Сојузен натпревар 1972

II година

1. Нека a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 се реални броеви такви што

$$b_1b_2b_3 \neq 0,\ a_1b_1+2a_2b_2+a_3b_3=0,\ a_1a_3-a_2^2>0.$$

Докажи дека

$$b_1b_3-b_2^2<0.$$

Решение. Ако $b_1b_3<0$, тогаш $b_1b_3-b_2^2<0$. Ако $b_1b_3>0$, тогаш воведуваме ознаки $x=-a_2b_2$, $y=x-a_1b_1$ и добиваме

$$a_1b_1=x-y,\ a_3b_3=x+y,\ a_1=\frac{x-y}{b_1},\ a_3=\frac{x+y}{b_3}$$

и

$$0<a_1a_3-a_2^2=\frac{x^2-y^2}{b_1b_3}-\frac{x^2}{b_2^2}=\frac{x^2(b_2^2-b_1b_3)-y^2b_2^2}{b_2^2b_1b_3},$$

па затоа $b_2^2-b_1b_3>0$, т.е. $b_1b_3-b_2^2<0$.

2. Реши ја равенката

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=a,$$

каде a е релаен параметар.

Решение. Левата страна на дадената равенка може да се трансформира на следниов начин:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}&=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\\&=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|\\&=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & x\geq 2,\\ 2, & 1\leq x<2.\end{cases}\end{aligned}$$

Оттука следува:

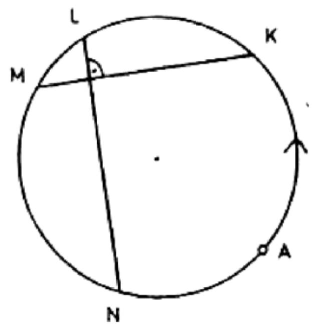
1) ако $a>2$, тогаш равенката има единствено решение $x=1+\frac{a^2}{4}$,
2) ако $a=2$, решенија на равенката се сите реални брови x такви што $1\leq x<2$,
3) ако $a<2$, равенката нема решение.

3. а) Нека се A, K, L, M, N точки на една ориентирана кружница. Докажи дека тетивите KM и LN се нормални ако и само ако $AK+AM=AL+AN\pm\pi$, каде со XY е означена мерката на лакот XY изразена во радијани.

б) Нека A, B, C, D се произволни точки на една кружница., а K, L, M, N се средини на лаците AB, BC, CD, DA. Докажи дека тетивите KM и LN се нормални.

Решение. а) Заради определеност да претпоставиме дека кружницата е позитивно ориентирана. Во тој случај ќе докажеме дека тетивите KM и NL се заемно нормални ако и само ако важи

$$AK + AM = AL + AN - \pi . \qquad (1)$$



Случајот на негативно ориентирана кружница се разгледува аналогно.

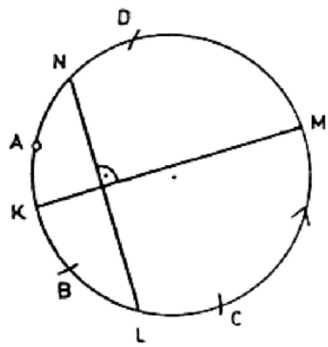
Нека претпоставиме дека $KM \perp LN$. Бидејќи во ориентирана кружница аголот меѓу две тетиви е еднаков на полузбирот на мерките на лаците, изразени во радијани, кои ги отсекуваат тие тетиви, добиваме $\frac{\pi}{2} = \frac{KL+MN}{2}$, односно $KL + MN = \pi$. Меѓутоа, важи

$$KL = AL - AK,\ \ MN = AN - AM ,$$

цртеж десно, па го добиваме равенството

$$AL - AK + AN - AM = \pi ,$$

кое е еквивалентно на равенството (1).



Сега да претпоставиме дека важи (1). Имаме, $AL - AK = KL,\ \ AN - AM = MN$, па ако замениме во (1), добиваме $KL + MN = \pi$, од каде следува $\frac{\pi}{2} = \frac{KL+MN}{2}$, што значи дека $KM \perp LN$.

