Ристо Малчески
Скопје

НЕКУЛКУ ЕЛЕМЕНТАРНИ АЛГЕБАРСКИ МЕТОДИ ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ

Во секојдневниот живот, а со самото тоа и во математиката, често пати се судруваме со проблеми од типот: од даден материјал да се направи цилиндричен сад со најголем волумен; од сите правоаголници со еднаков периметар да се најде оној со најголема плоштина и слично. Во случајот станува збор за проблеми во кои треба да определиме најмала, односно најголема вредност на дадена функција. Најмалите (минималните) и најголемите (максималните) вредности на дадена функција со едно име ги нарекуваме екстремни вредности (екстреми) на функцијата.

Во оваа статија, преку примери, ќе обработиме неколку познати алгебарски методи за определување екстремни вредности на некои елементарни функции. Притоа, за минимум и максимум на функција ја имаме следнава дефиниција.

1. ПОИМ ЗА МИНИМУМ И МАКСИМУМ

Дефиниција 1. Нека е дадена функцијата $f:D\to\mathbf{R}$, $y=f(x)$. За реалниот број m ќе велиме дека е *минимум* на функцијата f, ако за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)\geq m$ и постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков, што $f(x_0)=m$.

За реалниот број M ќе велиме дека е *максимум* на функцијата f, ако за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $f(x)\leq M$ и постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков, што $f(x_0)=M$.

Минимумот на функцијата $y=f(x)$ ќе го означуваме со $\min f(x)$, а максимумот со $\max f(x)$.

Пример 1. За секој $x\in\mathbf{R}$ важи $x^2\geq 0$ и $x^2=0$ ако и само ако $x=0$. Според тоа, за функцијата $f(x)=x^2$ важи $\min f(x)=0$. ♦

Пример 2. Најдете ја најмалата вредност на полиномот

а) $f(x)=4x^2+4x+1$ **б)** $f(x)x^2-5x+2$

Решение. а) Имаме

$$f(x)=4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x+1)^2.$$

а секоја вредност на аргументот x изразот $(2x+1)^2$ е ненегативен т.е. $(2x+1)^2 \geq 0$. Значи, најмалата вредност на $(2x+1)^2$ е нула и се достигнува кога $2x+1=0$ или $x=\frac{1}{2}$.

б) Бидејќи

$$f(x)=x^2-5x+2=x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+2=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{17}{4}$$

добиваме дека најмалата вредност на полиномот е $-\frac{17}{4}$ и таа се достигнува кога $(x-\frac{5}{2})^2=0$ т.е. $x=\frac{5}{2}$. ♦

Пример 3. За која вредност на променливата x функцијата

$$f(x)=x^4-6x^2+12$$

прима најмала вредност?

Решение. Бидејќи

$$f(x)=x^4-6x^2+12=x^4-6x^2+9+3=(x^2-3)^2+3$$

добиваме дека најмалата вредност на изразот $f(x)$ е 3 и таа се достигнува ако и само ако $x^2-3=0$ т.е. $x=\pm\sqrt{3}$. ♦

2. ЕЛЕМЕНТАРНИ СВОЈСТВА НА ЕКСТРЕМНИТЕ ВРЕДНОСТИ

Во овој дел, без доказ, ќе дадеме четири елементарни својства за екстремните вредности на функциите, кои често пати овозможуваат наоѓање на екстремни вредности на некои функции.

Својство 1. Нека е дадена функцијата $y=f(x)$ и реалниот број $p>0$.

a) Ако постои $\min f(x)$, тогаш постои $\min[p\cdot f(x)]$ и притоа важи $\min[p\cdot f(x)]=p\cdot\min f(x)$.

b) Ако постои $\max f(x)$, тогаш постои $\max[p\cdot f(x)]$ и притоа важи $\max[p\cdot f(x)]=p\cdot\max f(x)$. ♦

Својство 2. Нека е дадена функцијата $y=f(x)$ и реалниот број $p<0$.

