметарот $EF$ определуваме точки $A$ и $B$ такви што $\overline{AO} = \overline{OB} = x = \frac{r\sqrt{5}}{5}$. Конечно, во точките $A$ и $B$ повлекуваме нормали на дијаметарот и во пресек со полукружницата ги наоѓаме соодветно точките $D$ и $C$, со што бараниот квадрат $ABCD$ е конструиран.

*Доказ*. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

*Дискусија*. Задачата има едно и единствено решение. ■

**Задача 2.** Докажи дека плоштината на квадратот впишан во полукружницата $k(O,r)$ е еднаква на $\frac{2}{5}$ од плоштината на квадратот впишан во кружницата $k'(O,r)$.

**Решение.** ***Прв начин***. Според вториот начин на решавање на задача 1 должината на страната на квадратот $ABCD$ впишан во полукружницата е еднаква на $2x = \frac{2r\sqrt{5}}{5}$. Оттука следува дека неговата плоштина е



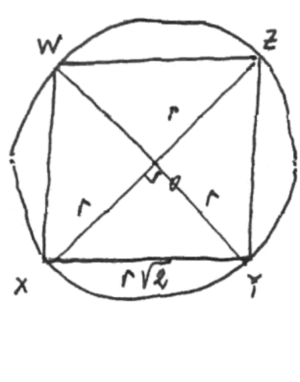

$$P_{\square ABCD} = (2x)^2 = (\tfrac{2r\sqrt{5}}{5})^2 = \tfrac{4r^2}{5}.$$

Според Питагоровљата теорема должината на страната на квадратот $XYZW$, кој е впишан во кружницата $k'(O,r)$ е еднаква на

$$\overline{XR} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2},$$

па затоа неговата плоштина е

$$P_{\square XYZW} = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2.$$



Конечно,

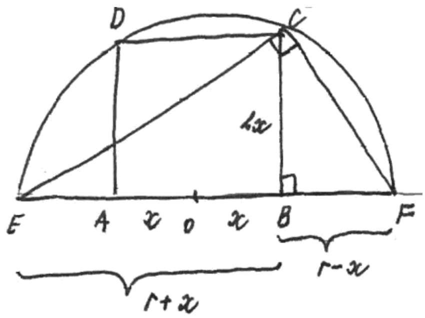
$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}}=\frac{\frac{4r^2}{5}}{2r^2}=\frac{2}{5},$$

што и требаше да се докаже.

***Втор начин.*** Како и при првиот начин на решавање на задачата наоѓаме

$$P_{\square XYZW}=2r^2.$$

Нека $\overline{OE}=\overline{OF}=r$ и $\overline{OA}=\overline{OB}=x$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{EB}=r+x$ и $\overline{BF}=r-x$. Понатаму, правоаголните триаголници $EFC, ECB$ и $CFB$ се слични (зошто), од што следува $\frac{2x}{r+x}=\frac{r-x}{2x}$, т.е. $4x^2=r^2-x^2$, па затоа $x=\frac{r}{\sqrt{5}}$. Според тоа,

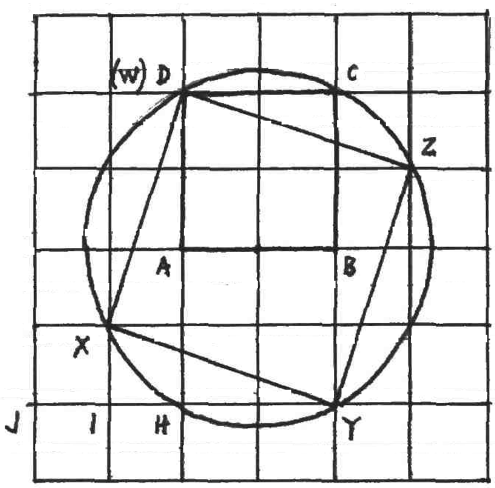



$$P_{\square ABCD}=(2x)^2=(\tfrac{2r}{\sqrt{5}})^2=\frac{4r^2}{5},$$

па затоа

$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}}=\frac{\frac{4r^2}{5}}{2r^2}=\frac{2}{5}.$$

***Трет начин.*** Квадратите $ABCD$ и $XYZW$ ги цртаме во квадратна мрежа: $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JE}=1$, (цртеж десно). Според тоа,




$$P_{\square ABCD}=2^2=4.$$

Понатаму, од правоаголниот триаголник $IXY$ следува:

$$\overline{XY}^2=\overline{IY}^2+\overline{IX}^2=3^2+1^2=10,$$

па затоа

$$P_{\square XYZW}=\overline{XY}^2=10.$$

Конечно,

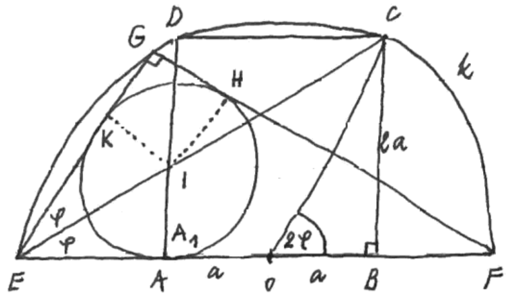
$$\frac{P_{\square ABC}}{P_{\square XYZW}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}. \blacksquare$$

