О ЈЕДНОЈ ХИПОТЕЗИ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

мр Марија Станић, **Крагујевац**

У математици, кроз читаву њену историју, јављао се велики број хипотеза. За неке од њих требало је и више векова да би биле доказане или оповргнуте. Међутим, велики број хипотеза и данас представља отворене проблеме. Теорија бројева је, вероватно као ни једна друга област математике, препуна таквих примера. Применом рачунара могућа је брза провера у све већим скуповима бројева. Тиме је заправо олакшано оповргавање погрешних хипотеза, али не и доказивање тачних.

Хипотезу о којој ће овде бити више речи поставио је румунски математичар Dorin Andrica. Постоје два разлога зашто пишемо баш о њој. Први је једноставност формулације. Наиме, да би се разумела ова хипотеза потребно је знати само шта је прост број и знати функцију квадратни корен. Други разлог је што на први поглед тврђење хипотезе изгледа невероватно.

Пре него што дамо саму формулацију хипотезе, подсетићемо читаоце на неколико једноставних чињеница везаних за просте бројеве.

Дефиниција. *Цео број $p > 1$ је* ***прост*** *ако нема ниједан делилац d, $1 < d < p$. Цео број $m > 1$ који није прост је* ***сложен*** *број.*

Теорема 1. (***Еуклид***) *Постоји бесконачно много простих бројева, тј. од сваког простог броја постоји већи прост број.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоји коначно много простих бројева. Нека су то бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_k$, и нека су сви остали природни бројеви (већи од 1) сложени. Посматрајмо број $n = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$. Према нашој претпоставци он мора бити сложен, па мора бити дељив неким простим бројем. Међутим, то је немогуће јер при дељењу било којим од бројева $p_1, p_2, \ldots, p_k$ даје остатак 1. Контрадикција. $\square$

Теорема 2. *Ако је дат произвољан природан број k, увек се може наћи k узастопних сложених бројева.*

Доказ. Посматрајмо следећих k узастопних природних бројева:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (k+1)k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 + 2,\\
A_2 &= (k+1)k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 + 3,\\
&\vdots\\
A_k &= (k+1)k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 + k + 1.
\end{aligned}$$

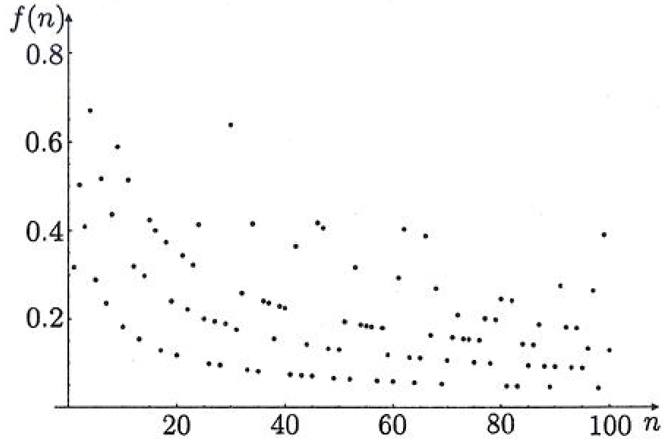
Пошто је број A_1 дељив са 2, A_2 са $3, \ldots, A_k$ са $k+1$, свих k бројева су сложени. $\square$

Поређајмо сада све просте бројеве у један растући низ. Обележимо n−ти прост број са $p_n, n \in \mathbb{N}$. Дакле, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots, p_{20} = 71, \ldots, p_{100} = 541, \ldots$.

Хипотеза. *Ако са p_n обележимо n−ти прост број, $n \in \mathbb{N}$, тада је*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дефинишимо функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ са $f(n) = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дакле, хипотеза тврди да је $f(n) < 1$ за све $n \in \mathbb{N}$. На слици 1 у координатној равни су приказане тачке $\{(n, f(n)) \mid 1 \leqslant n \leqslant 100\}$.



Слика 1.

Хипотеза још није доказана. Провере које су до сада урађене указују на то да је хипотеза тачна. Притом, највећа до сада добијена вредност за $f(n)$ је за $n = 4$:

$$f(4) = \sqrt{11} - \sqrt{7} \approx 0.6708735.$$

Ево неколико случајно изабраних вредности функције f: $f(550) = 0.0949277$, $f(1000) = 0.0449381$, $f(10^6) = 0.000508232$, $f(10^8) = 0.0000886033$, $f(10^{10}) = 0.00000597496$.

Више информација о овој хипотези, али и о многим другим повезаним с њом, може се наћи на интернету. За почетак претраге предлажемо вам да посетити следеће две адресе

http://en.wikipedia.org/wiki/Andrica's_conjecture
http://mathworld.wolfram.com/AndricasConjecture.html

Докле ћете одатле стићи зависи само од вас.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година