Сојузен натпревар 1981

I година

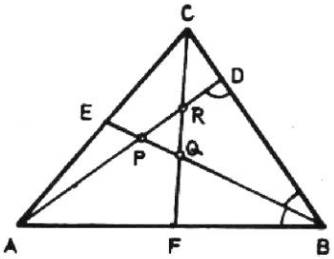
1. Природните броеви a,b,c се такви што $a+c$ и $b+c$ се квадрати на последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ се исто така квадрати на последователни природни броеви.

Решение. Нека $a+c=k^2$ и $b+c=(k+1)^2$, каде k е природен број. Тогаш $a=k^2-c$ и $b=(k+1)^2-c$, па лесно се добива дека

$$ab+c=(k^2-c)((k+1)^2-c)+c=(k(k+1)-c)^2,$$
$$ab+a+b+c=(k(k+1)-c+1)^2.$$

2. Од едно теме на остроаголен триаголник е конструирана висината, од друго симетралата на аголот и од третото тежишната линија. Нивните пресечни точки се темиња на нов триаголник. Докажи дека овој триаголник не може да е рамностран.

Решение. Нека AD е висина, BE симетралата на $\measuredangle ABC$ и CF тежишна линија на триаголникот ABC и нека P,Q,R се редоследно пресеците на отсечките AD и BE, BE и CF, CF и AD, цртеж десно. Нека претпоставиме дека триаголникот PQR е рамностран. Тогаш $\measuredangle BPD=60^\circ$, па затоа $\measuredangle PBD=\measuredangle PBA=30^\circ$ и $\measuredangle ABC=60^\circ$. Бидејќи $\measuredangle BQF=\measuredangle PQR=60^\circ$, добиваме



$$\measuredangle QFB=180^\circ-\measuredangle BQF-\measuredangle QBF=90^\circ.$$

Според тоа, $CF\perp AB$, т.е. тежишната линија CF воедно е и висина на триаголникот ABC. Сега од $CF=CF, FA=FB$ и $\measuredangle CFA=\measuredangle CFB=90^\circ$ следува дека триаголниците CFA и CFB се складни. Затоа $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=60^\circ$, па добиваме $\measuredangle ACB=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$. Според тоа триаголникот ABC е рамностран, па отсечките AD,BE и CF се сечат во една точка, што противречи на условот на задачата.

3. Првите четири члена на една низа се 1, 9, 8, 1. Секој следен член на низата е еднаков на последната цифра на збирот на претходните четири члена.

а) Дали во низата се појавува четворката 1, 2, 3, 4?

б) Дали во низата некогаш се повторува почетната четворка?

Решение. Нека $a_1, a_2, a_3, ...$ е дадената низа броеви. Користејќи ги првите четири члена и правилото за добивање на следните членови на низата заклучуваме дека a_n е парен ако и само ако $n \equiv 3(\bmod 5)$.

а) Од претходно изнесеното следува дека од произволни четири поседователни членови на низата најмногу еден е парен. Затоа во низата не се појавува четворката 1, 2, 3, 4.

б) Нека $x_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $x_2 = (a_2, a_3, a_4, a_5)$, $x_3 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$, ... Бидејќи четворки чии елементи се 0, 1, 2, ..., 9 има 10^4, заклучуваме дека во низата $x_1, x_2, x_3, ...$ има еднакви членови. Нека k е најмалиот индекс за кој постои природен број $n > k$ таков што важи $x_k = x_n$, т.е.

$$a_k = a_n,\, a_{k+1} = a_{n+1},\, a_{k+2} = a_{n+2},\, a_{k+3} = a_{n+3}.$$

Нека претпоставиме дека $k > 1$. Бидејќи

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \equiv a_{k+3}(\bmod 10),$$
$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \equiv a_{n+3}(\bmod 10),$$

добиваме $a_{k-1} \equiv a_{n-1}(\bmod 10)$, и како $a_{k-1}, a_{n-1} \in \{01, 2, ..., 9\}$ следува $a_{k-1} = a_{n-1}$. Затоа $x_{k-1} = x_{n-1}$, што е противречност. Според тоа, $k = 1$, т.е. првата четворка која се повоторува во низата е $x_1 = (1, 9, 8, 1)$.