a) Ако постои $\min f(x)$, тогаш постои $\max[p\cdot f(x)]$ и притоа важи

$$\max[p\cdot f(x)] = p\cdot \min f(x).$$

b) Ако постои $\max f(x)$, тогаш постои $\min[p\cdot f(x)]$ и притоа важи

$$\min[p\cdot f(x)] = p\cdot \max f(x). \ \blacklozenge$$

Својство 3. Нека функцијата $y = f(x)$ е таква, што $f(x)\neq 0$, за секој $x\in \mathbf{R}$.

a) Ако постои $\min f(x)$, тогаш постои $\max \frac{1}{f(x)}$ и притоа важи

$$\max \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\min f(x)}.$$

b) Ако постои $\max f(x)$, тогаш постои $\min \frac{1}{f(x)}$ и притоа важи

$$\min \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\max f(x)}. \ \blacklozenge$$

Својство 4. Нека функцијата $y = f(x)$ е таква, што $f(x)\geq 0$, за секој $x\in \mathbf{R}$.

a) Ако постои $\min f(x)$, тогаш постои $\min \sqrt{f(x)}$ и притоа важи

$$\min \sqrt{f(x)} = \sqrt{\min f(x)}.$$

b) Ако постои $\max f(x)$, тогаш постои $\max \sqrt{f(x)}$ и притоа важи

$$\max \sqrt{f(x)} = \sqrt{\max f(x)}. \ \blacklozenge$$

3. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Во следните примери ќе ја покажеме примената на својствата од претходната точка. Притоа ќе разгледаме неколку задачи, кои стандардно се решаваат со далеку поголеми теориски знаења од знаењата кои ние ќе ги користиме.

Пример 4. За која вредност на променливата x функцијата

$$A(x) = \frac{1}{4x^2+12x+10}$$

има најголема вредност?

Решение. Бидејќи броителот на функцијата $A(x)$ е константа, од својството 3 следува дека таа ќе има најголема вредност кога именителот кој е позитивен

$$B(x) = 4x^2+12x+10 = (2x+3)^2+1\geq 1$$

има најмала вредност. Според тоа, за $2x+3=0$ т.е. $x=-\frac{3}{2}$ изразот $B(x)$ ќе има најмала вредност 1, што значи дека за $x=-\frac{3}{2}$ функцијата $A(x)$ ќе има најголема вредност 1. ♦

Пример 5. За која вредност на променливата x функцијата

$$A(x)=13-\frac{5}{2+(x+0,3)^4}$$

има најмала вредност?

Решение. Од својството 2 следува дека функцијата $A(x)$ има најмала вредност кога функцијата

$$B(x)=\frac{5}{2+\left(x+0,3\right)^4}$$

има најголема вредност (зошто?). Понатаму, од својството 3 следува дека функцијата $B(x)$ има најголема вредност кога функцијата $C(x)=2+(x+0,3)^4$ има најмала вредност. Функцијата $C(x)$ има најмала вредност кога $(x+0,3)^4\geq 0$ прима најмала вредност, а тоа е за $x=-0,3$.

Конечно, најмалата вредност на функцијата $A(x)$ се достигнува за $x=-0,3$ и таа е еднаква на $A(-0,3)=13-\frac{5}{2+(-0,3+0,3)^4}=10,5$. ♦

Пример 6. Најдете ја најголемата вредност на изразот, како и вредноста на x за која таа се достигнува:

а) $\frac{5}{x^2-2x+5}$ **б)** $\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+3}$

Решение. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{5}{x^2-2x+5}=\frac{5}{(x-1)^2+4}$. Бидејќи $5>0$ и $(x-1)^2+4>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, од својствата 1 и 3 следува дека $f(x)$ ќе има најголема вредност кога функцијата $g(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geq 4$ прима најмала вредност, т.е. кога $(x-1)^2=0$, од што следува $x=1$. Значи, бараната најмала вредност е $\frac{5}{4}$ и таа се достигнува за $x=1$.