**Задача 3.** Квадрат $ABCDE$ пишан во полукружница ос радиус $EF$. Точката $G$ припаѓа на полукружницата и притоа важи $P_{\square ABCD}=P_{\triangle EFG}$. Докажи дека центарот $I$ на впишаната кружница во $\triangle EFG$ припаѓа на отсечката $AD$.

**Решение.** Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=2a$ и $O$ е центарот на дадената полукружница $k$ со дијаметар $EF$. Нека $\measuredangle BOC=2\varphi$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle FEC=\varphi$ (централен и периферен агол над ист лак).

Нека $G$ е точка на полукружницата таква што $\measuredangle AEG = 2\varphi$ . Триаголниците $EFG$ и $OBC$ се правоаголни и имаат еден еднаков остар агол, па затоа се слични. Сега од $\overline{EF} : \overline{OC} = 2:1$ следува

$$P_{\triangle EFG} = 4P_{\triangle OBC}$$




и бидејќи $P_{\square ABCD} = 4P_{\triangle OBC}$ следува дека $P_{\square ABCD} = P_{\triangle EFG}$ , што значи дека точката $G$ го задоволува условот на задачата.

Да го разгледаме правоаголниот триаголник $OBC$ чии катети се $\overline{OB} = a$ и $\overline{BC} = 2a$ , а хипотенузата е $\overline{OC} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$ . Значи, односот на неговите страни е $1:2:\sqrt{5}$ . Истиот однос важи и за страните на сличниот триаголник $EFG$ , т.е. $\overline{FG} = 2\overline{EG} = 4\overline{OB} = 2\overline{AB} = 4a$ .

Со $H$ и $K$ да ги означиме да ги означиме допирните точки на впишаната кружница во триаголникот $EFG$ , чиј центар е $I$ . Нека $A_1$ е проекцијата на точката $I$ на хипотенузата $EF$ . Тогаш $\overline{EA_1} = \overline{EF}$ и $\overline{AF} = \overline{FH}$ , како тангентни отсечки, па затоа

$$\begin{aligned} 2\overline{A_1O} &= 2(\overline{EO} - \overline{EA_1}) = 2\overline{EO} - 2\overline{EA_1} = (\overline{EF} - \overline{EA_1}) - \overline{EA_1} = \overline{AF} - \overline{EK} \\ &= \overline{FH} - \overline{EK} = \overline{FH} - \overline{EK} + (\overline{GH} - \overline{GK}) = \overline{FH} + \overline{GH} - (\overline{EK} + \overline{GK}) \\ &= \overline{FG} - \overline{GE} = 4a - 2a = 2a = 2\overline{AO}. \end{aligned}$$

Според тоа, $\overline{A_1O} = \overline{AO}$ , па затоа $A_1 \equiv A$ , од што следува дека центарот $I$ на впишаната кружница во $\triangle EFG$ припаѓа на отсечката $AD$ . ■

**Задача 4.** При ознаки како во решението на задача 3, докажи точката $K$ ја дели отсечката $EG$ во однос златен пресек.

**Решение.** Од решениетои на задача 3 следува дека $EC$ е симетрала на $\measuredangle FEG$ , па затоа та минува низ центарот $I$ на впишаната кружница. Да означиме $x = \overline{EA} = \overline{BF}$ . Од правоаголниот триаголник $EFC$ следува

$$\overline{BC}^2 = \overline{EB} \cdot \overline{BF}$$

$$(2a)^2 = (x + 2a)x$$

$$x^2 + 2ax - 4a^2 = 0$$

$$x = (\sqrt{5} - 1)a = 2a\tfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 2a\phi_1.$$

Познато е дека за радиусот на впишаната кружница во триаголникот $EFG$ важи

$$\overline{KG} = R = \frac{1}{2}(\overline{EG} + \overline{FG} - \overline{EF}) = \frac{1}{2}(2a + 4a - 2\sqrt{5}a) = a(3 - \sqrt{5}).$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{KG}}{\overline{EK}} = \frac{r}{x} = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2a\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi_1,$$

што значи дека точката $K$ ја дели отсечката $EG$ во однос златен пресек, што и требаше да се докаже. ■

**Литература**

1. Малчески, Р., Малчески, А. (1995 и 2019). За златниот пресек, Нумерус и Армаганка, Скопје
2. Иванова, А., Велинов, Д. (2018 и 2019). Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус и Армаганка, Скопје