Републички натпревар 1983

I година

1. Да се најдат сите цели броеви броеви x и y такви што разликата од нивните квадрати да биде 203.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката

$$x^2 - y^2 = 203, \tag{1}$$

тогаш и паровите $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ се , исто така, решенија на равенката (1). Затоа, доволно е да ги најдеме само позитивните решенија на равенката.

Од $203 = 1\cdot 203 = 7\cdot 29$ и од

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$,

добиваме

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=203 \end{cases} \tag{2}$$

или

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=29 \end{cases} \tag{3}$$

Решение на системот (2) е $x=102, y=101$, а решение на системот (3) е $x=18$, $y=11$. Според тоа, решенија на равенката (1) се паровите

$(102,101)$, $(-102,101)$, $(102,-101)$, $(-102,-101)$

$(18,11)$, $(-18,11)$, $(18,-11)$, $(-18,-11)$.

2. Еден камион чија брзина е $60\ km/h$ тргнал од градот A кон градот B. По некое време, од градот A кон градот B тргнал и автомобил со брзина $90\ km/h$. Било предвидено автомобилот да го стаса камионот во градот B. Меѓутоа, откако поминал $\frac{2}{3}$ од патот, камионот морал да ја намали брзината на $30\ km/h$ (поради неисправност). Заради тоа, автомобилот го стасал камионот $50\ km$ пред градот B. Да се одреди должината на патот меѓу градовите A и B.

Решение. Нека должината на патот меѓу двата града е $x\,\mathrm{km}$.

Кога камионот би се движел по целиот пат со $60\ \mathrm{km/h}$, нему би му требало $\frac{x}{60}$ часови за да стигне во градот B. Но, тој првите $\frac{2}{3}$ од патот, $\frac{2}{3}x$, ги поминал со брзина $60\ \mathrm{km/h}$ а остатокот (до средбата) $\frac{1}{3}x - 50$ со брзина $30\ \mathrm{km/h}$. Значи, до средбата поминале $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{60} + \frac{\frac{1}{3}x-50}{30}$ часови. Од друга страна автомобилот требало да го стаса камионот за $\frac{x}{90}$ часови по тргнувањето. Меѓутоа, тој го стигнал по $\frac{x-50}{90}$ часови. Значи, го стигнал $\frac{50}{90}$ часови пред предвиденото време.

Од горната дискусија ја добиваме равенката

$$\frac{x}{60}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{60}+\frac{\frac{1}{3}x-50}{30}\right)=\frac{50}{90},$$

чие решение е $x=200$. Значи, должината на патот од A до B е 200 km.

3. Нека x,y и z се броеви такви што

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x^2+y^2+z^2&=1.\\ x^3+y^3+z^3&=1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Да се докаже дека $xyz=0$.

Решение. Ако левата и десната страна на првото равенство од (1) ги квадрираме и го искористиме второто равество од (1), ќе добиеме

$$xy+yz+zx=0. \qquad (2)$$

Ако ги помножиме соодветните страни на првото и второто равенство од (1) и го искористиме третото равенство од (1), ќе добиеме

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=0. \qquad (3)$$

Од првото равенство на (1), добиваме $y+z=1-x$, $x+y=1-z$, $x+z=1-y$. Па равенството (3) ќе добие облик

$$xy+yz+zx-3xyz=0.$$

Од последното равенка, користејќи го равенството (2), добиваме $xyz=0$.

4. Антрополозите, за време на своите истражувања на архипелагот “Куку-Муку”, откриле постоење на примитивно општество во кое постоеле три брачни групи J,G и R. Во тоа општество важеле следните правила:

1) Еден маж и една жена можат да склучат брак ако и само ако припаѓаат на иста група.

2) Синовите на оние родители што припаѓаат на групата J, припаѓаат на групата R; ќерките, пак, припаѓаат на групата G.

3) Синовите на оние родители што припаѓаат на групата G, припаѓаат на групата J; ќерките, пак, припаѓаат на групата R.

4) Синовите на оние родители кои припаѓаат на групата R, припаѓаат на групата G; ќерките припаѓаат на групата J.

а) На кои групи може да припаѓаат внуците на брачната двојка од групата J?

б) Кои од следниве видови тетки може еден човек да ожени:

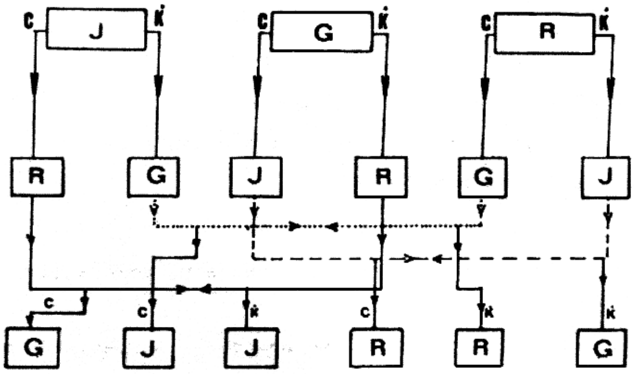
I. Сестра од неговата мајка

II. Сестра на неговиот татко

III. Вдовица од братот на татко му.

в) Во согласност со првилата на општеството, дали еден човек може да се ожени со својата внука (се мисли на внука од сестра, брат итн., не на внук од дете)?