б) Дадениот израз ќе го трансформираме во обликот

$$\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+3}=\frac{2x^2-4x+6+1}{x^2-2x+3}=\frac{2(x^2-2x+3)+1}{x^2-2x+3}=2+\frac{1}{(x-1)^2+2}$$

Аналогно, како под а) заклучуваме дека најголемата вредност се достигнува за $x=1$ и таа е $\frac{5}{2}$. ♦

Пример 7. Најдете ги екстремните вредности на функцијата

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}\,.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=x^2+2x+2$. Бидејќи

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

заклучуваме дека функцијата $g(x)$ има минимум и истиот се достигнува за $x+1=0$, т.е. за $x=-1$. Притоа $\min g(x)=1$. Од својството 4 следува дека за $x=-1$ имаме $\min f(x)=\sqrt{\min g(x)}=\sqrt{1}=1$. ♦

Пример 8. Најдете ги екстремните вредности на функцијата

$$f(x)=\frac{-3}{\sqrt{3x^2+2x+1}}\,.$$

Решение. Како во претходниот пример, прво ја разгледуваме функцијата $g(x)=3x^2+2x+1$. Од

$$g(x)=3x^2+2x+1=3(x^2+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{3})=3(x^2+2\cdot\tfrac{1}{3}x+(\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{1}{3}-(\tfrac{1}{3})^2)$$

$$=3[(x+\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{9}]=3(x+\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}\geq\tfrac{2}{3}$$

заклучуваме дека $\min g(x)=\frac{2}{3}$ и истиот се достигнува за $(x+\frac{1}{3})^2=0$, т.е. за $x=-\frac{1}{3}$.

Од својството 4 следува дека

$$\min\sqrt{g(x)}=\sqrt{\min g(x)}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

и истиот се достигнува за $x=-\frac{1}{3}$. Сега, до својството 3 добиваме дека за $x=-\frac{1}{3}$ важи

$$\max\frac{1}{\sqrt{g(x)}}=\frac{1}{\min\sqrt{g(x)}}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,,$$

а од својството 2 добиваме дека

$$\min f(x)=\min\frac{-3}{\sqrt{g(x)}}=-3\cdot\max\frac{1}{\sqrt{g(x)}}=-3\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Функцијата $g(x)$ нема максимум, па затоа и функцијата $f(x)$ нема да има максимум. Конечно, функцијата $f(x)=\frac{-3}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$ има само еден минимум и тој се достигнува во точката со апсциса $x=-\frac{1}{3}$. ♦

Пример 9. За кои вредности на променливите x и y изразот

$$A(x,y)=\frac{1-(2x-y)^2}{10+(1-3x+y)^2}$$

прима најголема вредност?

Решение. Бидејќи изразот во именителот е позитивен т.е.

$C(x,y)\equiv 10+(1-3x+y)^2\geq 10$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$

дадениот израз ќе прима најголема вредност кога изразот во броителот

$$B(x,y)=1-(2x-y)^2$$

прима најголема вредност, а изразот во именителот $C(x,y)$ прима најмала вредност.

Изразот $B(x,y)$ прима најголема вредност ако $2x-y=0$, а изразот $C(x,y)$ прима најмала вредност ако $1-3x+y=0$. Решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases}2x-y=0\\1-3x+y=0\end{cases}$$

наоѓаме $x=1, y=2$ и тоа се вредностите за кои $A(x,y)$ прима најголема вредност. ♦

На крајот од овој дел ќе разгледаме две карактеристични задачи и примената на истите.

Пример 10. Нека $a>0$. Ако $x+y=a$, тогаш производот xy прима најголема вредност за $x=y=\frac{a}{2}$. Докажете!

Решение. Јасно, најголемата вредност за производот се постигнува кога $x>0$, $y>0$. Од очигледното неравенство $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$, и од условот $x+y=a$ добиваме дека $xy\leq\frac{a^2}{4}$. Според тоа најголемата вредност на производот е $\frac{a^2}{4}$ и таа се достигнува кога $x=y$. Имајќи предвид дека $x+y=a$ добиваме $x=y=\frac{a}{2}$.

Пример 11. Одредете ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, каде a и b се позитивни броеви такви што $a+b=4$.

