Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1997/98 година

ГЕОМЕТРИЈСКА МЕСТА ТАЧАКА

Драган Машуловић, Нови Сад

Наћи геометријско место тачака (краће: г. м. т.) које имају геометријску особину Φ значи одредити такав скуп тачака $\mathcal{H}$ (у равни или простору) да је $M \in \mathcal{H}$ ако и само ако $\Phi(M)$ (са $\Phi(M)$ означавамо да тачка M има тражену особину). При томе се инсистира да скуп $\mathcal{H}$ буде некако "геометријски" описан. Задаци овог типа се решавају у два корака:

1. Прво некако погодимо решење (ту се посматрају гранични случајеви, или се посматра механички модел или се, просто, дуго размишља о проблему, па нам одједном "сине") и претпоставимо шта је скуп $\mathcal{H}$ (хипотеза—одатле ознака).

2. Потом докажемо да је $\mathcal{H}$ доиста тражени скуп тачака. Доказ има два дела: ($\Rightarrow$) ако је $M \in \mathcal{H}$, онда је $\Phi(M)$, и ($\Leftarrow$) ако је $\Phi(M)$ онда је $M \in \mathcal{H}$.

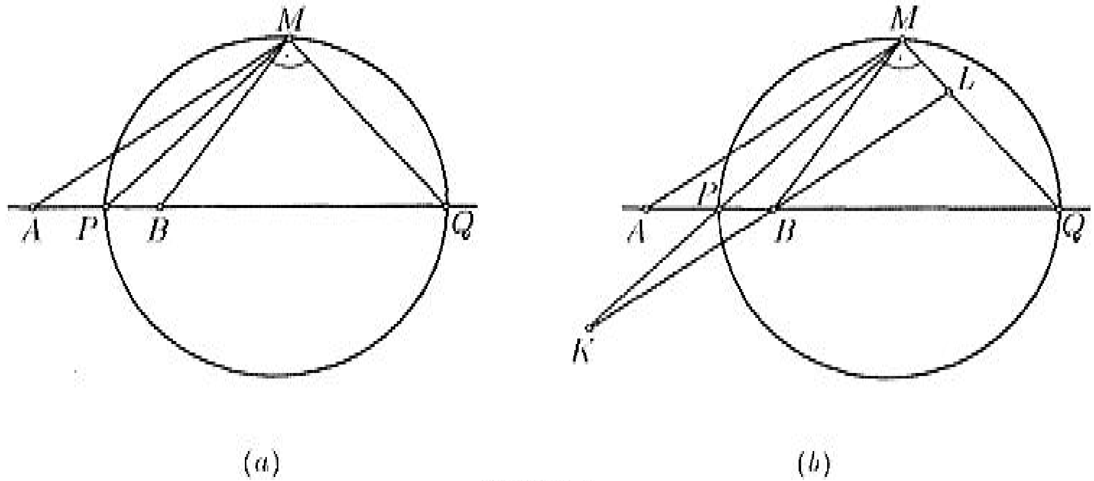
Згодно је знати да у оном делу еуклидске планиметрије који нас интересује, а то је "геометрија кружница и правих", г. м. т. може бити само једна од следећих фигура:

- празан скуп,
- коначан скуп тачака,
- дуж, полуправа, права,
- кружница, кружни лук,
- унија неких претходних фигура, или
- део равни ограничен неком од наведених фигура.

Тиме се мало олакшава утврђивање хипотезе. (Наравно, ситуација се драстично компликује када се у игру укључе и други конусни пресеци; тада се проблем утврђивања одговарајућег геометријског места тачака углавном решава коришћењем средстава аналитичке геометрије, чиме се у овом чланку нећемо бавити.)

Претпостављамо да су читаоцу већ позната нека класична геометријска места тачака:

- г. м. т. које су на датом растојању од дате тачке (кружница),
- г. м. т. које су на истом растојању од две дате тачке (симетрала дужи),
- г. м. т. које су на истом растојању од две дате праве (уколико су дате праве паралелне, г. м. т. је "права на средини", а ако се дате праве секу, г. м. т. је унија две праве – то су симетрале два пара унакрсних углова које образују дате праве),
- г. м. т. из којих се дата дуж види под датим углом (унија два кружна лука).



