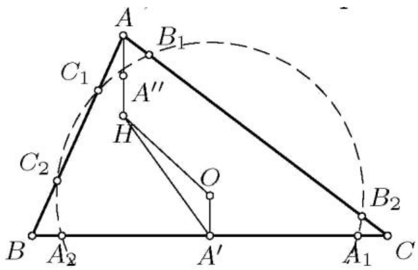
XLIX олимпијада

1. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC. Кружницата со центар во средината на отсечката BC и која минува низ H ја сече правата BC во точките A_1 и A_2. Аналогно, кружницата со центар во средината на отсечката CA и која ја содржи H ја сече правата CA во точките B_1 и B_2, а кружницата со центар во средината на отсечката AB и која ја содржи точката H ја сече правата AB во точките C_1 и C_2. Докажи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ припаѓаат на една кружница.

Решение. *Прв начин*. Нека A' и A'' се соодветно средините на отсечките BC и AH, O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и R е неговиот радиус. Тогаш од правилото на паралелограм применето на паралелограмите $OA'HA''$ и $OA'A''A$ следува



$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'A_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'H}^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{A'A''}^2 + \overline{OH}^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + \overline{OH}^2) .$$

Истиот израз се добива и за отсечките $OA_2, OB_1, OB_2, OC_1, OC_2$, што значи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на кружница со центар во O.

Втор начин. Со A', B', C' да ги означиме средините на отсечките BC, CA, AB, соодветно. Тогаш

$$\overline{CA_1}\cdot\overline{CA_2} = (\overline{CA'} - \overline{A'A_1})(\overline{CA'} + \overline{A'A_1}) = \tfrac{b^2}{4} - \overline{A'H}^2$$

и аналогно

$$\overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2} = \tfrac{a^2}{4} - \overline{B'H}^2 .$$

Бидејќи $CH \perp A'B'$, добиваме

$$\overline{A'H}^2 - \overline{B'H}^2 = \overline{A'C}^2 - \overline{B'C}^2 = \tfrac{b^2 - a^2}{4} ,$$

од каде следува дека

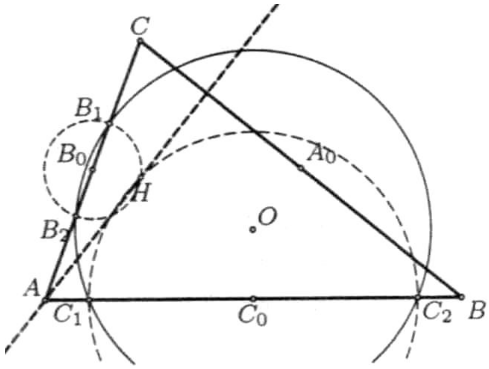
$$\overline{CA_1}\cdot\overline{CA_2} = \overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2} ,$$

што значи дека A_1, A_2, B_1, B_2 припаѓаат на некоја кружница k_c. Аналогно точките A_1, A_2, C_1, C_2 припаѓаат на некоја кружница k_b и точките B_1, B_2, C_1, C_2 припаѓаат на некоја кружница k_a.

Ако кружниците k_a, k_b, k_c се мешусебно различни, тогаш нивните радикални оски по парови се $BC.CA, AB$, што не е можно бидејќи овие прави не припаѓаат на ист прамен. Затоа сите три кружници се совпаѓаат, т.е. точките

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на една кружница.

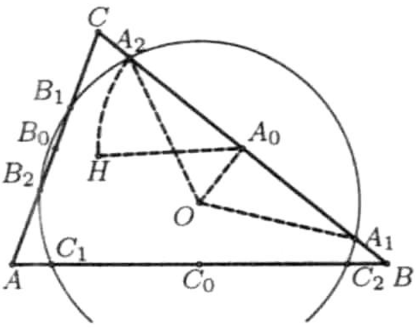
Трет начин. Нека k_B и k_C се кружниците од условот на задачата чии центри се средините на отсечките CA и BA, соодветно. Радикалната оска на овие две кружници е нормална на правата која ги поврзува нивните центри, т.е. нормална е на правата која ја содржи средната линија на $\triangle ABC$ соодветна на



страната BC, па затоа е нормална на BC. Оваа радикална оска ја содржи и точката H, бидејќи кружниците k_B и k_C се сечат во H, па затоа ја содржи висината повлечена кон страната BC. Тоа значи дека точката A припаѓа на оваа радикална оска, па затоа $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}$, од каде следува дека точките B_1, B_2, C_1, C_2 се конциклични. Центарот на кружницата која ги содржи овие точки припаѓа на симетралите на отсечките B_1B_2 и C_1C_2, па како тие се совпаѓаат со симетралите на отсечките AC и AB следува дека овој центар се совпаѓа со центарот O на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Оттука следува дека $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{OC_1} = \overline{OC_2}$.