4. Еден глушец грицка парче сирење во форма на коцка со раб 3. Коцката сирење е поделена на 27 мали коцки со раб 1. Глешецот го грицка сирењето така што почнува со мала коцка во едно од темињата. Откако ќе ја изеде целата мала коцка, преминува на соседната, која со тукушто изедената мала коцка има заеднички ѕид. Дали глушецот може да го изеде целото парче сирење така што последната мала коцка е таа што е во центарот на големата коцка?

Решение. Секоја од малите коцки да ја означиме со броевите 0 и 1 така што аголните коцки се означени со 0, а секои коцки кои имаат заеднички ѕид се означени со различни броеви. Тогаш централната коцка е означена со 1. Глушецот ги јаде коцките кои редоследно се означени со броевите 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... Дваесет и седмиот член во оваа низа е 0, па затоа централната коцка не може да биде последна изедена.

II година

1. Нека a, b, c, $a > 0$ се цели броеви, такви што равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има две различни решенија во интервалот $(0,1)$. Докажи дека $a \geq 5$ и најди пример на таква равенка за $a = 5$.

Решение. Нека x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, такви што $0 < x_1 < x_2 < 1$. Тогаш $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $f(0) > 0$ и $f(1) > 0$.

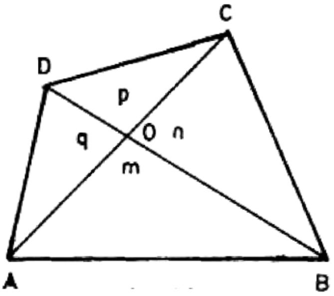
Бидејќи $f(0)$ и $f(1)$ се природни броеви, а броевите x_1 и x_2 се различни меѓу себе, добиваме

$$1 \le f(0)f(1) = a^2 x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2) < a^2 (\tfrac{x_1+x_2+1-x_1+1-x_2}{4})^4 = \tfrac{a^2}{16},$$

т.е. $a^2 > 16$. Но, a е природен број, па од последното неравенство следува $a \ge 5$. Понатаму, $f(0)f(1) < \frac{25}{16}$, па следува $f(0) = f(1) = 1$, т.е. $c = a+b+c = 1$. Ако $a = 5$, тогаш $c = 1, b = -5$.

Лесно се проверува дека квадратниот трином $f(x) = 5x^2 - 5x + 1$ има две различни реални нули кои припаѓаат на интервалот $(0,1)$.

2. Еден конвексен четириаголник е поделен со дијагоналите на четири триаголници, чии плоштини се изразуваат со природни броеви. Докажи дека производот на тие четири броја е точен квадрат.



Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека m,n,p,q се редоследно плоштините на триаголниците ABO, BCO, CDO, DAO. Бидејќи триаголниците ABO и BCO имаат заеднчка висина од темето B, а триаголниците CDO и DAO имаат заедничка висина од темето D, добиваме

$$\frac{m}{n} = \frac{AO}{CO} = \frac{q}{p}.$$

Затоа $mp = nq$, односно $mnpq = (nq)^2$.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1.$$

Решение. Дадената равенка последователни е еквивалентна на равенките:

$$(x^2 + 3x + 1)^2 - y^4 = 0,$$

$$16(x^2 + 3x + 1 - y^2)(x^2 + 3x + 1 + y^2) = 0,$$

$$((2x+3)^2 - (2y)^2 - 5)((2x+3) + (2y)^2 - 5) = 0,$$

$$(2x+3-2y)(2x+3+2y) - 5)((2x+3) + (2y)^2 - 5) = 0.$$

Подредениот пар (x, y) цели броеви е решение на последната равенка ако и само ако е исполнет еден од следниве осум случаи:

1) $2x+2y+3 = 1, 2x-2y+3 = 5$,

2) $2x+2y+3 = 5, 2x-2y+3 = 1$,

3) $2x+2y+3 = -1, 2x-2y+3 = -5$,

4) $2x+2y+3=-5, 2x-2y+3=-1$,

5) $2x+3=1, 2y=2$,

6) $2x+3=1, 2y=-2$,

7) $2x+3=-1, 2y=2$,

8) $2x+3=-1, 2y=-2$.

Решавајќи ги овие осум системи равенки ги добиваме следниве решенија на дадената равенка:

$$(0,-1), (0,1), (-3,1), (-3,-1), (-1,1), (-1,-1), (-2,1), (-2,-1).$$

4. Множеството $\{1,2,...,100\}$ е поделено на седум меѓусебно дисјунктни подмножества. Докажи дека постојат броеви a,b,c,d кои припаѓаат на исто подмножество, меѓу кои има најмалку три различни броја и за кои важи $a+b=c+d$.

