Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска во 1961

О геометријским конструкцијама са неприступачним елементима

МОМЧИЛО КОСМАЈАЦ, Цетиње

Општа теорија геометријских конструкција помоћу лењира и шестара, обично се заснива на чињеницама да се кроз двије различите тачке може поставити права, затим да се може добити тачка као пресјек двију правих (наравно све ово помоћу лењира) и да се помоћу шестара може конструисати круг, ако му је познат положај његовог центра и величина његовог полупречника.

У пракси ове чињенице могу, али не морају бити испуњене. За решавање специјалних типова задатака служимо се разноврсним картама различитих размјера и помоћу њих одређујемо тражене елементе одговарајућих фигура. Са оваквим задацима и начином решавања врло често се сретају на терену инжињери и техничари. На терену при мјерењима и конструкцијама немогуће је у сваку тачку поставити геодетски инструмент и сваки праволинијски пут није приступачан, тј. поједини елементи на том путу су неприступачни. У вези са тим околностима поникла је и развила се математичка теорија геометријских конструкција са неприступачним елементима која данас игра необично важну улогу у практичној геометрији, па је стога и нормално да се наши средњошколци упознају са основама те теорије, јер мјерењима на терену новим програмима за основну школу, а самим тим и за гимназије дато је право мјесто.

Још 1774. г. швајцарски математичар I. H. Lambert* у књизи »Слободна перспектива« дао је решења неких простијих конструктивних задатака са неприступачним елементима. Од тада па до данас та теорија се развијала, тако да она сада претставља једну изграђену грану геометрије, помоћу које практичари лако решавају задатке на терену.

Појавом неприступачних елемената у разним задацима мијења се обично поступак геометријског решавања таквих задатака и ток решавања је нешто компликованији од уобичајеног.

У овом чланку биће говора о решавању таквих задатака и то само оних који су у вези са познатом материјом из планиметрије, јер систематско излагање теорије геометријских конструкција са неприступачним елементима захтијева солидно познавање основних теорема пројективне геометрије (особине потпуног четвороугла, Desargues-ovu** теорему, Papo*-Pascal-ovu*** теорему, особине поларе и др.)

* I. H. Lambert (1728—1777 г.) је познат по свом прилогу о паралелним линијама у својој »Теорији паралелних линија«.

* Papo из Александрије (III вијек прије наше ере).

** Desargues (1593—1662) је француски математичар, који је познат у пројективној геометрији по својој теореми.

*** Pascal B. (1623—1662) је француски математичар.

Прије него пређемо на саме задатке упознаћемо се са извјесним аксиомама и дефиницијама.

Дефиниција 1.

Тачка је »неприступачна«, ако је над њом немогуће примијенити аксиоме конструктивне геометрије, тј. аксиоме лењира и шестара.

Аксиома лењира.

Лењиром је могуће извести следеће конструкције:

а) конструисати дуж спајајући двије различите сталне тачке;

в) конструисати праву која пролази кроз двије сталне тачке;

с) конструисати полуправу (зрак) која излази из дате тачке а пролази кроз другу тачку.

Аксиома шестара.

Шестаром се могу извести следеће конструкције:

а) конструисати круг ако је дат центар круга и његов полупречник

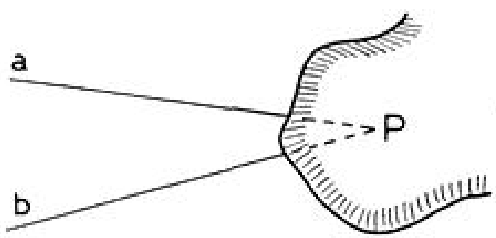
в) конструисати сваки од два допунска лука круга, ако су дати његов центар и крајеви тих лукова.

Дефиниција 2.

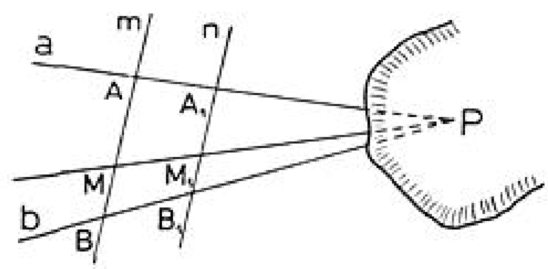
Геометриска фигура је »неприступачна«, ако су све њене тачке неприступачне.

Дефиниција 3.

За неприступачну тачку каже се да је позната, ако су конструисане двије праве које њоме пролазе. (сл. 1).



Сл. 1



Сл. 2

Ако је неприступачна тачка P позната означавамо је са $P(a, b)$, јер је одређена правима a и b. (види сл. 1).

А сада ево неколико задатака са неприступачним елементима.

Задатак 1.

Кроз дату тачку M поставити праву MP, ако је тачка $P(a, b)$ позната неприступачна тачка (сл. 2).

Решење:

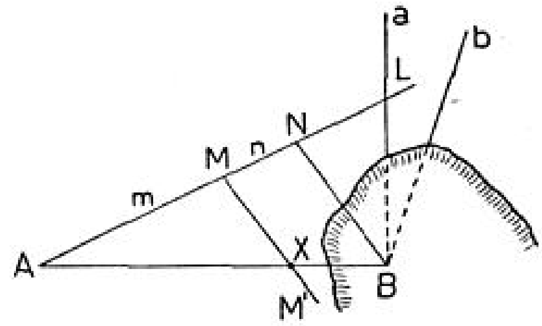
Кроз тачку M поставимо било коју праву m која сијече дате праве a и b у одговарајућим тачкама A и B. Осим ње поставимо још једну праву $n \parallel m$, тако да она сијече a и b у тачкама A_1 и B_1. Нађимо такву тачку M_1 да она дијели дуж $\overline{A_1B_1}$ у истом односу у којем тачка M дијели дуж $\overline{AB}$, т. ј. нека је $\overline{AM} : MB = A_1M_1 : M_1B_1$. Тада је права MM_1 тражена права, тј. она мора пролазити кроз P. (Објасни на основу чега).

Задатак 2.

Подијелити у датом односу $m : n$ (m и n су мјерни бројеви датих дужи) дуж $\overline{AB}$, ако је један од њених крајева (на пр. B) неприступачан. (сл. 3).

Решење:

Поставимо кроз A полуправу AL, *као што је на сл. 3 и пренесимо на* њу $AM = m$, $MN = n$. Конструишимо праву BN (аналогно зад. 1) и поставимо кроз M праву $MM' \parallel BN$. Права MM' сијече $\overline{AB}$ у тачки X, т. ј. $AX : XB = m : n$.



Сл. 3

Ова конструкција је изводљива и у случају када су оба краја дужи $\overline{AB}$ неприступачна. У том случају ван дужи $\overline{AB}$ одабере се произвољна тачка N, дуж $\overline{AN}$ дијели се у датом односу према наведеном поступку, а затим се враћамо на већ описану конструкцију.

Задатак 3.

Дате су три тачке A, B и C које леже на једној правој a, при чему је тачка C неприступачна. Наћи такве отсјечке m и n, да би однос $AC : BC$ био једнак односу $m : n$, (сл. 4).

Решење:

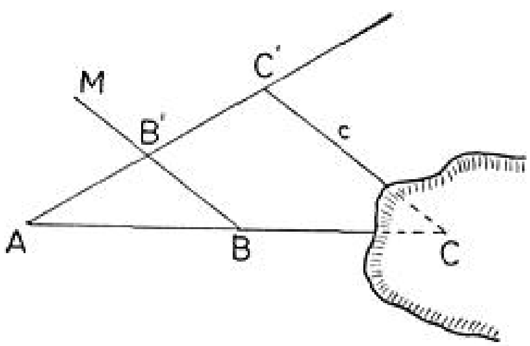
Нека је C' произвољна тачка на правој c, која пролази кроз неприступачну тачку C. Поставимо $BM \parallel CC'$. Нека права BM сијече AC' у тачки B'. Тада је јасно да имамо већ тражени однос $AC : BC = AC' : B'C' = m : n$. (зашто?).

Задатак 4.