Аналогно се докажува дека $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$, од каде што следува тврдењето на задачата.

Четврт начин. Нека A_0 е средина на отсечката BC. Дадената конфигурација ја сместуваме во комплексна рамнина така што центарот O на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е координатниот почеток, опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е единична и нека точките $A, B, C, H, A_0, A_1, A_2$ имаат афикси



$a, b, c, h, a_0, a_1, a_2$, соодветно. Тогаш $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, $h = a + b + c$ и $a_0 = \frac{b+c}{2}$.

Од правоаголните триаголници OA_1A_0 и OA_0A_2 следува

$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{OA_0}^2 + \overline{A_0A_1}^2 = \overline{OA_0}^2 + \overline{A_0H}^2$$
$$= \tfrac{b+c}{2} \cdot \overline{\tfrac{b+c}{2}} + (a + b + c - \tfrac{b+c}{2}) \cdot \overline{(a + b + c - \tfrac{b+c}{2})}$$
$$= a\bar{a} + \tfrac{b\bar{b}}{2} + \tfrac{c\bar{c}}{2} + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a}{2} = 2 + \tfrac{a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c+c\bar{a}+\bar{c}a}{2}.$$

Последниот израз е симетричен по a,b,c, па со циклична замена на промен-ливите се добива $\overline{OA_1}^2=\overline{OA_2}^2=\overline{OB_1}^2=\overline{OB_2}^2=\overline{OC_1}^2=\overline{OC_2}^2$, што значи дека точките A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 се концикллични.

2. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1 \tag{1}$$

за секои реални броеви x,y,z такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x,y,z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

Решение. *Прв начин.* а) Воведуваме смена $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и условот на задачата го добива обликот $a+b+c=ab+bc+ca+1$, а неравенството (1) го добива обликот

$$a^2+b^2+c^2\ge 1. \tag{2}$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+2\\&=(a+b+c-1)^2+1\ge 1,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$.

б) Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу тројки $a,b,c\in\mathbb{Q}$ такви што $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$. Ако во второто равенство замениме $c=1-a-b$ добиваме $a^2+ab+b^2-a-b=0$. Во последното равенство земаме $b=ta$ и истото го добива обликот $(t^2+t+1)a^2=(t+1)a$, од каде наоѓаме $a=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сега, $c=1-a-b=\frac{-t}{t^2+t+1}$. Според тоа, за

$$(a,b,c)=(\frac{t+1}{t^2+t+1},\frac{t^2+t}{t^2+t+1},\frac{-t}{t^2+t+1})$$

важи знак за равенство за секој $t\in\mathbb{Q}$.

Втор начин. Нека $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$ и $s_1=x+y+z, s_2=xy+yz+zx$ и $s_3=xyz=1$. Тогаш

$$0\ne(x-1)(y-1)(z-1)=s_3-s_2+s_1-1=s_1-s_2,$$

$$abc = \frac{xyz}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{1}{s_1-s_2},$$
$$ab+bc+ca = \frac{xy(z-1)+yz(x-1)+zx(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{3-s_2}{s_1-s_2},$$
$$a+b+a = \frac{x(y-1)(z-1)+y(z-1)(x-1)+z(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{3-2s_2+s_1}{s_1-s_2},$$

па затоа a,b,c се корени на полнимот

$$P(t) = (s_1-s_2)t^3 - (3-2s_2+s_1)t^2 + (3-s_2)t - 1,$$

кој е од трет степен бидејќи $s_1 - s_2 \neq 0$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (\tfrac{3-2s_2+s_1}{s_1-s_2})^2 - 2\cdot\tfrac{3-s_2}{s_1-s_2} \\ &= 1 + \tfrac{(3-s_2)^2}{(s_1-s_2)^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Со тоа е докажано бараното неравенство, а знак за равенство важи ако и само ако $s_3 = xyz = 1$ и $3 = s_2 = xy+yz+zx$ Следува $yz = \frac{1}{x}$ и $y+z = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$, па затоа y и z се корени на равенката $t^2 - (\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})t + \frac{1}{x} = 0$. За рационални x тие се рационални ако е дискриминантата на оваа е точен квадрат на рационален број, т.е. $(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})^2 - \frac{4}{x} = \frac{(x-1)^2(1-4x)}{x^4}$ е точен квадрат на рационален број, а тоа е на пример за $1-4x = q^2$ за $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ (бидејќи $x \neq 0$ различните $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$ даваат различни x, па на овој начин се добиваат бесконечлно многу барани тројки).

3. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што бројот n^2+1 има прост делител поголем од $2n+\sqrt{2n}$.

Решение. Како што знаеме, постојат бесконечно многу прости броеви од облик $p = 4k+1, k \in \mathbb{N}$ и дека за секој таков број p важи $(\frac{-1}{p}) = 1$, што значи дека постои точно еден природен број n, $n < \frac{p-1}{2}$ таков што $n^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Тогаш n^2+1 има прост делител p поголем од $2n$. Ќе докажеме дека за $p > 20$ всушност важи $p > 2n+\sqrt{2n}$.

Нека $k = p-2n$. Од $p \mid (2n)^2+4 \equiv k^2+4 \,(\mathrm{mod}\, p)$ и $k \geq \sqrt{p-4} > 4$ следува дека $k^2 \geq p-4 = 2n+k-4 > 2n$. Затоа, $p = 2n+k > 2n+\sqrt{2n}$ и $p \mid n^2+1$.

4. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}, \qquad (1)$$

за секои позитивни реални броеви x, y, z, w такви што $wx = yz$.

Решение. Ако во (1) земеме $x = y = z = w$, добиваме $f(x^2) = f(x)^2$, за секој $x > 0$, па ако во последната равенка земеме $x = 1$ наоѓаме $f(1) = 1$. Сега за $w = 1, y = z = \sqrt{x}$ од (1) следува

$$\frac{1+(f(x))^2}{2f(x)}=\frac{1+x^2}{2x},$$

што е еквивалентно со

$$(f(x)-x)(f(x)-\tfrac{1}{x})=0,$$

т.е. $f(x)\in\{x,\frac{1}{x}\}$, за секој $x > 0$.

Нека претпоставиме дека за некои $x, w \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$ важи $f(x) = x$ и $f(w)=\frac{1}{w}$. Ако земеме $y = z = \sqrt{wx}$, тогаш од (1) следува

$$\frac{\frac{1}{w^2}+x^2}{2f(wx)}=\frac{w^2+x^2}{2wx}.$$

Меѓутоа, за $f(wx) = wx$ од последната равенка следува $w = 1$, а за $f(wx)=\frac{1}{wx}$ повторно од последната равенка следува $x = 1$, што е противречност. Според тоа, $f(x) = x$, за секој $x > 0$ или $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x > 0$. Лесно се проверува дека овие функции ја задоволуваат равенката (1).

5. Нека се n и k природни броеви такви што $k > n$ и $k - n$ е парен број. Дадени се $2n$ сијалици означени со броевите $1,2,...,2n$; секоја од кои може да биде запалена или изгасната. На почетокот сите сијалици се изгаснатаи. Разгледуваме низи од чекори: во секој чекор се менува состојбата на точно една сијалица (запалена станува изгасната, а изгасната - запалена).

Нека N е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n се запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати.

Нека M е бројот на такви низи од k чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до n запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати и притоа ниту еднаш не е променета состојбата на сјалиците од $n+1$ до $2n$.

Пресметај $\frac{N}{M}$.

Решение. Низата чекори после која сите сијалици од 1 до n се запалени, а останатите се изгаснати ја нарекуваме *допустлива*. Ако притоа сијалиците од $n+1$ до $2n$ не ја менувале состојбата, тогаш низата ја нарекуваме *строга*. Значи, има N допустливи низи, од кои M се строги. Јасно, $M, N > 0$. Секоја допустлива низа, на секоја сијалица од 1 до n и ја менува состојбата непарен број пати, а на секоја од останатите сијалици парен број пати.

Набљудуваме строга низа чекори P. Нека со неа сијалицата i $(1 \le i \le n)$ ја менувала состојбата m_i пати. Притоа важи $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$. Ако за секој i избереме парен број од овие m_i чекори и ги замениме во чекорите на сијалицата $n+i$, добиваме допустлива низа чекори. За дадено i, овие чекори може да се изберат на $2^{m_i - 1}$ начини (толку има подмножества на m_i-елементно множество со парен број елементи). Вкупно, со оваа постапка од строга низа чекори P можеме да направиме допустлива низа на точно $\prod_{i=1}^{n} 2^{m_i - 1} = 2^{k-n}$ начини.

Од друга страна, секоја допустлива низа чекори може да се добие само од една строга низа (онаа која се добива кога сите чекори на било која сијалица j за $j > n$ се заменат со чекор на сијалицата $j - n$), и тоа на само еден начин. Според тоа, вака е конструирано “$1 \leftrightarrow 2^{n-k}$” пресликување меѓу строгите и допустливите низи чекори. Затоа $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$.

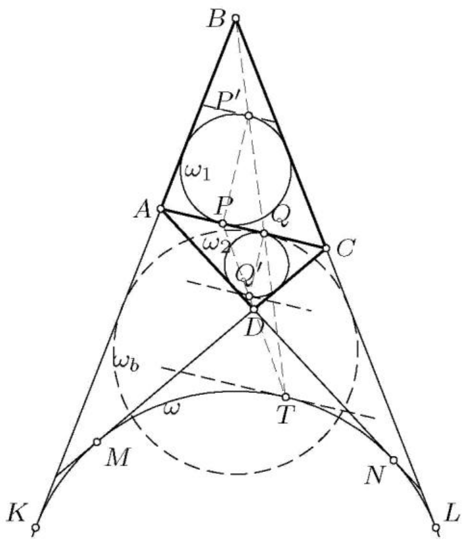
6. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник кај кој $\overline{BA} \ne \overline{BC}$. Нека ω_1 и ω_2 се впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница ω која ја допира полуправата BA по точката A и полуправата BC по точката C, а која истовремено ги допира и правите AD и CD. Докажи дека надворешните заеднички тангенти на кружниците ω_1 и ω_2 се сечат на ω.

Решение. *Прв начин*. Нека ω ги допира правите AB, BC, CD, DA соодветно во точките K, L, M, N. Тогаш

$$\begin{aligned} \overline{BA} + \overline{AD} &= \overline{BA} + \overline{AN} - \overline{DN} \\ &= \overline{BK} - \overline{DN} \\ &= \overline{BL} - \overline{DM} \\ &= \overline{BC} + \overline{CM} - \overline{DM} \\ &= \overline{BC} + \overline{CD}. \end{aligned}$$

Тоа значи дека ако со P и Q ги означиме допирните точки соодветно на ω_1 (со центар во O_1) и ω_2 (со центар во O_2) со AC, тогаш важи

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AD}}{2} = \overline{CQ}.$$



Со други зборови, припишаната кружница ω_b наспроти B во триаголникот ABC ја допира AC точно во точката Q.

Разгледуваме хомотетија χ_B со центар во B која кружницата ω_b ја пресликува во кружницата ω и да означиме $T=\chi_B(Q)$. Сега точката P' дијаметрално спротивна на точката P на ω_1 лежи на правата BQ, а точката Q' дијаметрално спротивна на точката Q на ω_2 лежи на правата DP (Зошто?). Тангентите во P', Q' и T соодветно на ω_1, ω_2 и ω се прави паралелни со правата AC. Следува дека хомотетијата со центар D која ω_2 ја пресликува во ω ја пресликува точката Q' во точката T, па затоа точките T, D, Q', P се колинеарни. Значи, правите $P'Q$ и PQ' се сечат во точката T, па како е $PP' \| QQ'$, точката T е центар на хомотетија која ω_1 ја пресликува во ω_2, од каде следува тврдењето на задачата.