Решение. Нека $\{1,2,...,100\}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_7$, каде $A_1,A_2,...,A_7$ се заемно дисјунктни множества. Од $7\cdot 14<100$, следува дека барем едно од множествата $A_1,A_2,...,A_7$ содржи барем 15 елементи. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1,a_2,...,a_{15}\in A_1$ и $a_1<a_2<...<a_{15}$. Нека

$$x_1=a_2-a_1, x_2=a_3-a_2,..., x_{14}=a_{15}-a_{14}.$$

Да претпоставиме дека меѓу природните броеви $x_1, x_2,..., x_{14}$ нема еднакви. Тогаш

$$a_5-a_1=x_1+x_2+...+x_{14}\geq 1+2+...+14=105 \text{, т.е. } a_5\geq 105+a_1\geq 106,$$

што е противречност. Според тоа, барем два од броевите $x_1, x_2,..., x_{14}$ се еднакви меѓу себе. Нека $x_k=x_n$, каде $1\leq k<n\leq 14$. Тогаш $a_{k+1}-a_k=a_{n+1}-a_n$, односно

$$a_{k+1}+a_n=a_{n+1}+a_k \text{, каде } 1\leq k<k+1\leq n<n+1\leq 15.$$

Сега може да земеме $a=a_{k+1}, b=a_n, c=a_{n+1}, d=a_k$.

III година

1. Докажи дека за секој природен број n, бројот $\operatorname{tg}^{2n}15^\circ+\operatorname{ctg}^{2n}15^\circ$ може да се запише како збир на квадрати на три последователни природни броја.

Решение. Прво да забележиме дека $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}15^\circ=2+\sqrt{3}$. Нека $a_n=\operatorname{tg}^{2n}15^\circ+\operatorname{ctg}^{2n}15^\circ$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_n-2&=(\operatorname{ctg}^n 15^\circ-\operatorname{tg}^n 15^\circ)^2=((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n)^2\\&=\{2\sqrt{3}[\tbinom{n}{1}2^{n-1}+\tbinom{n}{3}2^{n-3}\cdot 3+\tbinom{n}{5}2^{n-5}3^2+...]\}^2=3m^2,\end{aligned}$$

каде m е природен број. Затоа

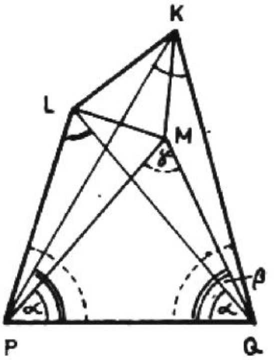
$$a_n=3m^2+2=(m-1)^2+m^2+(m+1)^2.$$

2. Од иста страна на отсечката PQ конструирани се три триаголници KPQ, QLP и PQM такви што

$$\measuredangle QPM = \measuredangle PQL = \alpha,\ \measuredangle PQM = \measuredangle QPK = \beta,\ \measuredangle PQK = \measuredangle QPL = \gamma\ ,$$

при што важи $\alpha < \beta < \gamma$. Докажи дека триаголникот KLM е сличен со првите три.

Решение. Лесно се добива дека $\measuredangle KPL = \measuredangle KQM = \gamma - \beta$ и



$$\frac{PL}{QM} = \frac{PL}{PQ}\frac{PQ}{QM} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{PK}{QK}\ .$$

Оттука следува дека триаголниците PKL и QKM се слични, па затоа

$$\frac{KL}{KM} = \frac{PK}{QK} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\ ,$$

т.е. $\frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{KM}{\sin\beta}$. Аналогно се докажува $\frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{LM}{\sin\alpha}$, па добиваме

$$\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{LM}{\sin\alpha}\ ,$$

од каде што следува дека триаголниците LMK и PQM се слични.

3. Нека S_1 е низата природни броеви 1, 2, 3, 4, 5, ... Дефинираме низа S_{n+1} ($n = 1, 2, ...$) со помош на низата S_n, зголемувајќи ги за 1 оние членови на низата S_n кои се деливи со n. Така, на пример S_2 е низата 2, 3, 4, 5, 6, ..., S_3 е низата 3, 3, 5, 5, 7, 7, ... Докажи дека во низата S_n точно првите $n-1$ членови се еднакви на n ако и само ако n е прост број.

Решение. Нека $S_n(k)$ е $k-$тиот член на низата S_n. Од условот на задачата следува дека за секој природен број n важи $S_n(1) \le S_n(2) \le S_n(3) \le ...$ (бидејќи ако во некој чекор некој член на низата се зголеми за 1, тогаш се зголемуваат и сите членови кои се еднакви на него).

Нека n е прост број. Тогаш

$$S_n(1) = n = S_2(n-1) = S_3(n-1) = ... = S_{n-1}(n-1) = S_n(n-1)\ .$$

Бидејќи $S_2(n) = n+1$, добиваме дека $S_n(n) \ge n+1$. Сега, бидејќи низата $S_n(k)$ е монотоно растечка, добиваме

$$S_n(1) = S_n(2) = ... = S_n(n-1) = n < S_n(n)\ .$$

Нека n не е прост број и нека p е неговиот најмал прост делител. Тогаш

$$S_2(n-1) = S_p(n-1) = n < n+1 = S_{p+1}(n-1) \le S_n(n-1)\ ,$$

т.е. $(n-1)-$виот член на низата S_n е поголем од n.

4. Нека $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ се подмножества на конечното множество M такви што $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$ за $1 \le j \le 1066$. Докажи дека постојат елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ од M такви што секој A_j содржи барем еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$. (Со $|S|$ е означен бројот на елементите на множеството S.)

Решение. Бидејќи $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$ за $1 \le j \le 1066$, добиваме

$$\sum_{j=1}^{1066} |A_j| > 533|M|.$$

Од принципот на Дирихле следува дека постои елемент $x_1 \in M$ кој се содржи најмалку во 534 од множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$. Овие 534 множества да ги означиме со $B_{533}, B_{534}, ..., B_{1066}$. Аналогно добиваме дека постојат елементи $x_2, x_3, ..., x_{10}$ такви што

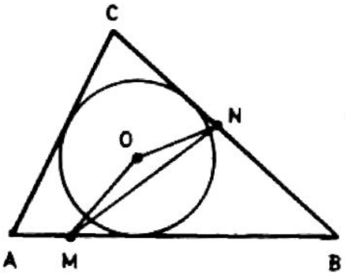
$$x_2 \in B_{266} \cap B_{267} \cap ... \cap B_{532}, \qquad x_3 \in B_{133} \cap B_{134} \cap ... \cap B_{265},$$
$$x_4 \in B_{66} \cap B_{67} \cap ... \cap B_{132}, \qquad x_5 \in B_{33} \cap B_{34} \cap ... \cap B_{65},$$
$$x_6 \in B_{16} \cap B_{17} \cap ... \cap B_{32}, \qquad x_7 \in B_8 \cap B_9 \cap ... \cap B_{15},$$
$$x_8 \in B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7, \qquad x_9 \in B_2 \cap B_3, \quad x_{10} \in B_1,$$

каде $(B_1, B_2, ..., B_{1066})$ е некоја пермутација на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_{1066}\}$. Тогаш секое од множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ сдржи барем еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

IV година

1. Права дели триаголник на два дела со еднакви плоштини и периметри. Докажи дека таа права минува низ центарот на впишаната кружница во тој триаголник.

Решение. Нека правата p ги сече страните AB и BC соодветно во точките M и N, при што триаголникот MBN и четириаголниот $AMNC$ имаат еднакви плоштини и периметри. Нека претпоставиме дека центарот O на впишаната кружница не припаѓа на правата MN. Да го разгледаме случајот кога точката O припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $AMNC$. Нека r е радиусот на впишаната кружница. Тогаш



$$P_{AMONC} = \frac{1}{2}(MA + AC + CN)r = \frac{1}{2}(NB + BM) = P_{MONB},$$

а како $P_{AMONC} + P_{MON} = P_{AMNC} = P_{MBN} = P_{MONB} - P_{MON}$, добиваме $P_{MON} = 0$, што е противречност. Аналогно се разгледува случајот кога точката O припаѓа на внатрешноста на триаголникот BMN.

Да забележиме дека истиот доказ важи и кога $A=M$.

2. Нека a и b се позитивни реални броеви. Определи го минимумот на изразот $|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}|$, ако x и y се комплексни броеви такви што $|x|=a$ и $|y|=b$.