Решение. „Фамилијарното стебло“ на ова општество е прикажано со следната шема.



а) Од горната шема напосредно гледаме дека внуците (машки) на брачната двојка од групата J припаѓаат на групите G и J, додека внуките на таа брачна двојка припаѓаат на групите R и J.

б) I. Мајката и тетката на човекот (како сестри) припаѓаат на иста група. Ако тие припаѓаат на групата J, тогаш човекот е од групата R, ако тие се од групата G човекот е од групата J, а ако се од R тој е од G. Според тоа, човекот и неговата тетка по мајка секогаш се во различни групи, па тие не може дасе земат меѓу себе.

II. Таткото и неговата сестра се во различни групи, но тие може да бидат во една од следниве двојки групи: $(R,G),(J,R)$ или (G,J), при што првата група од двојката ни ја кажува припадноста на таткото во групата, а втората буква ни ја кажува припадноста на неговата сестра.

Ако, на пример, таткото е во групата R, тогаш неговиот син е во групата G и како тетката е во групата G, тој може да се ожени со својата тетка.

III. Таткото и жената на неговиот брат (кој починал), припаѓаат на иста група, па синот од таткото ќе припаѓа на друга група и тоа дете не може да се ожени со жената на својот покоен чичко.

II година

1. При кои вредности на параметарот c корените x_1 и x_2 на равенката $x^2+x+c=0$ го задоволуваат неравенството .

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geq 2 \qquad (1)$$

Решение. Според Виетовите правила, имаме $x_1+x_2=-1$, $x_1x_2=c$ и, притоа, $c\neq 0$, коешто произлегува од (1) и $x_1x_2=c$. Користејќи го тоа, добиваме

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{1-2c}{c}.$$

Сега неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $\frac{1-2c}{c}\geq 2$, т.е. $0<c<\frac{1}{4}$.

2. Нека a и b се дадени реални броеви, така што $a\neq 0$, $b\neq 0, a\neq b$ и $a\neq -b$. Да се реши равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0.$$

Решение. За изразот L од левата страна на равенката имаме:

$$L=(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a+b})+(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b})=\frac{2x+a+b}{x(x+a+b)}+\frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}=\frac{(2x+a+b)[2x^2+2(a+b)x+ab]}{x(x+a)(x+b)(x+a+b)}$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со равенката

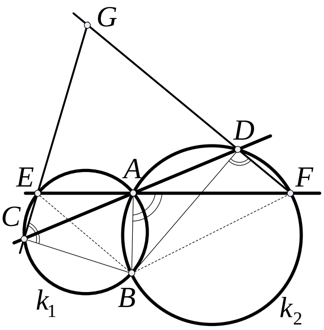
$$(2x+a+b)[2x^2+2(a+b)x+ab]=0,$$

чии решенија се :

$$x_1=-\frac{a+b}{2},\ x_{2/3}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Од претпоставките за a и b, дадени во задачата, следува дека корените x_1, x_2, x_3 се различни од нула, од $-a,$ од $-b$ и од $-(a+b)$.

3. Две кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Низ точката A повлечени се две прави p и q. Вторите пресечни точки на правата p со кружинците k_1 и k_2 се точките E и F соодветно, а на правата q се точките C и D соодветно. Нека $G=EC\cap DF$. Да се докаже дека точките B, C, D и G лежат на иста кружница.



Решение. Од цртежот гледаме дека: $\measuredangle FDB=\measuredangle BAF$ (како периферики агли над ист лак);

$\measuredangle BAF=180^\circ-\measuredangle EAB$ и $\measuredangle EAB=180^\circ-\measuredangle ECB$ (зошто четириаголникот $ABCE$ е тетивен). Според тоа, добиваме дека

$$\measuredangle FDB=\measuredangle ECB.$$

Од друга страна имаме $\measuredangle GDB=180^\circ-\measuredangle FDB$, па користејќи го претходното, добиваме дека

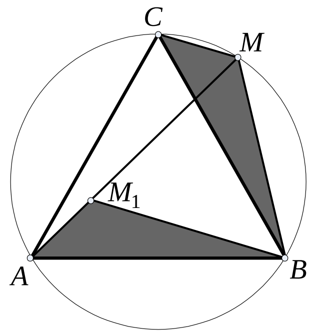
$$\measuredangle GDB+\measuredangle GCB=180^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $BCGD$ е тетивен, т.е. точките B, C, D и G лежат на иста кружница.