б) Дадената кружница ќе ја ориентираме позитивно, (цртеж десно). Тогаш

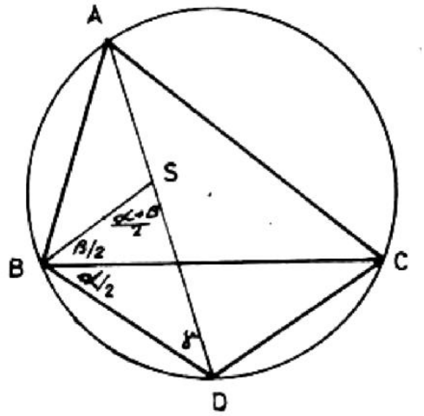
$$\begin{aligned} AK + AM - AL - AN &= \\ &= \tfrac{1}{2} AB + (AB + BC + \tfrac{1}{2} CD) - (AB + \tfrac{1}{2} BC) - (AB + BC + CD + \tfrac{1}{2} DA) \\ &= -\tfrac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) = -\pi, \end{aligned}$$

па од а) следува дека $KM \perp LN$.

4. а) Ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D е пресечната точка на правата AS и опишаната кружница на триаголникот ABC различна од A, тогаш $DB = DC = DS$. Докажи!

б) Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Докажи дека центрите A', B', C', D' на впишаните кружници во триаголниците BCD, CDA, DAB, ABC се темиња на правоаголник.

Решение. а) Стандардно да ги означиме аглите на триаголникот ABC со α, β и γ. Точката D е средина на лакот BC на опишаната кружница, па затоа



$DB = DC$ (цртеж десно). Понатаму,

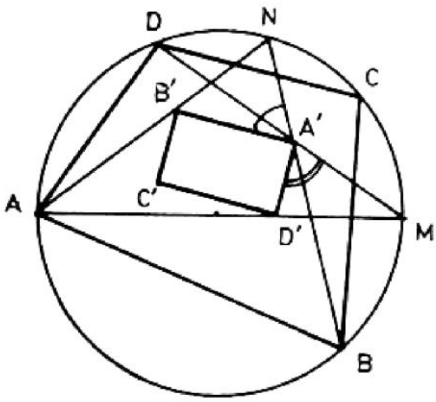
$$\measuredangle DBC = \measuredangle DAC = \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\begin{aligned}\measuredangle DSB &= 180^\circ - (\measuredangle SBD + \measuredangle BDS)\\ &= 180^\circ - (\measuredangle SBC + \measuredangle CBD + \measuredangle BCA)\\ &= 180^\circ - (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \gamma)\\ &= \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} = \measuredangle SBD.\end{aligned}$$

Затоа триаголникот SBD е рамнокрак и важи $DB = DS$.

б) Со $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ да ги означиме големините на централните агли кои соодветствуваат редоследно на лаците AB, BC, CD, DA, а средините на лаците BC и CD соодветно со M и N (види цртеж). Тогаш точките B' и D' припаѓаат соодветно на отсечките AN и AM , а A' е пресек на BN и DM . Од а) следува



$$NB' = ND = NC = NA',$$

па затоа триаголникот $B'A'N$ е рамнокрак и $\measuredangle B'A'N = \frac{180^\circ - \measuredangle ANB}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Аналогно се добива $\measuredangle D'A'M = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$. Бидејќи $\measuredangle BA'M = \measuredangle DA'N = \frac{\beta+\gamma}{2}$, добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle B'A'D' &= 180^\circ - \measuredangle B'A'N - (\measuredangle D'A'M - \measuredangle BA'M)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}) - (90^\circ - \tfrac{\delta}{2}) + \tfrac{\gamma+\delta}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $A'B'C'D'$ се прави,што значи дека тој е правоаголник.

III година

1. Реши ја равенката

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Воведуваме смена $\sin x + \cos x = t, |t| \le \sqrt{2}$. Тогаш $2\sin x \cos x = t^2 - 1$ и дадената равенка се сведува на равенката

$$(a-1)(t+1) = t^2 - 1, \quad t^2 \neq 1.$$

Последното е можно само за $t=a$. Равенката $\sin x+\cos x=a$ има решенија ако $|a|\le\sqrt{2}$ и тие ја задоволуваат почетната равенка ако $|a|\ne 1$. При наведените услови дадената равенка има решенија

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+n\pi,$$

каде $n\in\mathbb{Z}$ ако $|a|<\sqrt{2}$ и $|a|\ne 1$, а $\frac{n}{2}\in\mathbb{Z}$ ако $|a|=\sqrt{2}$.