Слика 1

Прво ћемо на једном класичном примеру и једном мање класичном показати како се решавају задаци са г. м. т., а онда ћемо показати две згодне групе идеја.

Пример 1. *Дате су две утврђене тачке, A и B. Наћи г. м. тачака M таквих да је $[MA]:[MB]=a:b$, где су a и b дате неподударне дужи.*

Решење. Нека су P и Q тачке праве AB такве да је $[PA]:[PB]=[QA]:[QB]=a:b$ и $(A-P-B-Q)$ (распоред $(Q-A-P-B)$ се разматра аналогно). Тачке P и Q свакако припадају траженом г. м. т. и сасвим је јасно да ниједна друга тачка праве AB не припада том скупу. Значи, $\mathcal{H}$ је нешто што сече праву AB у две тачке. *Како није разумно претпоставити да се ради о коначном скупу*, највероватније се ради о кружници. С друге стране, ако је у питању кружница, мора бити симетрична у односу на праву AB јер нема основа да се претпостави да је скуп тражених тачака са једне стране праве AB битно другачији од скупа тражених тачака које су са друге стране праве.

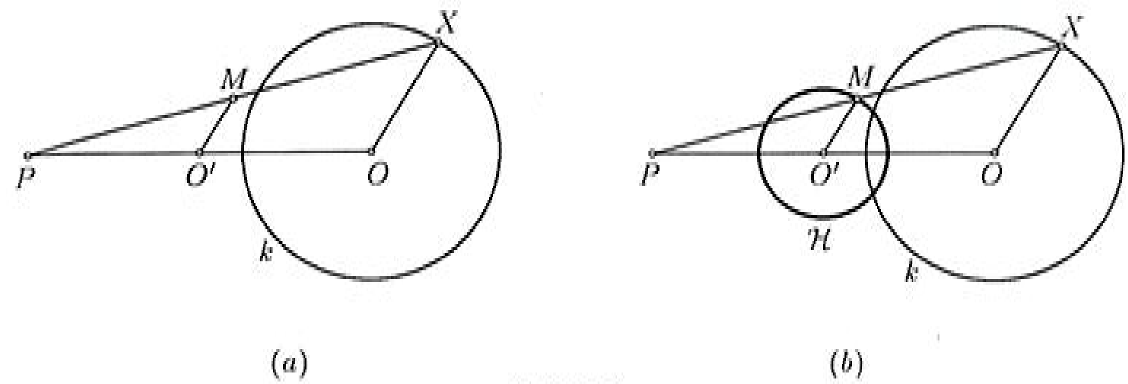
Ставимо зато да је $\mathcal{H}$ кружница чији пречник је $[PQ]$ (слика 1(a)) и покажимо да је то тражено г. м. т.

Нека је M тачка равни таква да је $[MA]:[MB]=a:b$. Како је $[PA]:[PB]=[QA]:[QB]=a:b$, то је $[MA]:[MB]=[PA]:[PB]=[QA]:[QB]$, па је полуправа $[MP)$ симетрала угла $\angle AMB$, а полуправа $[MQ)$ симетрала спољашњег угла за $\angle AMB$. Јасно је да је $MP\perp MQ$. Зато M припада кружници чији пречник је $[PQ]$, тј. $M\in\mathcal{H}$.

Обрнуто, нека је $M\in\mathcal{H}$. Повуцимо кроз B праву паралелну са AM која сече праву MP у K, а праву MQ у L (слика 1(b)). Због $\Delta QMA\sim\Delta QLB$ је $[MA]:[LB]=[QA]:[QB]=a:b$. Због $\Delta PMA\sim\Delta PKB$ је $[MA]:[KB]=[PA]:[PB]=a:b$. Овим смо показали да је $[MA]:[LB]=[MA]:[KB]$, па је $[LB]\cong[KB]$, тј. B је средиште дужи $[KL]$. Због $M\in\mathcal{H}$ је $\angle KML=\angle PMQ=90^\circ$. Дакле, $[MB]$ је тежишна дуж у правоуглом троуглу ΔKML, па је $[MB]\cong[LB]$. Како је $[MA]:[LB]=a:b$ и $[MB]\cong[LB]$, то је $[MA]:[MB]=a:b$. □

Кружница која се добија као решење овог задатка се зове Аполонијева кружница (по старогрчком математичару Аполонију из Перге, 262–180 п. н. е.).

Пример 2. Нека су α и β дате полуравани и нека је C дата тачка. Одредити



Слика 2

г. м. тачака A са следећом особином: $A \in \alpha$ и постоји тачка $B \in \beta$ таква да су A, B и C темена једнакостраничног троугла.

Решење. Претпоставимо да имамо један такав троугао. Тада се ротацијом око тачке C за угао 60° или за угао -60° (у зависности од оријентације троугла $\triangle ABC$) тачка B пресликава на тачку A. Сада је лако закључити како се може доћи до свих кандидата за тачку A: заротирамо полураван β око тачке C прво за угао од 60°, а потом за угао од -60°. Тражено г. м. т. се добија у пресеку равни α са новонасталим полуравнима.

Запишимо ово и формалније. Нека је са ϱ_C^+ означена ротација око тачке C за угао 60°, а са ϱ_C^- ротација око тачке C за угао -60°. Користећи основне особине ротације лако се показује да је $\mathcal{H} = (\alpha \cap \varrho_C^+(\beta)) \cup (\alpha \cap \varrho_C^-(\beta))$ тражено г. м. т. (У оп стем случају, $\mathcal{H}$ је унија два угла.) □

Употреба хомотетије

Понекад се тражено геометријско место тачака може веома лако описати као хомотетична слика неког објекта. Тада се решење задатка своди на коришћење основних особина хомотетије. Погледајмо примере (са h_S^k је означена хомотетија са центром S и коефицијентом k).

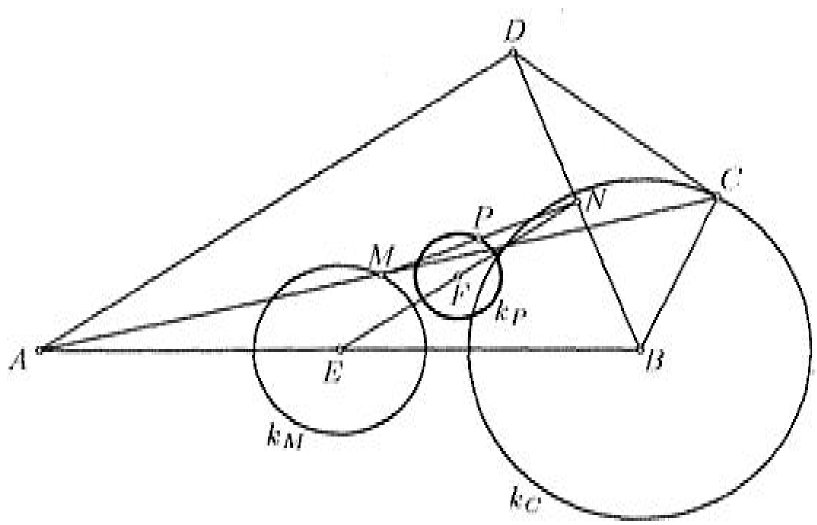
Први пример ћемо решити на два начина: "обично", без употребе хомотетије, а потом помоћу хомотетије. Видећемо колико је друго решење елегантније. Наравно, све има своју цену: друго решење користи компликованији апарат (а то је апарат геометријских трансформација) што га чини апстрактнијим.

Пример 3. Дата је тачка P, кружница k и променљива тачка X на кружници k. Одредити г. м. средишта дужи $[PX]$.

Прво решење. Нека је k кружница са центром O и полупречником r и нека је O' средиште дужи $[PO]$. Покажимо да је $\mathcal{H} = \mathcal{K}(O', r/2)$ тражено г. м. т.

Нека је $X \in k$ и нека је M средиште дужи $[PX]$, слика 2(a). Тада је $[O'M]$ средња линија у $\triangle PXO$, па је $[O'M] \cong \frac{1}{2}[OX] \cong r/2$. Због тога је $M \in \mathcal{H}$.

