Сојузен натпревар 1977

Седмо одделение

1. Во еден ред стојат 1000 ученици. Дозволено е своите места во редот да ги заменат само оние ученици (т.е. парови ученици) кои имаат заеднички сосед. Дали со ваква замена на местата може ученик кој стои на еден крај на редот да стигне на другиот крај на редот.

   Решение. Со броевите од 1 до 1000 да ги означиме сите места на кои стојат учениците. Според условот местата може да ги заменат само учениците чии броеви се разликуваат за 2. Според тоа, ученик кој е на непарно место повторно оди на непарно место. Затоа, првиот ученик кој има место број 1 никогаш не може да дојде на местото на последниот ученик кој има место број 1000.

2. Производот на четири последователни парни природни броеви е 13440. Определи ги овие броеви.

   Решение. Нека се дадени последователните парни броеви $2n$, $2n+2$, $2n+4$ и $2n+6$. Тогаш

   $$2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)=13440,$$

   од каде добиваме

   $$n(n+1)(n+2)(n+3)=840=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7.$$

   Бидејќи 5 и 7 се прости броеви, еден од множителите мора да е бројот $6=2\cdot 3$, па другиот множител е $2\cdot 2=4$. Според тоа,

   $$n(n+1)(n+2)(n+3)=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7,$$

   па затоа бараните броеви се 8, 10, 12 и 14.

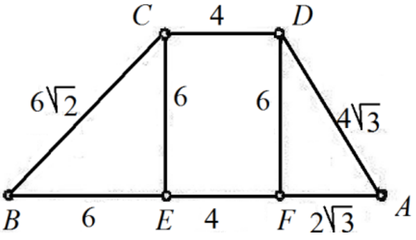
3. Работниците Андреј, Борис и Цане заеднички завршуваат една работа за 1 час. Познато е дека секој од нив истата работа ја завршува за цел број часови. Освен тоа, се знае дека Борис работи побрзо од Андреј, а поспоро од Цане. За колку часа оваа работа ќе ја заврши секој од тројцата работници работејќи сам?

   Решение. Нека претпоставиме дека Андреј сам ќе ја заврши работата за a часови, Борис за b и Цане за c часови. Тогаш за 1 час тие ќе сработат соодветно $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$-ти дел од работата. Бидејќи работата заедно ја завршуваат за 1 час добиваме $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Но, a,b,c се природни броеви за кои важи $c<b<a$, па оттука лесно следува дека $a=6, b=3, c=2$ саати.

4. Должината на висината на трапезот е еднаква на $6\,cm$, а должината на едната основа е $4\,cm$. Внатрешните агли на трапезот на таа основа се 120° и 135°.

а) Конструирај го овој трапез.

б) Определи ги периметарот и плоштината на овој трапез.



Решение. а) Прво ја конструираме отсечката $CD=4\,cm$, а потоа аглите

$$\measuredangle C = 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ \text{ и}$$

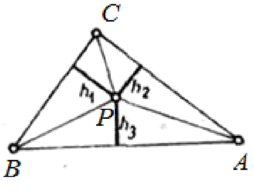
$$\measuredangle D = 120^\circ = 2\cdot 60^\circ.$$

Потоа, конструираме права p паралелна на CD која е на растојание $6\,cm$ од CD. Пресечните точки на правата p со краците претходно конструираните агли се темињата A и B на трапезот.

б) Повлекуваме висини CE и DF (види цртеж). Тогаш бидејќи $\measuredangle BCE = 45^\circ$ добиваме $BE=CE=6\,cm$ и $BC=6\sqrt{2}$, а од $\measuredangle ADF=30^\circ$ следува $DF=\frac{AD\sqrt{3}}{2}$, па затоа $AD=4\sqrt{3}$ и $FA=\frac{1}{2}AD=2\sqrt{3}$.

Сега ги знаеме страните $CD=4\,cm$, $AD=4\sqrt{3}\,cm$, $AB=10+2\sqrt{3}\,cm$ и $BC=6\sqrt{2}\,cm$, па затоа $O=AB+BC+CD+DA=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}\,cm$ и $P=\frac{AB+BC}{2}\cdot h=42+6\sqrt{3}\,cm^2$.

5. Даден е триаголник со должини на страни 3, 4 и 5. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која од секоја страна на триаголникот е оддалечена помалку од 1?



Решение. Бидејќи $3^2+4^2=5^2$, дадениот триаголник е правоаголен и неговата плоштина е $P=\frac{3\cdot 4}{2}=6$.

Да претпоставиме дека постои точка P во триаголникот ABC таква што нејзините растојанија до страните BC,CA,AB се h_1,h_2,h_3 и важи $h_1<1,h_2<1,h_3<1$. Тогаш

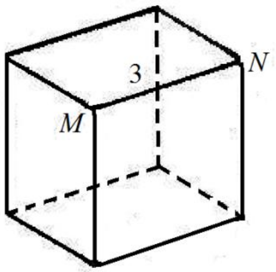
$$6=P_{ABC}=P_{BCP}+P_{CAP}+P_{ABP}$$
$$=\frac{3h_1}{2}+\frac{4h_2}{2}+\frac{6h_3}{2}<\frac{3\cdot1}{2}+\frac{4\cdot1}{2}+\frac{6\cdot1}{2}=6$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

Осмо одделение

1. Дали е можно рабовите на коцката да ги означиме со различни броеви 1, 2, 3, ..., 11, 12 така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме, за сите темиња на коцката да е еднаков?

Решение. Ако предложеното означување е можно, тогаш збирот на сите осум збирови придружени на темињата на коцката ќе биде $2(1+2+3+,,,+12)$. На цртежот десно гледаме дека бројот 3 кој е придружен на работ MN се јавува во збирот на броевите на темињата M и N. Тоа значи дека секој од броевите 1, 2, 3, ..., 11, 12 се јавува во збировите два пати, па затоа збирот на осум еднакви природни броеви ќе биде $2\cdot78=156$. Но, бројот 156 не е делив со 8, што значи дека бараното означување не е можно.



2. а) Докажи дека меѓу било кои пет цели броеви постојат два броја чија разлика е делива со 3.

б) Докажи дека меѓу било кои пет цели броеви постојат три броја чиј збир е делив со 3.

Решение. Можни остатоци при делење со 3 се 0, 1 и 2. Затоа секој природен број може да се запише во еден од облиците $3m$, $3n+1$ и $3p+2$, каде $m,n,p\in\mathbb{N}$. Тоа значи дека множеството природни броеви е поделено на три класи и во секоја класа се броеви кои при делење со 3 даваат ист остаток.

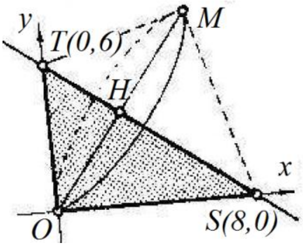
а) Меѓу пет броеви мора два да припаѓаат на иста клас, што значи дека нивната разлика е делива со 3.

б) Ако меѓу петте броеви се наоѓаат три броја кои припаѓаат на иста класа, тогаш е јасно дека нивниот збир е делив со 3. Ако не постојат три броја кои припаѓаат на иста класа, тогаш од секоја класа мора да има барем по еден претставник па нивниот збир е делив со 3. Провери!

3. Правата $y=ax+b$ минува низ точката $T(0,6)$, со кординатните оски формира триаголник со плоштина 24 и не минува низ третиот квадрант.

а) Определи ги a и b.

б) Определи го волуменот на телото кое се добива со ротација на на добиениот триаголник околу неговата најдолга страна.



Решение. а) Триаголникот OST е правоаголен (цртеж десно) и неговата плоштина е еднаква на 24, па затоа

$$24=P=\tfrac{1}{2}OT\cdot OS=3OS,$$

од каде следува $OS=8$. Значи, правата $y=ax+b$ минува низ точките $T(0,6)$ и $S(8,0)$, па затоа $b=6$ и $8a+b=0$, од каде наоѓаме $a=-\tfrac{3}{4}$.