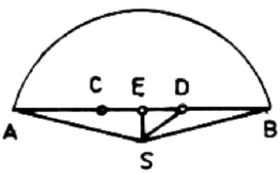
2. Кружниот лак AB со центар S има централен агол α, а точките C и D ја делат тетивата AB на три еднакви дела.

а) Ако $\measuredangle CSD=x$, докажи дека $\cos x=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha}$.

б) Пресметај ја разликата $\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}$.

в) Определи го аголот α за да оваа разлика е еднаква на нула.

Решение. а) Случајот $\alpha=\pi$ е тривијален (тогаш и $x=\pi$). Во случај кога $0<\alpha<\pi$ со E да го означиме подножјето на нормалата од точката S на AB (цртеж десно). Од правоаголните триаголници SED и SEB добиваме $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{ED}{SE}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{EB}{SE}$, од каде следува $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Затоа



$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{9-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{9+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha},$$

бидејќи по претпоставка $1+\cos\alpha\ne 0$.

б) Да означиме $\cos\frac{\alpha}{3}=t$. Тогаш

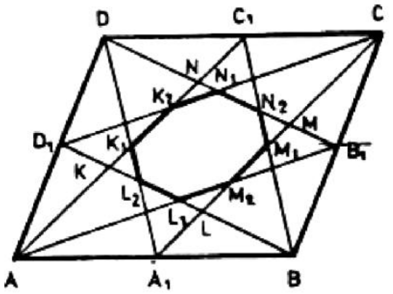
$$\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha}-\cos\frac{\alpha}{3}=\frac{4+5(4t^3-3t)}{5+4(4t^3-3t)}-t=\frac{-4(t-1)^2(t1)(4t-1)}{16t^3-12t+5}.$$

в) Бидејќи според условте на задачата $0<\alpha\le\pi$, односно $\frac{1}{2}\le t<1$ еднствена можност да важи $\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}=0$ е $4t-1=0$, односно $t=\frac{1}{4}$, од каде добиваме $\alpha=3\arccos\frac{1}{4}$.

3. Правите определени со темињата на паралелограмот и средините на несоседните страни, со своите пресеци определуваат осумаголник. Докажи дека плоштината на овој осумаголник е еднаква на шестината од плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Со A_1,B_1,C_1,D_1 да ги означиме средините на страните $AB,BC,CD,$ DA на паралелограмот $ABCD$ со плоштина S, со K,K_1,K_2 да ги означиме пресечните точки на правата AC_1 соодветно со правите BD_1,DA_1,CD_1. Аналогно ги дефинираме точките L, L_1, L_2; точките M, M_1, M_2 и точките N, N_1, N_2 (цртеж десно).

Од $AA_1 \| CC_1$ и $AA_1 = CC_1 = \frac{AB}{2}$ следува дека четириаголникот AA_1CC_1 е паралелограм кој има иста висина и половина од основата на дадениот паралелограм, па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{S}{2}$. Од $LM \| KN$ и $KL \| MN$ следува дека четириаголникот $KLMN$ исто така е паралелограм. Неговата висина е еднаква на висината на паралелограмот AA_1CC_1. Да ја пресметаме неговата основа KN. Отсечките D_1K, MB_1, C_1N се средни отсечки соодветно на триаголниците AND, CLB, DMC, па затоа важи



$$AK = KN = LM = MC = 2NC_1,$$

од каде следува $KN = \frac{2}{5}AC_1$. Затоа плоштината на паралелограмот $KLMN$ е еднаква на $\frac{S}{5}$.

Точката K_1 е пресек на дијагоналите на паралелограмот AA_1C_1D, па затоа $AK_1 = K_1C_1$. Точката K_2 е тежиште на триаголникот ACD (таа е пресек на неговите тежишни линии AC_1 и CD_1), па затоа $AK_2 = 2K_2C_1$. Од претходно изнесеното лесно следува дека $KK_1 = \frac{KN}{4}$ и $K_2N = \frac{KN}{3}$. На сличен начин се добива $KL_2 = \frac{KL}{3}$. Затоа

$$\begin{aligned} P_{KK_1L_2} &= \tfrac{1}{2}KK_1 \cdot KL_2 \sin\measuredangle K_1KL_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}KN\cdot\tfrac{1}{3}KL\sin\measuredangle NKL \\ &= \tfrac{1}{12}P_{NKL} = \tfrac{1}{24}P_{KLMN} = \tfrac{1}{120}S. \end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{LL_1M_2} = P_{MM_1N_2} = P_{NK_1K_2} = \frac{S}{120}.$$

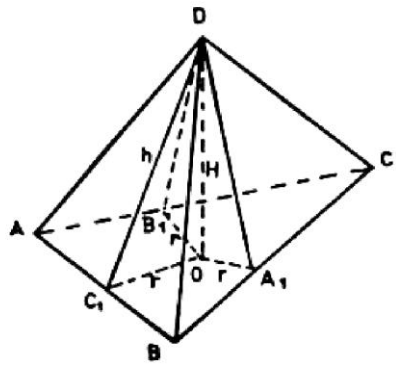
Конечно,

$$P_{K_1L_2L_1M_2M_1N_2N_1K_2} = \frac{S}{5} - 4\cdot\frac{S}{120} = \frac{S}{6}.$$

4. Определи го волуменот на тристрана пирамида чии ѕидови имаат плоштини S_0, S_1, S_2, S_3, а диедрите при ѕидот со плоштина S_0 се еднакви.

Решение. Нека ѕидот со плоштина S_0 е основата ABC на пирамидата $ABCD$. Со O да го означиме подножјето на висината на пирамидата и со A_1, B_1, C_1 да ги означиме соодветно подножјата на висините на бочните ѕидови BCD, CAD, ABD

повлечени од темето D. Тогаш, по претпоставка, аглите $\measuredangle DA_1O, \measuredangle DB_1O, \measuredangle DC_1O$ се еднакви, па затоа триаголниците DA_1O, DB_1O, DC_1O се складни, види цртеж. Значи, точката O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и со r да го означиме радиусот на оваа кружница. Понатаму, да означиме $DO = H$, $DA_1 = DB_1 = DC_1 = h$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и $S_1 + S_2 + S_3 = S$.



Од триаголниците BCD, CAD, ABD добиваме $a = \frac{2S_1}{h}$, $b = \frac{2S_2}{h}$, $c = \frac{2S_3}{h}$, а за полупериметарот на триаголникот ABC имаме $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{S}{h}$. Оттука собиваме

$$S_0^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4},$$

па затоа

$$h = \sqrt[4]{\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S_0^2}}.$$

Понатаму,

$$r = \frac{S_0}{s} = \frac{S_0 h}{S} \text{ и } H = \sqrt{h^2 - r^2} = \frac{h}{S}\sqrt{S^2 - S_0^2},$$

па затоа бараниот волумен е

$$V = \frac{1}{3}S_0 H = \frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2 - S_0^2)} \cdot \sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}.$$

IV година

1. За секој природен број n, бројот $n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^9$ е делив со 10. Докажи!

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^9 &= 10n^9 + (n - n^9) + 10n^7 - 3(n^3 - n^7) \\ &= 10(n^9 + n^7) - n(n-1)(n+1)(1+n^2)(1+3n^2+n^4) \end{aligned}$$

Во последниот збир првиот собирок е делив со 10, а лесно се проверува дека за секој природен број n и вториот собирок е делив со 10.

2. Определи го максималниот број пермутации од n елементи такви што секои два елементи се соседни во најмногу една од пермутациите.

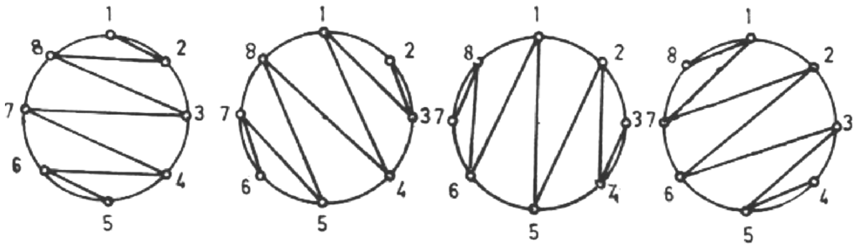
Решение. Нека S е множество од n елементи. Нека претпоставиме дека множеството P кое се состои од m пермутации на множеството S го има тоа својство да произволни два елементи на множеството S се соседни во најмногу една пермутација од P. Секоја пермутација на множеството S содржи $n-1$ пар соседни елементи, а множеството S содржи $\frac{n(n-1)}{2}$ двочлени подмножества. Затоа мора да важи