Обрнуто, нека је $M \in \mathcal{H}$, слика 2(b). Уочимо полуправу ℓ са почетком у O која је паралелна и исто оријентисана са полуправом $[O'M)$. Нека полуправа ℓ



Слика 3

сече кружницу k у тачки X. Због $[PO'] : [PO] = [O'M] : [OX] = 1 : 2$ и због подударности углова $\angle PO'M$ и $\angle POX$ имамо да су троуглови $\triangle PO'M$ и $\triangle POX$ слични. На основу тога закључујемо да су тачке P, M и X колинеарне и да је $[PM] : [PX] = 1 : 2$. Дакле, M је средиште дужи $[PX]$ за неку тачку $X \in k$. □

Друго решење. Покажимо да је $\mathcal{H} = h_P^{\frac{1}{2}}(k)$ тражено г. м. т.

Нека је $X \in k$ и нека је M средиште дужи $[PX]$. Тада је $M = h_P^{\frac{1}{2}}(X)$, па је $M \in h_P^{\frac{1}{2}}(k) = \mathcal{H}$.

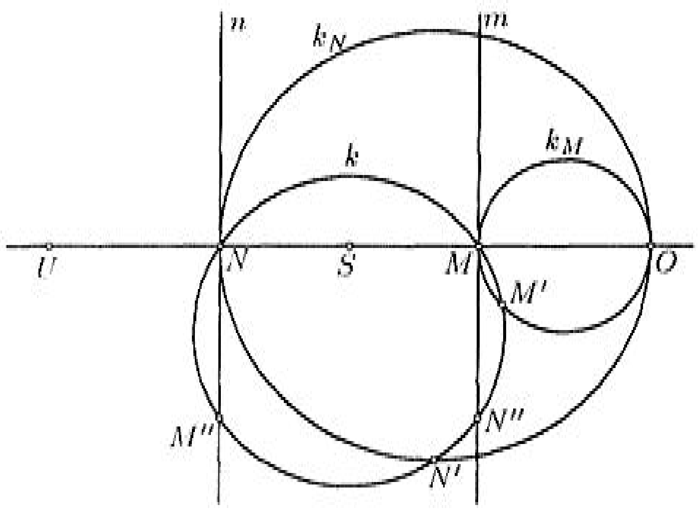
Обрнуто, нека је $M \in \mathcal{H} = h_P^{\frac{1}{2}}(k)$. То значи да постоји $X \in k$ такво да је $M = h_P^{\frac{1}{2}}(X)$, тј. M је средиште дужи $[PX]$ за неко $X \in k$. □

Размотримо још један, нешто компликованији пример.

Пример 4. У (не нужно простом) четвороуглу $ABCD$ темена A, B и D су фиксирана, док је теме C променљиво, али је при томе страна $[BC]$ тог четвороугла константне дужине a. Ако је M средиште дијагонале $[AC]$, а N средиште дијагонале $[BD]$, одредити г. м. средишта P дужи $[MN]$.

Решење. Зато што је страна $[BC]$ константне дужине, тачка C припада кружници $k_C = \mathcal{K}(B, a)$. Одредимо, прво, г. м. тачака M. Према претходном примеру, јасно је да је то $h_A^{\frac{1}{2}}(k_C)$. Ако са E означимо средиште дужи $[AB]$, тада је $h_A^{\frac{1}{2}}(k_C)$ управо кружница $k_M = \mathcal{K}(E, a/2)$.

Тачка M пролази кружницом k_M, а тачка N је фиксирана. Користећи поново претходни пример, видимо да је г. м. тачака P управо $h_N^{\frac{1}{2}}(k_M)$. Ако са F означимо средиште дужи $[EN]$, онда је $h_N^{\frac{1}{2}}(k_M) = \mathcal{K}(F, a/4)$. Дакле, тражено г. м. т. је кружница са центром у тачки F и полупречником $a/4$. □



Слика 4

Употреба инверзије

Често уопште није пријатно покушати одредити г. м. т. онако како смо то до сада радили. Ако у задатку има "превише кружница" или се јављају нормалне кружнице, понекад се г. м. т. може наћи тако што се цела конфигурација преслика неком лукаво одабраном инверзијом ψ, и тако пређе на нови проблем. При томе се треба трудити да се инверзијом "исправе" најнепријатније постављене кружнице.

