Владимир Стојановиќ
Белград

КОЛКУ Е ГОЛЕМО БЕСКОНЕЧНОТО

Ќе ти рече некој:

"Да даде Господ да живееш три милијарди секунди!".

Дали те проколнува (затоа што ти е непријател) или ти е пријател кој ти посакува добро?

"Да пресметаме" дали ти се обратил пријател.

Еден час има 3 600 секунди, а еден ден 24 пати повеќе, што изнесува 86 400 секунди. Кога ќе поделиме 3 000 000 000 секунди со 86 400, занемарувајќи го остатокот при делењето ќе добиеме 34 722 дена, а тоа е повеќе од 95 години. Значи, треба да одговориш: "Благодарам, **пријателе,** и јас ти го посакувам истото".

Навистина, три милијарди е фантастично голем број!

Бројот три милијарди го запишуваме со 10 декадни цифри (3 000 000 000). Обидете се да го замислите бројот 22000222000222000222 кој има 20 цифри! Тешко оди? Уште потешко е да се замисли, а не и да се спореди со нешто, големината на бројот што се запишува со 100 или дури со 1 000 цифри. Таквите броеви се викаат **астрономски**, бидејќи толкави броеви се неопходни за астрономите да ја запишат меѓусебната оддаленост на планетите и ѕвездите. Меѓутоа, ако кој било од овие броеви го "споредиме" со бројот на природните броеви, ќе заклучиме дека сите тие се "мали деца" во однос на количината на природните броеви.

Дали знаете колку природни броеви има?

Ако сакаме да утврдиме колку има од нешто, мораме тоа да го **преброиме**. Но, природните броеви можеме да ги броиме и броиме и **никогаш** нема да дојдеме до крајот. Слично ќе поминеме ако пробаме да изброиме колку точки има една права. Заради неможноста да се изврши пребројување, велиме дека природните броеви ги има **бесконечно многу**, а правата има **бесконечно многу** точки. Но, колку е тоа многу? Како тоа да го замислиме?

Приближно, **никако**!

На пример, да се обидеме да замислиме колку природни броеви има и да дојдеме до заклучок дека се "толку", а потоа веднаш ни станува јасно дека се "уште повеќе од толку". И така повторно и повторно, додека главата не не́ заболи. Слично, ако вселената ја замислиме како сфера, и се обидеме да допреме до крајот на нејзиниот радиус, постојано ќе доаѓаме до некаков "крај", а потоа ќе сфатиме дека ќе мораме да одиме понатаму, и понатаму, бидејќи "радиусот" на вселената, исто така, е бесконечно голем.

Очигледно е, она што е бесконечно големо, не може да се собере во нашата конечна глава!

Што може да се направи овде? Ни останува уште да ја видиме можноста како тие проблеми ги решаваат математичарите, бидејќи тие умеат "сешто" да пресметаат.

Да ги прашаме:

"Како да работиме со бесконечно големо?"

Со овој тежок проблем се соочил Евклид[*)] пред скоро 2500 години во своите "Елементи". Правата е фигура која се протега колку и вселената, т.е. ни правата нема крај - таа е бесконечна (неограничена). Евклид вовел аксиома, таканаречен *Втор постулат*: "Се бара секоја права да може неограничено да се продолжи". (Прашајте ги своите наставници што се тоа аксиоми!)

Идејата со воведувањето на аксиомите се покажала како спасоносна во случај на неможност на непосредно проверување на аргументите, а **бесконечно** е, всушност, нешто што никако не може да се провери. Така со воведување на аксиомите во множеството на природните броеви ќе се реши проблемот за нивното пребројување. Доволни се две аксиоми. Прва: "Бројот 1 е најмал природен број" и втората: "Секој природен број n има точно еден следбеник n' каде $n' = n + 1$".

Значи, $n'>n$, па сега можеме да се ослободиме од "задолжителните пребројувања". Имено, ќе утврдиме дека множеството на природните броеви е неограничено (бесконечно), па не можеме да го "изброиме докрај". Навистина, ако природните броеви би ги имало конечно многу, тогаш би успеале да ги преброиме, односно ќе го најдеме најголемиот природен број, да речеме бројот N. Но, според наведената аксиома, постои и следбеник на овој број: $N' = N + 1$, па N' е поголем од N. Заклучуваме дека не постои најголем природен број, па не е можно пребројување.

[*)] Евклид, старогрчки математичар (околу 365 - 300 година п. н. е.)

Значи, не успеавме да ги преброиме природните броеви, но некако сфативме што се подразбира кога ќе кажеме дека ги има бесконечно многу. За означување на бесконечно големите броеви го користиме симболот ∞.

Природните броеви човекот ги измислил од потреба за **пребројување**. Пребројувањето на елементите на некое множество S се врши така што, со математички јазик кажано, се врши **обратно еднозначно пресликување** на тоа множество и подмножество K кое одговара на множеството на природните броеви: $K = \{1, 2, 3, ..., k\}$. (Ако пресликувањето е **обратно еднозначно**, тогаш на секој елемент од множеството S одговара еден елемент од множеството K и обратно, на секој елемент од множеството K одговара еден елемент од множеството S.) Бројот k зависи од количеството на елементи на множеството S и, всушност, k е број на елементите на тоа множество.

Со одредување на бројот k ние сме ги **преброиле** елементите на множеството S.