$$m(n-1) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Според тоа,

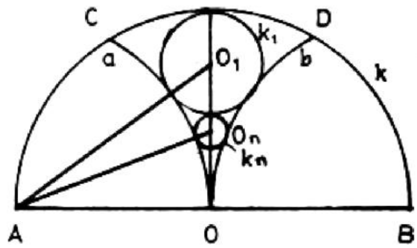
$$m \leq [\tfrac{n}{2}].$$

Во последното неравенство секогаш се достигнува равенство. За $n=7$ тоа се гледа од следниот пример: 12837465, 23148576, 34251687, 81726354 (види цртеж). Сличен пример постои за произволен n.



3. Над отсечката AB со средина O конструирана е полукружница k. Кружниците $a(A,r)$ и $b(B,r)$, каде $r=\frac{AB}{2}$, ја сечат полукружницата k во точките C и D. Во фигурата ограничена со лаците OC, CD и OD впишана е низа кружници $k_1, k_2, k_3, \ldots$ со радиуси $r_1, r_2, r_3, \ldots$ така што првата од нив ги допира сите три лаци, а секоја следна ги допира лаците CO и OD и претходната кружница. Докажи дека за секој природен број k важи $r_k = \frac{r}{2k(k+1)}$.

Решение. Центрите на кружниците k_1, $k_2, \ldots$ редослено да ги означиме со $O_1, O_2, \ldots$ (цртеж десно). Од правоаголниот триаголник AOO_1 имаме



$$(r-r_1)^2 + r^2 = (r+r_1)^2,$$

од каде добиваме

$$r_1 = \frac{r}{4} = \frac{r}{2\cdot 1\cdot(1+1)},$$

па тврдењето важи за $i=1$.

Нека претпоставиме дека тврдењето $r_i = \frac{r}{2i(i+1)}$ важи за секои броеви i кои се помали од некој природен број n. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r}{2i(i+1)} = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{n1} (\tfrac{1}{i} - \tfrac{1}{i+1}) = \frac{r}{2}(1-\tfrac{1}{n}). \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека $r_n = \frac{r}{2n(n+1)}$. Од правоаголниот триаголник AOO_n добиваме

$$(r-2\sum_{i=1}^{n-1} r_i - r_n)^2 + r^2 = (r+r_n)^2,$$

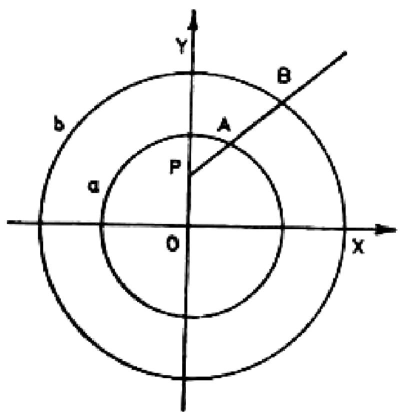
од каде ако се има предвид (1) добиваме

$$r_n = \frac{(r-2\sum_{i=1}^{n-1} r_i)^2}{4(r-\sum_{i=1}^{n-1} r_i)} = \frac{r}{2n(n+1)}.$$

Коенчно, тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

4. Дадени се концентрични кружници a и b со центар O и точка $P \neq o$ во внатрешноста на помалата кружница. Полуправата l со почеток во P ги сече кружниците во точките A и B. Докажи дека отсечката AB е најголема ако полуправата l е нормална на правата OP.

Решение. Поставуваме координатен систем така што точката O е координатен почеток, а точката P е на $y-$оската. Нека d е ординатата на точката P, r и R се радиусите на кружниците a и b и нека $r < R$ (цртеж десно). Равенката на полуправата l е $y = kx + d$, со тоа што x е со постојан знак, при што без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x > 0$. Што се однесува до коефициентот k, дозволуваме формално тој да има вредност и ∞ (случајот кога l се поклопува со $y-$оската).