Решение. Имаме:

$$|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}|^2=\frac{x+y}{1+x\bar{y}}\,\frac{\bar{x}+\bar{y}}{1+\bar{x}y}=\frac{|x|^2+|y|^2+2\,\mathrm{Re}(x\bar{y})}{1+|x\bar{y}|^2+2\,\mathrm{Re}(x\bar{y})}$$

$$=1+\frac{|x|^2+|y|^2-1-|x\bar{y}|^2}{1+|x\bar{y}|^2+2\,\mathrm{Re}(x\bar{y})}=1+\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+|x\bar{y}|^2+2\,\mathrm{Re}(x\bar{y})},$$

при што

$$\min\{\mathrm{Re}(x\bar{y}):|x|=a,|y|=b\}=-ab,$$

$$\max\{\mathrm{Re}(x\bar{y}):|x|=a,|y|=b\}=ab.$$

Ако барем еден од броевите a и b е еднаков на 1,тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}|=1.$$

Ако двата броеви a и b се помали или двата се поголеми од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}|=[1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2-2ab}]^{\frac{1}{2}}=|\frac{a-b}{1-ab}|.$$

Ако еден од броевите a и b е помал од 1, а другиот е поголем од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\bar{y}}|=[1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2+2ab}]^{\frac{1}{2}}=\frac{a+b}{1+ab}.$$

3. Нека $F_n=a^n\sin nA+b^n\sin nB+c^n\sin nC$, каде a,b,c,A,B,C се реални броеви, а $A+B+C=k\pi$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Докажи дека од $F_0=F_1=0$ следува дека за секој природен број n важи $F_n=0$.

Решение. Нека

$$z_1=a(\cos A+i\sin A),$$

$$z_2=b(\cos B+i\sin B),$$

$$z_3=c(\cos C+i\sin C),$$

$$E_n=a^n\cos nA+b^n\cos nB+c^n\cos nC,$$

$$G_n=E_n+iF_n.$$

Од Моавровата формула следува

$$G_n=a^n(\cos nA+i\sin nA)+b^n(\cos nB+i\sin nB)+c^n(\cos nC+i\sin nC)$$

$$=z_1^n+z_2^n+z_3^n.$$

Да забележиме дека $G_0=3$ и дека според условот на задчата G_1 и G_2 се реални броеви. Понатаму,

$$\begin{aligned} G_n &= (z_1+z_2+z_3)(z_1^{n-1}+z_2^{n-1}+z_3^{n-1}) - z_1(z_2^{n-1}+z_3^{n-1}) \\ &\quad - z_2(z_3^{n-1}+z_1^{n-1}) - z_3(z_1^{n-1}+z_2^{n-1}) \\ &= G_1G_{n-1} - (z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(z_1^{n-2}+z_2^{n-2}+z_3^{n-2}) + z_1z_2z_3(z_1^{n-3}+z_2^{n-3}+z_3^{n-3}) \\ &= G_1G_{n-1} + \tfrac{(G_2-G_1^2)G_{n-2}}{2} + abcG_{n-3}(\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C)). \end{aligned}$$

Ако претпоставиме дека за некој $n \geq 3$ броевите $G_{n-3}, G_{n-2}, G_{n-1}$ се реални, тогаш бидејќи $\sin(A+B+C)=0$ од горната рекурзија следува дека и G_n е реален број. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека сите членови на низата (G_n) се реални, па затоа за секој природен број n важи $F_n = 0$.

4. Множеството $S=\{1,2,...,n\}$ прво е разбиено на m, а потоа на $m+k$ непразни подмножества, при што $k>0$. Докажи дека најмалку $k+1$ елемент на множеството S првиот пат се наоѓале во побројно подмножество отколку вториот пат.

Решение. Нека $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ и $\{B_1, B_2, ..., B_{m+k}\}$ се разбивања на множеството S. За секој $i \in S$ со x_i да го означиме бројот на елементите на оној од блоковите $A_1, A_2, ..., A_m$ кој го содржи бројот i, а со y_i бројот на елементите на оној од блоковите $B_1, B_2, ..., B_{m+k}$ кој го содржи бројот i.

Да претпоставиме дека броевите $|A_1|, |A_2|, ..., |A_m|$ се меѓусебно различни. Тогаш меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ има точно $|A_j|$ кои се еднакви на $|A_j|$, каде $j \in \{1,2,...,m\}$. Затоа

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = m\,.$$

Лесно се покажува дека ова равенство важи и во случај кога меѓу броевите $|A_1|, |A_2|, ..., |A_m|$ има еднакви. Аналогно се докажува дека

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} = m+k\,.$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i}\right) = k\,.$$

Бидејќи сите собирци $\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i}$, $i=1,2,...,n$ се помали од 1, добиваме дека најмалку $k+1$ од овие собироци се позитивни броеви. Доволно е да забележиме дека бројот $\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i}$ е позитивен ако и само ако $x_i > y_i$, т.е. ако и само ако елементот i првиот пат се наоѓал во поброен блок отколку вториот пат.