Кога ќе се сретнете со бесконечни величини, мора да бидете максимално внимателни. Пресметувањата со бесконечни величини не подлежат на законите што важат за конечните величини. Така, на пример: $\infty + 5 = \infty$, $3 \cdot \infty = \infty$, $\frac{\infty}{12} = \infty$, $\infty + \infty = \infty$. Меѓутоа, не знаеме што во општ случај добиваме од: $\infty - \infty$, или $0 \cdot \infty$, или $\frac{\infty}{\infty}$. Дури, како што подоцна ќе покажеме, не е сигурно ни дека е $9 \cdot \infty = \infty$.

А сега обрнете внимание! Ќе се уверите дека во множествата со бесконечно многу елементи некои претпоставки, што се логични во обичните пресметки, овде стануваат нелогични, а нелогичните релации од конечните множества може овде да бидат сосема логични.

Најпрво ќе го дефинираме "пребројувањето" на бесконечните множества.. Како и кај обичното броење, ќе го користиме споредувањето со множеството на природните броеви. За некое бесконечно множество A велиме дека може да се **изброи**, т.е. да има "еднаков број" на елементи како и множеството на природните броеви, ако тоа со обратно еднозначно пресликување може да се преслика на множеството на природните броеви. Ова пресликување (пребројување) го изведуваме така што елементите на множеството *A* ќе ги означиме со: a_1, a_2, a_3, ..., при што на секој елемент придружуваме точно по еден природен број, т.е. бројот во индексот:

на бројот a_1 го придружуваме бројот 1
на бројот a_2 го придружуваме бројот 2
на бројот a_3 го придружуваме бројот 3, итн.

Пример: Кои броеви ги има повеќе: позитивните парни броеви или природните броеви?

Решение: Веднаш паѓа во очи фактот дека позитивните парни броеви се раздвоени со непарните броеви, т.е. помеѓу секои два парни броеви имаме "вишок" по еден непарен број:

1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, ...

Без многу размислување може да се заклучи: *природни броеви има повеќе*, и тоа дури два пати повеќе. Но, во прв момент звучи скоро неверојатно, овој *заклучок е погрешен*! Во некое конечно множество на последователни природни броеви тоа можеби би бил точен заклучок. Еве, обичната логика не важи, бидејќи *имаме работа со бесконечни множества*. Овде е точен заклучокот: **позитивни парни природни броеви има исто толку колку и природни броеви.**

Како е тоа можно? Еве го објаснувањето.

Во два реда ќе ги запишеме: парните броеви (во горниот ред) и паралелно природните броеви (под парните).

2, 4, 6, 8, 10, ..., 2*n*, ...
1, 2, 3, 4, 5, ..., *n*, ...

Очигледно е пресликувањето на овие две низи од броеви, обратно еднозначно (на секој природен број *n* одговара парен број 2*n* и обратно). Ова го потврдува нашиот на прв поглед невозможен заклучок.

Слично се докажува дека декадни единици, т.е. броеви во низата: 1, 10, 100, 1 000, ..., ги има исто толку колку и природни броеви. Изгледа чудно, но точно е!

Некој можеби ќе помисли дека сите бесконечни множества имаат елементи колку и множеството на природните броеви (можат да се избројат), но тоа не е точно. Постои и "поголемо бесконечно", т.е. постојат и таканаречени **неизброиви множества**, но за тоа нема да зборуваме во оваа прилика.

Да го повториме многу важниот факт: **да бидеме внимателни со бесконечно големото**! Колку е ова важно, ќе се увериме веднаш.

Необичен пример. Што е поголемо $9 \cdot \infty$ или нула? Одговорот да се образложи!

Решение: Да замислиме дека имаме една огромна просторија (бесконечно голема). Да ги внесеме во оваа просторија броевите од првата десетка, т.е. броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, па да го земеме бројот 1 и да го изнесеме надвор од просторијата. **Тоа е првиот чекор!** Потоа, да ги внесеме во просторијата броевите од втората десетка, т.е. броевите: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 и да го изнесеме надвор бројот 2. **Тоа е вториот чекор**. Во **третиот чекор** ги внесуваме броевите: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 и го изнесуваме бројот 3 итн. Нека за секој чекор е потребно време од една секунда. Сега го поставуваме прашањето: После бесконечно многу секунди, т.е. после бесконечно многу опишани чекори, колку броеви има во нашата просторија? Ќе речете: "Ништо поедноставно! После секој извршен чекор количеството на внесените броеви се зголемува за 9 (внесуваме десет броеви, а изнесуваме еден.) Значи, после бесконечно многу чекори останало во просторијата $9 \cdot \infty$, т.е. ∞ многу броеви". На тоа ние ви одговараме:

"Добро пресметувавте, но лошо пресметавте! Во просторијата нема ни еден единствен број, т.е. има **нула броеви!**"

"Како - се чудите - тоа е невозможно!"

Да видиме кој е во право. Ако нашиот заклучок не е добар, наведете ни барем еден од тие ваши бесконечно многу броеви од таа просторија! Кој било број да наведете ние ќе ви докажеме дека сте го извадиле од просторијата. Дури можеме да ви го пресметаме и моментот на вадењето и тоа точно во секунда. Значи, не можете да докажете дека во нашата просторија има барем еден број, што потврдува дека "правилно заклучивме": **просторијата е празна!**

Ете ја докажавме неочекуваната претпоставка: 0 и $9 \cdot \infty$ се "еднакви"! Дали е токму така?

Веќе ве опоменивме дека релациите (а тоа се "=" и "<") меѓу елементите на конечните множества, немаат исти значења, а честопати се и бесмислени, меѓу бесконечно големите броеви.

Задача: Кои броеви ги има повеќе: декадните единици (1, 10, 100, 1 000, ...) или во низата 1, 4, 9, 16, 25, ...? Одговорот да се образложи!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус