Методи Главче, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

МЕРИМЕ И СПОРЕДУВАМЕ ТЕЖИНИ II

Во минатиот број разгледувавме проблеми во кои требаше со најмал број мерења на вага без тегови, меѓу предмети кои на изглед се еднакви да се пронајде предметот за кој имаме информација дека е полесен (потежок) од останатите предмети. Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи на пронаоѓање на предмет кој се разликува по тежина, но за кој не знаеме дали е полесен или потежок од останатите на изглед исти предмети.

1. Во кутија се наоѓаат четири топчиња на изглед еднакви, (едно од нив има различна маса од останатите три). Колку мерења се потребни за да се најде топчето со различна маса? Да се определи дали тоа топче е полесно или потешко.

   Решение. Нека топчињата ги означиме со T_1, T_2, T_3, T_4 и најпрво да ги споредиме топчињата T_1 и T_2. Можни се следните случаи:

   - Ако $T_1 = T_2$, тогаш T_1 и T_2 се исправни топчиња и ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3 = T_1$, тогаш неисправно е топчето T_4, а дали е полесно или потешко констатираме со третото мерење. Ако $T_3 > T_1$, тогаш неисправно е топчето T_3 и T_3 е потешко. Ако $T_3 < T_1$, тогаш неисправно е топчето T_3 и T_3 е полесно.
   - Ако е $T_1 > T_2$, тогаш исправни се топчињата T_3 и T_4, па ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3 = T_1$, тогаш T_2 е полесно топче. Ако е $T_3 < T_1$, тогаш T_1 е потешко топче.
   - Ако е $T_1 < T_2$, тогаш исправни се топчињата T_3 и T_4, па ги споредуваме T_3 и T_1. Ако е $T_3 = T_1$, тогаш T_2 е потешко топче. Ако е $T_1 < T_3$, тогаш T_1 е полесно топче.

   Значи за да се најде топчето со различна маса потребни се најмалку две мерења, а за да се определи дали тоа е потешко или полесно, потребни се три мерења.

2. Од 6 на изглед еднакви топчиња, едно нема иста маса како останатите. Колку најмалку мерења ни се потребни за да се најде топчето со раз-

лична маса? Да се определи дали топчето со различна маса е потешко или полесно.

Решение. Потребни се најмалку три мерења. Да ги означиме топчињата со $T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, S_3$.

Ставаме T_1, T_2 на левиот и S_1, S_2 на десниот тас. Ако е постигната рамнотежа, тогаш топчето со различна маса е или T_3 или S_3. Во овој случај во следните две мерења ги споредуваме T_3 и S_3 со едно од останатите 4 топчиња и со тоа задачата е решена. Ако едниот тас, на пример левиот, натежнал, тогаш едно од T_1, T_2 е потешко или едно од топчињата S_1, S_2 е полесно.

Во случај во првото мерење да нема рамнотежа, ги отстрануваме T_2 и S_2 од вагата, го префрламе T_1 на десниот и на левиот тас ги ставаме топчињата T_3 и S_3.

Ако натежне десниот тас тогаш топчето T_1 е потешко. Ако натежне левиот тас, тогаш топчето S_1 е полесно.

Ако во второто мерење е воспоставена рамнотежа, тогаш неисправно е T_2 или S_2, па доволно е едно од овие толчиња да го споредиме со едно од останатите 4 топчиња.

3. Од 8 топчиња, еднакви по изглед, едно има различна маса од останатите. Колку најмалку мерења ни се потребни за да констатираме кое од топчињата има различна маса? Да се определи дали топчето со различна маса е потешко или полесно.

Решение. Нека топчињата ги означиме со $T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, S_2, S_3, S_4$.

Ги ставаме T_1, T_2, T_3 на левиот и S_1, S_2, S_3 на десниот тас. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш во следните две мерења го споредуваме T_4, па S_4 со едно од шесте измерени топчиња со еднаква маса. На тој начин констатираме кое топче е полесно, односно потешко и со тоа задачата е решена.