Мала олимпијада

1. Даден е природен број $n \geq 3$. За n-членото множество реални броеви S со $A(S)$ да го онзачиме множеството од сите строго растечки трички аритметички низи составени од елементите на S. Колку најмногу елементи може да има множеството $A(S)$?

Решение. Нека $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Бројот на трички аритметики низи на елементи од множеството S чиј среден елемент е еднаков на членот a_k не е поголем од $\min\{k-1, n-k\}$, бидејќи првиот член на тие низи може да биде некој од елементите $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$, а последниот некој од елементите $a_{k+1}, ..., a_n$. Затоа множеството $A(S)$ има најмногу

$$\sum_{k=1}^{n} \min\{k-1, n-k\} = x_n$$

елементи. Ако $n = 2m$, тогаш

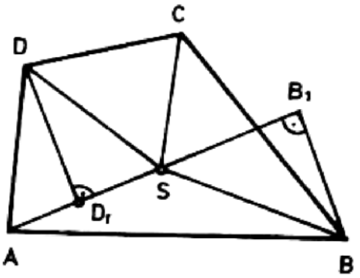
$$x_n = x_{2m} = 2(1+2+...+(m-1)) = m(m-1) = [\tfrac{n-1}{2}][\tfrac{n}{2}].$$

Ако $n = 2m+1$, тогаш

$$x_n = x_{2m+1} = 2(1+2+...+(m-1)) + m = m^2 = [\tfrac{n-1}{2}][\tfrac{n}{2}].$$

Притоа, ако $S = \{1, 2, ..., n\}$, тогаш множеството $A(S)$ има точно x_n елементи.

2. Во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ постои точка S таква што отсечките SA, SB, SC, SD го делат четириаголникот на четири дела со еднакви плоштини. Докажи дека една од дијагоналите на овој четириаголник ја полови другата.



Решение. Триаголниците ASD и ASB имаат еднакви плоштини и заедничка страна AS, па затоа висините DD_1 и BB_1 на овие триаголници се еднакви, цртеж десно. Затоа средината на дијагоналата BD припаѓа на правата AS. На сличен начин се докажува дека средината на дијагоналата BD припаѓа на правата CS, а правите BS и DS ја содржат средината на отсечката AC. Ако правите AS и CS се совпаѓаат, тогаш дијагоналата AC ја полови дијагоналата BD. Ако S е единствена заедничка точка на правите AS и CS, тогаш S е средина на дијагоналата BD, правите BS и DS не се совпаѓаат, па дјагоналата BD ја полови дијагоналата AC.

3. Нека a и b се ненегативни цели броеви. Докажи дека $5a \geq 7b$ ако и само ако постојат ненегативни цели броеви x, y, z, t такви што

$$\begin{aligned} x+2y+3z+7t&=a, \\ y+2z+5t&=b. \end{aligned}$$

Решение. Нека (x, y, z, t) е решение на дадениот систем во множеството ненегативни броеви. Тогаш

$$5a-7b=5(x+2y+3z+7t)-7(y+2z+5t)=5x+3y+z \geq 0 .$$

Нека $5a \geq 7b$ и $b=5k+r$, каде $k \geq 0$, $r \in \{0,1,2,3,4\}$. Едно решение (x, y, z, t) во множеството ненегативни цели броеви е:

$(a-7k, 0, 0, k)$, ако $r=0$;

$(a-7k-2, 1, 0, k)$, ако $r=1$,

$(a-7k-3, 0, 1, k)$ ако $r=2$,

$(a-7k-5, 1, 1, k)$ ако $r=3$,

$(a-7k-6, 0, 2, k)$ ако $r=4$.

Лесно се проверува дека секоја од наведените четворки е решение на системот. Ненегативноста на x координатата, на пример во случајот $r=3$, ја докажуваме на следниов начин: Од условот $5a \geq 7b$ следува $5a \geq 35k+21$. Бидејќи a е природен број следува $5a \geq 35k+25$, па затоа $a \geq 7k+5$, т.е. $a-7k-5 \geq 0$. Слично се постапува и во останатите случаи.