Решение. Нека $F=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Од $a+b=4$ следува $b=a-4$. Значи

$$F=\frac{1}{a}+\frac{1}{4-a}=\frac{4}{a(4-a)}.$$

Најмалата вредност на F се достигнува кога $a(4-a)$ е најголем. Според пример 10 производот $a(4-a)$ е најголем кога $a=4-a$. Според тоа, најмалата вредност на F се достигнува кога $a=2$ и таа изнесува $\frac{4}{2(4-2)}=1$. ♦

Пример 12. Нека $a>0$. Ако $xy=a, x>0, y>0$ тогаш збирот $x+y$ прима најмала вредност за $x=y=\sqrt{a}$. Докажете!

Решение. Од неравенството $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$, и од условот $xy=a$ добиваме дека $2\sqrt{a}\leq x+y$. Значи збирот $x+y$ е поголем или еднаков од $2\sqrt{a}$, па неговата најмала вредност ќе биде $2\sqrt{a}$ и ќе се достигне кога $2\sqrt{a}=x+y$. Но, во неравенството $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$ равенство се достигнува кога $x=y$, па од $2\sqrt{a}=x+y$ добиваме $x=y=\sqrt{a}$. ♦

Пример 13. Одредете ја најголемата вредност на изразот

а) $\frac{x}{9x^2+4}$ и **б)** $\frac{x}{2x^2-3x+8}$.

Решение. а) Најголемата вредност на дадениот израз треба да ја бараме за ненегативните вредности на x. За $x=0$ таа вредност не се достигнува, па да претпоставиме дека $x>0$. Тогаш $\frac{x}{9x^2+4}=\frac{1}{9x+\frac{4}{x}}$ па дадениот израз прима најголема вредност кога неговиот именител е најмал (броителот е константен). Бидејќи $9x\cdot\frac{4}{x}=36$ од претходната задача следува дека изразот $9x+\frac{4}{x}$ има најмала вредност кога $9x=\frac{4}{x}$, т.е. $x=\frac{2}{3}$. Конечно, изразот $\frac{x}{9x^2+4}$ прима најголема вредност кога $x=\frac{2}{3}$ и таа изнесува $\frac{1}{12}$.

б) Постапете аналогно како во решението на а). ♦

4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Задача 1. Даден е изразот

$$A\equiv\sqrt{x^2+y^2-z^2+2xy}\,.$$

Ако $x=361979$, $z=561980$, одредете ги сите вредности на y за кои дадениот израз има најмала вредност.

Задача 2. Одредете ги вредностите на променливите x и y така што полиномот $P(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+13$ прима најмала вредност.

Задача 3. За кои вредности на променливите x,y,z изразот

$$x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$$

прима најмала вредност? Најдете ја таа вредност.

Задача 4. За кои вредности на a и b изразот

$$A(a,b)=a^2-a\sqrt{2}+b-2\sqrt{b}+\frac{3}{2}$$

прима најмала вредност?

Задача 5. Одредете ги вредностите на променливите a и b за кои изразот

$$P(a,b)=\frac{3-(4-\frac{a-b}{3})^2}{5+(\frac{b}{3}+\frac{a-b}{4}-5)^2}$$

прима најголема вредност.

Задача 6. Докажете дека

а) Производот на два позитивни броја, чиј што збир на квадрати е константен, е најголем кога тие два броја се еднакви.

b) Збирот на квадратите на два броја, чиј збир е константен, е најмал кога тие два броја се еднакви.

Задача 7. Одредете ја најмалата вредност на изразот

$$P(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)\ .$$

За која вредност на променливата x таа се достигнува?

Задача 8. Одредете ги екстремните вредности на функциите

а) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$, б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ и в) $f(x)=\frac{4x}{x^2+5x+8}$.

Задача 9. а) Од сите правоаголници чиј периметар е $8cm$, најдете ги страните на оној со најголема плоштина.

б) Најдете ги страните на правоаголникот со најмал периметар, ако неговата плоштина е $100m^2$.

в) Кој од сите правоаголници со дијагонала $d=4cm$ има најголем периметар? Колку изнесува периметарот на тој правоаголник?

г) Одредете кој од сите правоаголници чија дијагонала е $d=4cm$ има најголема плоштина и колку изнесува таа плоштина?

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