Ако A и B се пресечните точки на полуправата со кружницие a и b, тогаш нивните координати се:

$$x_A = \frac{-kd+\sqrt{(1+k^2)r^2-d^2}}{1+k^2},\ y_A = kx_A + d,$$

$$x_B = \frac{-kd+\sqrt{(1+k^2)R^2-d^2}}{1+k^2},\ y_A = kx_A + d,$$

па затоа растојанието меѓу нив е еднакво на

$$D(k) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = (x_A - x_B)\sqrt{1+k^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} - \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}}}.$$

Последниот израз има најголема вредност $\sqrt{R^2-d^2}-\sqrt{r^2-d^2}$ за $k=0$, т.е. кога полуправата l е нормална на OP.

Мала олимпијада

1. Дадени се ненулти реални броеви u,v,w,x,y,z. Колкав е можниот избор на предзнаците на овие броеви, ако важи

$$(u+ix)(v+iy)(w+iz)=i\ ? \tag{1}$$

Решение. Да ги претставиме дадените комплексни броеви во тригонометриски облик:

$$\begin{aligned}u+ix&=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\\ v+iy&=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),\\ w+iz&=r_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3).\end{aligned}$$

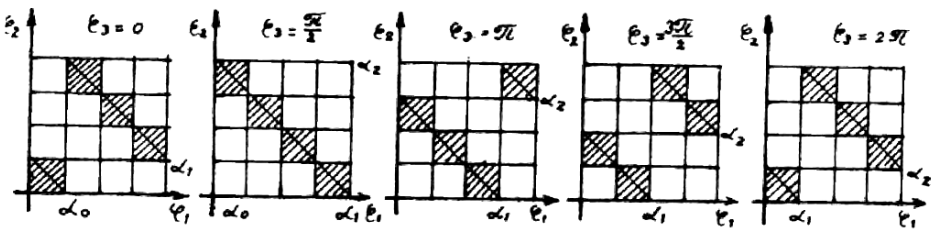
Притоа, според претпоставката, $0<\varphi_i<2\pi, \varphi_i\neq\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$ за $i=1,2,3$. Равенството (1) го запишуваме во видот:

$$r_1r_2r_3(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3))=\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2}$$

и при погоден избор на броевите r_1,r_2,r_3 важи ако и само ако

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\{0,1,2\}.$$

Сега задачата можеме да ја преформулираме на следниов начин:
Во просторен координатен систем, чии оски се означени со $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ дадена е коцка $0<\varphi_1<2\pi, 0<\varphi_2<2\pi, 0<\varphi_3<2\pi$, која со рамнинте $\varphi_i=l\frac{\pi}{2}$, ($i=1,2,3$, $l=1,2,3$) е поделена на 64 помали коцки. Треба да се определи бројот на оние помали коцки чија внатрешност има непразен пресек со некоја од рамнинуте α_k определени со $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\{0,1,2\}$.



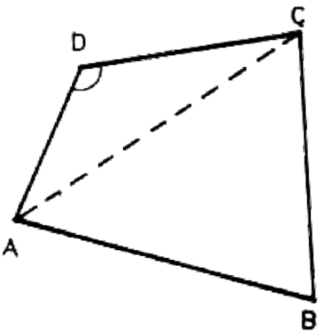
Лесно се гледа дека рамнината α_0 чија равенка е $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}$ ја сече внатрешноста само на една коцка – онаа која е во долниот лев агол на големата коцка (види цртеж). Рамнината α_1 чија равенка е $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2\pi$ ја сече внатрешноста на 7 коцки за кои $0<\varphi_3<\frac{\pi}{2}$, потоа 7 коцки кај кои $\frac{\pi}{2}<\varphi_3<\pi$, 5 коцки кај кои $\pi < \varphi_3 < \frac{3\pi}{2}$ и 3 коцки кај кои $\frac{3\pi}{2} < \varphi_3 < 2\pi$, што значи вкупно 22 коцки. Рамнината α_2 чија равенка е $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + 4\pi$ не ја сече внатрешноста на ниту една коцка кај која $0 < \varphi_3 < \frac{\pi}{2}$, таа ја сеќе внатрешноста на една коцка кај која $\frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \pi$, потоа 3 коцки кај кои $\pi < \varphi_3 < \frac{3\pi}{2}$ и на крајот 5 коцки кај кои $\frac{3\pi}{2} < \varphi_3 < 2\pi$, што значи вкупно 9 коцки.