б) Со ротација околу најдолгата страна триаголникот формира двостран конус со радиус OH и висина ST. Имаме,

$$ST=\sqrt{OS^2+OT^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10 \text{ и}$$

$$24=P=\tfrac{ST\cdot OH}{2}=5OH, \text{ т.е. } OH=4,8.$$

За плоштината на двојниот конус имаме

$$P=\pi\cdot OH\cdot OT+\pi\cdot OH\cdot OS=67,2\pi,$$

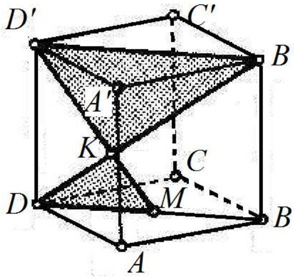
а за волуменот имаме

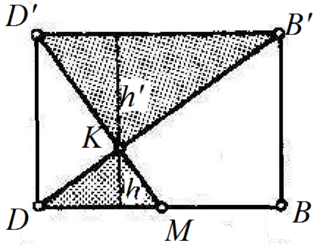
$$V=\tfrac{\pi}{3}OH^2\cdot SH+\tfrac{\pi}{3}OH^2\cdot HT=\tfrac{\pi}{3}OH^2\cdot(SH+HT)=\tfrac{\pi}{3}OH^2\cdot ST=76,8\pi.$$

4. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб a. Пресекот на дијагоналите на основата $ABCD$ е точката M. Отсечките DB' и MD' се сечат во точката K. Определи ги плоштините на триаголниците KDM и $KB'D'$.

Решение. Триаголниците KDM и $B'D'K$ припаѓаат на правоаголникот $BDD'B'$, чии страни се $BB'=a$ и $BD=a\sqrt{2}$. Од $DM\,||\,B'D'$ следува дека триаголниците KDM и $B'D'K$ се слични, па затоа

$h:h'=DM:D'B'=1:2$. Значи, $h=\frac{1}{2}h'$, па како $h+h'=a$, добиваме дека $h=\frac{a}{3}$ и $h'=\frac{2a}{3}$. Сега имаме:





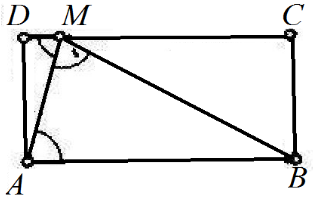
$$P_{KMD}=\frac{1}{2}DM\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$$ и

$$P_{B'D'K}=\frac{1}{2}B'D'\cdot h'=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{2a}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

5. Даден е правоаголник $ABCD$ чија страна AB е два пати подолга од страната BC. На страната CD е избрана точка M таква што $\measuredangle AMD=\measuredangle AMB$.

   а) Пресметај го $\measuredangle AMB$.

   б) Ако должината на отсечката DM е еднаква на 1, пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.



Решение. а) Од $AB\parallel CD$ следува $\measuredangle BAM=\measuredangle AMD$ (наизменични агли), па затоа $\measuredangle BAM=\measuredangle AMB$ (цртеж десно). Според тоа, триаголникот ABM е рамнокрак и $BM=AM$. Хипотенузата BM на правоаголниот триаголник BCM е два пати поголема од катетата (бидејќи по претпоставка $AB=2BC$, а $BM=AB$). Како што знаеме, ваков триаголник е половина од рамностран триаголник, па затоа $\measuredangle BMC=30^\circ$. Конечно, $\measuredangle AMB+\measuredangle AMD=150^\circ$, односно $\measuredangle AMB=\measuredangle AMD=75^\circ$.

б) Нека $BC=b$. Тогаш $CD=2b$. Бидејќи $CD=CM+DM$, а $DM=1$ и $CM=\sqrt{BM^2-BC^2}=b\sqrt{3}$, добиваме $2b=b\sqrt{2}+1$, од каде наоѓаме $b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$.Сега плоштината на триаголникот е

$$P=2b^2=2(2+\sqrt{3})^2=2(7+4\sqrt{3}).$$