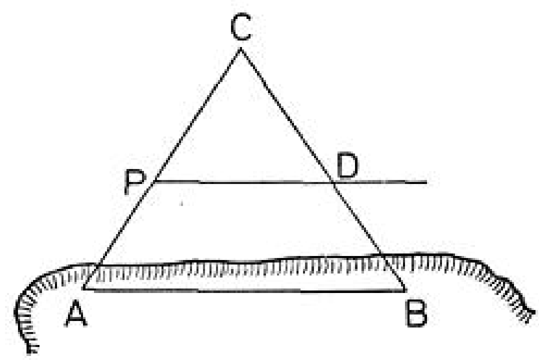
A и B су двије познате неприступачне тачке. Кроз дату тачку P поставити праву паралелно правој AB. (сл. 5).

Решење:

Конструишимо праву PA (слично задатку 1). Нека је C произвољна тачка праве PA. Одредимо однос $AC : PC$ (слично задатку 3). Подијелимо дуж BC тачком D у том односу истом (слично задатку 2). Тада је права PD тражена



Сл. 4



Сл. 5

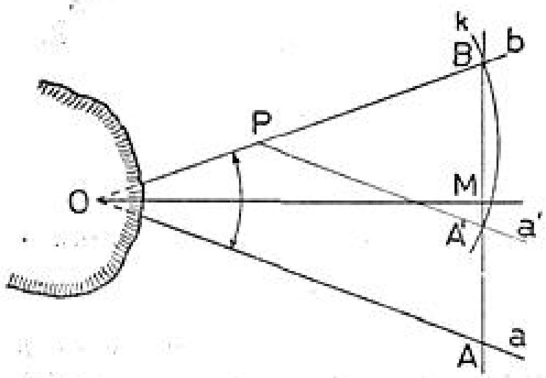
права, јер је $\Delta PDC \sim \Delta ABC$, пошто исти имају заједнички угао код C и стране су им пропорционалне , тј. $AC : PC = BC : DC$, то права PD мора бити паралелна са AB.

На овај задатак лако се своди задатак о конструкцији нормале кроз дату тачку у односу на дату праву која пролази кроз двије познате неприступачне тачке.

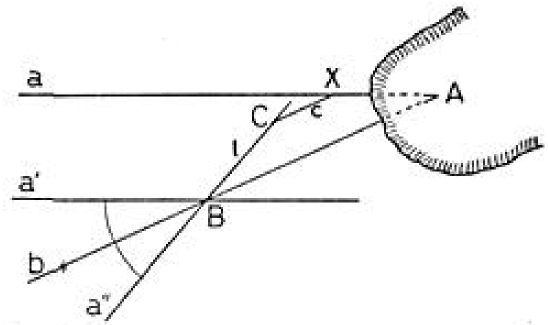
Задатак 5.

Одредити симетралу угла (a, b), ако је његово тјеме неприступачно (сл. 6).

Нека је P (сл. 6) произвољна тачка на правој b. Конструишимо праву a' која пролази кроз P, а $\|$ је правој a. Из тачке P као центра опишемо круг k произвољног полупречника. Нека овај сијече праве a' и b у одговарајућим тачкама A' и B. Права AB гради са датим правима a и b једнаке углове, јер она



Сл. 6



Сл. 7

пролази кроз A', а $PA' \|$ са OA, а осим тога и $PA' = PB$, тј. $\Delta\ A'PB$ је равнокраки, а самим тим и $\Delta\ AOB$ са врхом у O-тјеме датог угла. На основу тога тражена симетрала мора пролазити кроз средину M дужи $AB \perp$ на њој.

Задатак 6.

На датој правој a пренијети од извјесне неприступачне тачке A дуж једнаку датој дужи. (сл. 7).

Решење:

Нека је b (сл. 7) друга права која одређује неприступачну тачку A. Одаберимо на правој b произвољну тачку B и поставимо кроз њу праву $a' \| a$. Конструишимо праву a'' симетрично a' у односу на b, и на њу пренесимо дату дуж $BC = l$. Ако је c права $\|$ правој b, а пролази кроз C, то је тачка X, тј. $AX = l$. Трапез $ABCX$ је равнокраки, јер су углови на његовим основама једнаки.