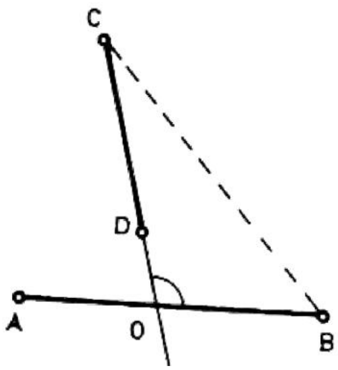
Значи, бараниот број коцки, а со самото тоа и бараните можности за избор на предзнаците е $1 + 22 + 9 = 32$.

2. Ако конвексното множество точки во рамнината има барем два дијаметри, да кажеме AB и CD, тогаш отсечките AB и CD имаат заедничка точка. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека AB и CD се дисјунктни дијаметри на даденото конвексно множество. Можни се два случаја:

а) Ниту една од отсечките AB и CD не ја сече правата определена со другата отсечка. Во овој случај четириаголникот $ABCD$ (или $ABDC$) е конвексен (цртеж десно). Еден од аглите на тој четириаголник, на пример кај темето D не е помал од 90°. Но, тогаш $AC > CD$, што значи дека отсечката CD не е дијаметар, што противречи на условот на задачата.





б) Една од овие отсечки ја сече правата определена со другата отсечка. Во овој случај нека, да кажеме, отсечката AD ја сече правата определена со отсечката CD во точката O и нека точката D е меѓу точката C и O (цртеж лево). Тогаш еден од аглите AOC и BOC, на пример BOC не е помал од 90°. Но, тоа значи дека $BC > OC > CD$, па затоа CD не е дијаметар, што противречи на условот на задачата.

3. Познато е дека за броевите од таблицата

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

важи неравенството

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n| \le M ,$$

за секој избор на броевите $x_j = \pm 1$. Докажи дека

$$|a_{11}| + |a_{22}| + ... + |a_{nn}| \le M .$$

Решение. Со X да го означиме множеството од сите $n-$варијации $x = (x_1,$ $x_2, ..., x_n)$ на множеството $\{-1,1\}$. Според претпоставката за секој $x \in X$ важи

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n| \le M ,$$

па бидејќи множеството X има 2^n елементи, добиваме

$$\sum_{x\in X} \sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n| \le 2^n M .$$

Последното неравенство можеме да го запишеме во видот

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} \sum_{x\in X} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n|) \le M .$$

За секој фиксиран $j \in \{1, 2, ..., n\}$ собирците на збирот

$$S_j = \sum_{x\in X} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n|,$$

кои ги има 2^n, ги разбиваме на 2^{n-1} парови, така што варијациите x и x' кои соодветствуваат на собирците на еден пар се разликуваат само во елементот x_j (во една $x_j = 1$, а во друга $x_j^{'} = -1$). Тогаш збирот на двата собирци е од видот $|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}|$, каде

$$A = a_{j1}x_1 + ... + a_{j,j-1}x_{j-1} + a_{j,j+1}x_{j+1} + ... + a_{jn}x_n .$$

Но,

$$|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}| \ge |(A + a_{jj}) - (A - a_{jj})| = 2|a_{jj}|,$$

па затоа $S_j \ge 2^{n-1} \cdot 2|a_{jj}| = 2^n |a_{jj}|$, што значи

$$|a_{11}| + |a_{22}| + ... + |a_{nn}| = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} 2^n |a_{jj}| \le \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} S_j) \le M .$$

4. Определи го најголемиот природен број $k(n)$ со следното својство: Постојат $k(n)$ различни подмножества на дадено множество со n елементи, такви што секои две од нив имаат непразен пресек.

Решение. Да го фиксираме елементот a_1 од множеството $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и да ги разгледаме подмножествата на множеството X кои го содржат елементот

a_1. Вакви подмножества има колку што е бројот на подмножествата на множеството $\{a_2, a_3, ..., a_n\}$, што значи 2^{n-1}. Јасно, секои две од овие множества имаат непрезен пресек, па затоа $k(n) \geq 2^{n-1}$.

Нека претпоставиме дека се избрани повеќе од 2^{n-1} подмножества од множеството X. Да ги поделиме сите 2^n подмножества на X на 2^{n-1} парови, така што во еден пар припаѓаат множеството и неговиот коплемент. Од принципот на Дирихле следува дека барем две од избраните подмножества формираат еден таков пар, што значи дека нивниот пресек е празен. Значи, не може да е $k(n) > 2^{n-1}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува $k(n) = 2^{n-1}$.