Ако не сме добиле рамнотежа, тогаш едната страна на вагата претежнала. Нека претпоставиме дека тоа е левата страна. Тогаш едно од топчињата T_1, T_2, T_3 е потешко или едно од топчињата S_1, S_2, S_3 е полесно.

Ги отстрануваме T_3 и S_3 од вагата, T_2 го преместуваме на десната страна, а на левата страна заедно со T_1 ги ставаме исправните топчиња T_4 и S_4.

Ако натежне десната страна, тогаш T_2 е потешкото топче. Ако натежне левата страна тогаш или T_1 е потешко или едно од топчињата S_1 и S_2 е полесно, па треба да ги споредиме S_1 и S_2. Ако во второто мерење е воспоставена рамнотежа, тогаш неисправно топче е или T_3 или S_3, па доволно е едно од топчињата да споредиме со едно од останатите шест исправни топчиња. Според тоа, за да констатираме кое топче има различна маса и е полесно или потешко, потребни се најмалку три мерења.

4. Колку најмалку мерења на вага без тегови се потребни за да од 12 топчиња, на изглед потполно еднакви но едно е со различна маса, констатираме кое топче е неисправно? Дали неисправното топчето е полесно или потешко?

Решение. Потребни се најмалку три мерења. Постапката е следната. Ги означуваме топчињата со $T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, S_2, S_3, S_4, M_1, M_2, M_3, M_4$, и ги вршиме следните мерења:

1 *мерење*. Ги ставаме на левата страна топчињата T_1, T_2, T_3, T_4, а на десната страна топчињата S_1, S_2, S_3, S_4.

2 *мерење*. (а) Ако при првото мерење е воспоставена рамнотежа, ставаме M_1 и M_2 на левиот, а T_1 и M_3 на десниот тас.

Понатаму постапуваме како во соодветниот случај со 4 топчиња (види задача 15).

(б) Ако претежне едната страна, да кажеме левата, тогаш или едно од топчињата T_1, T_2, T_3, T_4 е потешко, или едно од топчињата S_1, S_2, S_3, S_4 е полесно. Тогаш ги отстрануваме топчињата T_4 и S_4 од вагата, S_3 го префрлуваме на левиот тас, а T_1 и T_2 на десниот. На левиот тас ги ставаме топчињата M_1 и M_2.

3 *мерење*. Размислувајќи слично како во случајот со 8 топчиња, во третото мерење лесно можеме да констатираме кое топче е неисправно и дали е потешко или полесно.

Со горните заклучувања се определува и дали топчето е полесно или потешко.

5. Во пет грнцња се наоѓаат златници. Во секое од нив сите златници се со иста тежина: $5g$ или $6g$. На изглед златниците не се разликуваат. Како можеме со помош на само едно мерење да констатираме со која тежина се златниците во сите грнцња?

Решение. Грнињата да ги означиме со броевите 1,2,3,4,5. Потоа, од првото грне земаме еден златник ($2^0 = 1$), од второто 2 златници ($2^1 = 2$) од третото 4 ($2^2 = 4$), од четвртото 8 ($2^3 = 8$), од петтото 16 ($2^4 = 16$), вкупно 31 златник. Од вкупно измерената тежина ќе одземеме $1155g$ (тоа е $31 \cdot 5g$) и добиената разлика ќе ја изразиме во бинарен броен систем (систем со основа 2, во кој

$$1 = 1_2, 2 = 10_2, 3 = 11_2, 4 = 100_2, 5 = 101_2, 6 = 110_2, 7 = 111_2, 8 = 1000_2$$

итн.). Секоја цифра на овој бинарен број, која е различна од нула, покажува во кое грне се златниците со тежина од $6g$, и тоа на грнињата означени со броевите 1,2,3,4,5, соодветствуваат цифрите на бинарниот број земени од десно на лево.

На пример, ако потешките златници се наоѓаат во грнињата 2,4 и 5, тогаш измерената тежина ќе биде $181g$, што е за $26g$. повеќе од $155g$. Бројот 26 во бинарен броен систем има запис 11010_2, па цифрата 1 се наоѓа на второто, четвртото и петтото место од десно.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