Из ових наведених примјера, види се да оваквих и њима сличних задатака има приличан број, и да сами можемо створити задатке комбинујући наведене примјере конструктивних задатака са неприступачним елементима.

Врло често се при решавању конструктивних задатака са неприступачним елементима примјењују геометријске трансформације. Ако тада геометријска трансформација не преводи дату неприступачну тачку у саму себе, то се за њу каже да је приступачна. Послије примијењене трансформације задатак се обично решава познатим методама. Послије тога, када је добијено одговарајуће решење, остаје да се примијени обрнута трансформација да би добили решење за првобитни положај фигуре. Ради илустрације трансформација навешћемо два примјера.

Задатак 7.

Конструисати средину дужи AB, ако су $A\ (a_1, a_2)$ и $B\ (b_1, b_2)$ двије неприприступачне тачке.

Примијенимо методу симетрије.

Нека је s (сл. 8) произвољна права коју узимамо за осу симетрије.

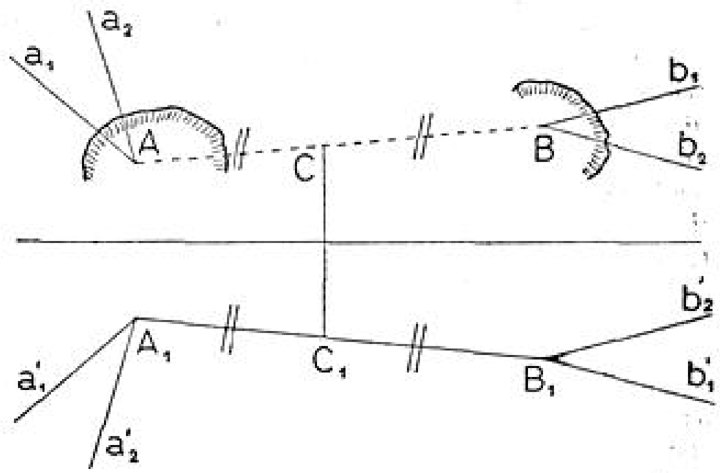
Конструишимо праве a'_1, a'_2 b'_1 и b'_2 симетрично правима a_1, a_2, b_1 и b_2 у односу на праву s. Нека је $a'_1 \times a'_2 = A'_1$, $b'_1 \times b'_2 = B_1$. Конструишимо средину дужи A_1B_1, тј. тачку C'_1. Тачка C симетрична тачки C'_1 у односу на s је тражена тачка, јер је једнакост дужи при симетрији сачувана при чему је два пута поновљена симетрија идентична трансформација.

Понекад није потребно изводити обрнуту трансформацију као што је то очевидно из следећег примјера.

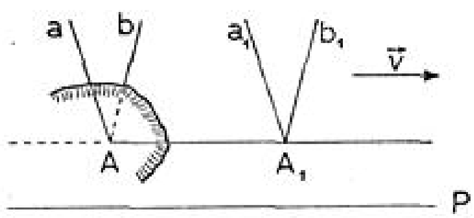
Задатак 8.

Кроз дату неприступачну тачку A (a и b) поставити праву, паралелну датој правој p.

Изведимо паралелно помјерање дате фигуре у смјеру неког вектора $\vec{V}$, који је колинеаран правој p. Праве a и b преображавају се при томе у одговарајуће праве a'_1 и b'_1. Нека је (сл. 9) $a_1 \times b_1 = A_1$. Права постављена кроз $A_1 \parallel p$ је тражена права.



Сл. 8



Сл. 9

Како у пракси, при цртању, увијек имамо посла не са читавом равни, него с њеним ограниченим дијелом, њеном облашћу (лист за цртање), то се овдје онда појављују задаци — конструктивни задаци на ограниченом дијелу равни, гдје остали дио равни схватимо као неприступачан. У тим случајевима особито је корисна трансформација хомотетија, јер она омогућава »сажимање« цијелог цртежа у произвољном односу. При одговарајућем избору центра и коефицијената хомотетије може се добити да се све произвољно далеке неприступачне тачке равни преображавају у тачке, распоређене у границама датога дијела равни.