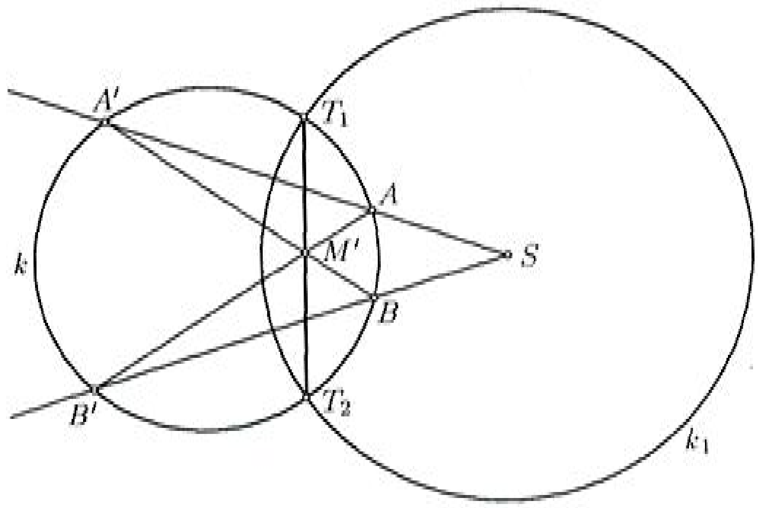
Ако имамо среће (или искуства ⌣̈), нови проблем ће имати једноставније решење. Решење полазног проблема је тада скуп $\psi(\Gamma)$, где је Γ решење новог (инверзног) проблема.

Пример 5. У равни је дата кружница k и тачка O у спољашњости кружнице k. Променљива права кроз O сече кружницу k у тачкама M и N. Кружнице са пречницима $[OM]$ и $[ON]$ секу по други пут кружницу k у тачкама M' и N', редом. Одердити г. м. т. пресека правих MN и $M'N'$.

Решење. Нека је k_0 кружница са центром O која је нормална на k (она није нацртана на слици), а ψ инверзија у односу на k_0, слика 4. Погледајмо која се конфигурација добија када полазну конфигурацију пресликамо инверзијом ψ.

Како је $\psi(k) = k$ и како тачке O, M и N леже на истој правој (то је она променљива права), имамо да је $\psi(M) = N$ и $\psi(N) = M$. Нека је k_M кружница са пречником $[OM]$. Она садржи центар инверзије, тачку M и нормална је на праву MN. Зато је $\psi(k_M)$ права која садржи тачку N и нормална је на праву MN. Означимо ту праву са n. Слично, нека је k_N кружница са пречником $[ON]$. Као за k_M се добије да је $\psi(k_N)$ права која садржи тачку M и нормална је на праву MN. Означимо ову праву са m.

Нека је $M'' = \psi(M')$ и $N'' = \psi(N')$. Погледајмо где су тачке M'' и N''. Како је $M' \in k_M \cap k$, то је $\psi(M') \in \psi(k_M) \cap \psi(k) = n \cap k$. Дакле, тачка M'' је друга тачка пресека праве n и кружнице k. Слично, тачка N'' је друга тачка пресека праве m и кружнице k.



Слика 5

$\psi(MN) = MN$, а $\psi(M'N') = \mathcal{K}(O, M'', N'')$ зато што права $M'N'$ не садржи центар инверзије. Према томе, тачка пресека правих MN и $M'N'$ се пресликава на другу тачку пресека праве MN и кружнице $\mathcal{K}(O, M'', N'')$. Како је $[MN''] \cong [NM'']$ (а то је зато што је $m \perp MN$ и $n \perp MN$), друга тачка пресека праве MN и кружнице $\mathcal{K}(O, M'', N'')$ је тачка U која је централно симетрична тачки O у односу на средиште дужи $[MN]$, тј. $U = \sigma_S(O)$, где је S средиште дужи $[MN]$. Сада је проблем сведен на овај:

> *Дата је кружница k и у њеној спољашњости тачка O. Променљива права кроз O сече кружницу k у тачкама M и N. Одредити г. м. тачака U које су централно симетричне тачки O у односу на средиште дужи $[MN]$.*

Нека су $[OT_1]$ и $[OT_2]$ тангентне дужи из O на k и нека је C центар кружнице k. Нека је ℓ кружни лук T_1CT_2. Лако се показује да је г. м. тачака U баш лук $\ell_1 = h_O^2(\ell)$. На основу тога, решење почетног проблема је скуп $\psi(\ell_1)$. □

Пример 6. Дата је кружница k са центром O и тачка S у спољашњости кружнице k. Праве a и b су променљиве праве које пролазе кроз S и секу кружницу k. Нека је $a \cap k = \{A, A'\}$ и $b \cap k = \{B, B'\}$ тако да је $(S - A - A')$ и $(S - B - B')$. Кружнице $\mathcal{K}(S, A', B)$ и $\mathcal{K}(S, A, B')$ се секу по други пут у тачки M. Одредити г. м. тачака M.

Решење. Нека је k_1 кружница са центром S која је ортогонална на k. Нека је ψ инверзија у односу на k_1. Пресликамо целу конфигурацију инверзијом ψ. Кружница k се пресликава на себе, права AA' се пресликава на себе и права BB' се пресликава на себе. Зато је $\psi(A) = A'$ и $\psi(B) = B'$. Кружница $\mathcal{K}(S, A', B)$ се пресликава на праву, и то на праву AB'. Слично, $\mathcal{K}(S, A, B')$ се пресликава на $A'B$. Зато се тачка M пресликава на тачку M' која је пресек правих AB' и $A'B$. Тако смо проблем свели на следећи:

Дата је кружница k са центром O и тачка S у спољашњости кружнице k. Праве a и b су променљиве праве које пролазе кроз S и секу кружницу k. Нека је $a \cap k = \{A, A'\}$ и $b \cap k = \{B, B'\}$ тако да је $(S - A - A')$ и $(S - B - B')$. Праве $A'B$ и AB' се секу у тачки M'. Одредити г. м. тачака M'.

Проблем је сада сведен на једноставнији ("исправили" смо две кружнице). Г. м. тачака M' је дуж $[T_1T_2]$, где су $[ST_1]$ и $[ST_2]$ тангентне дужи из S на k. Сада када знамо да је решење инверзног проблема дуж $[T_1T_2]$, решење полазног проблема је $\psi([T_1T_2])$. □

Задаци

1. Наћи г. м. средишта тетива дате кружнице које су подударне датој дужи p.
2. Наћи г. м. средишта тетива дате кружнице које садрже дату тачку S у унутрашњости кружнице.
3. Дате су нормалне праве a и b и дуж p. Одредити г. м. средишта дужи $[AB]$ таквих да је $A \in a$, $B \in b$ и $[AB] \cong p$.
4. На кружници k дате су две утврђене тачке A и B и променљива тачка C која пролази кружницом. Наћи г. м. центара кружница уписаних у $\triangle ABC$.
5. Дати су кружница k, права p која је додирује и тачка M на правој p. Одредити г. м. тачака P за које постоје тачке Q и R на правој p такве да је M средиште дужи $[QR]$ и да је k кружница уписана у троугао $\triangle PQR$.
6. Дата је тачка P, кружница k и променљива тачка X на кружници k. Одредити г. м. тачака M на таквих да је $[PM] : [PX] = a : b$, где су a и b две дате дужи.
7. Наћи г. м. темена C троугла $\triangle ABC$ ако су темена A и B фиксирана, а тежишна линија $[AD]$ је подударна датој дужи p.
8. На кружници k дате су две утврђене тачке, A и B, и променљива тачка C која пролази кружницом. Наћи г. м. тежишта $\triangle ABC$.
9. Дате су тачке A, B и C. Одредити г. м. других тачака пресека међусобно ортогоналних променљивих кружница k_1 и k_2, при чему k_1 пролази кроз тачке A и C, а k_2 кроз тачке B и C.
10. Дата је кружница k и на њој тачке A и B. Променљиве кружнице k_1 и k_2 су узајамно нормалне, k_1 додирује k у тачки A, а k_2 додирује k у тачки b. Одредити г. м. т. пресека кружница k_1 и k_2.