4. Во една кружница впишан е рамностран триаголник ABC. На лакот BC земена е произволна точка M. Да се докаже дека $\overline{MA}=\overline{MB}+\overline{MC}$.

Решение. Нека M_1 е точка од отсечката AM, така што важи $\overline{AM_1}=\overline{CM}$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle M_1AB=\measuredangle MCB$ (како периферски агли на ист лак), па, значи $\triangle AM_1B\cong\triangle CMB$. Затоа,

$$\overline{BM_1}=\overline{BM} \text{ и } \measuredangle ABM_1=\measuredangle CBM.$$



Од ова следува дека $\measuredangle M_1BM=60^\circ$. Исто така,

$$\measuredangle M_1MB=\measuredangle ACM=60^\circ$$

(како периферски агли над ист лак). Значи, $\triangle BMM_1$ е рамностран, па имаме

$$\overline{MA}=\overline{MM_1}+\overline{M_1A}=\overline{MB}+\overline{MC},$$

што и требаше да се докаже.

III година

1. При кои вредности на параметарот a системот

$$\begin{aligned}x^3-ay^3&=\tfrac{1}{2}(a+1)^2\\ x^3+ax^2y+xy^2&=1\end{aligned} \qquad (1)$$

има барем едно решение (x,y) што го задоволува условот $x+y=0$?

Решение. Да претпоставиме дека системот (1) има решение (x,y) кое го задоволува условот $x+y=0$; значи, $y=-x$, па, заменувајќи во двете равенки, ги добиваме равенките

$$(1+a)x^3=\tfrac{1}{2}(a+1)^2 \qquad (2)$$

$$(2-a)x^3=1. \qquad (3)$$

Од равенката (2) добиваме $a=-1$ или $x^3=\frac{1}{2}(a+1)$, при $a\neq-1$. Ставајќи $a=-1$ во (3) добиваме $x=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$, а ставајќи $x^3=\frac{1}{2}(a+1)$ при $a\neq-1$ добиваме

$$\tfrac{1}{2}(a+1)=\tfrac{1}{2-a}, \text{ т.е. } a=0 \text{ и } a=1.$$

Според тоа, при $a=0, a=1$ и $a=-1$ системот (1) може да има решение од обликот $(x,-x)$.

Да видиме, сега, дали за овие вредности на a системот (1) има решение од тој облик.

За $a=0$, од првата равенка на (1) добиваме $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, а за ова вредност на x, од втората равенка на (1) добиваме $y=\pm\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Значи, во овој случај решение на системот е парот $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2},-\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$.

За $a=1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x^3-y^3=2 \\ x^3+x^2y+xy^2=1 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=2 \\ x(x^2+xy+y^2)=1 \end{cases},$$

чие едно решение е парот $(1,-1)$.

За $a=-1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x^3+y^3=0 \\ x^3+x^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

чие (едно) решение е $(\frac{\sqrt[3]{9}}{3},-\frac{\sqrt[3]{9}}{3})$.

Следствено, системот (1) има решение од обликот $(x,-x)$ само за $a=0;-1;1$.

2. Еден полином $p(x)$ при делењето со полиномот $x-1$ дава остаток 2, а при делењето со полиномот $x-2$ дава остаток 1. Да се најде остатокот што се добива при делењето на полиномот $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$.

Решение. Според условите на задачата имаме $p(x)=q_1(x)(x-1)+2$ и $p(x)=q_2(x)(x-2)+1$, од каде што следува дека $p(1)=2$ и $p(2)=1$. Нека $q(x)$ е количникот, а $rx+s$ остатокот што се добива при на полиномот $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$. Имаме

$$p(x)=q(x)(x-1)(x-2)+rx+s,$$

од каде што следува дека $p(1)=r+s$, $p(2)=2r+s$. Бидејќи $p(1)=2$, $p(2)=1$, добиваме

$$r+s=2,\ 2r+s=1, \text{ т.е. } r=-1,\ s=3.$$

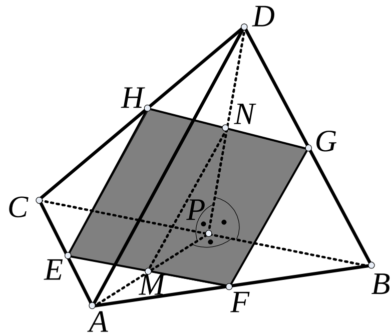
Значи, остатокот што се добива при делење на $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$ е $-x+3$.

3. Дадена е тристрана пирамида $DABC$ чија основа ABC е рамностран триаголник, а ѕидот DBC е рамнокрак триаголник со крак b и е нормален на основата. Да се најде плоштината на квадратот што се добива како пресек на пирамидата со рамнината паралелна на рабовите DA и BC.

Решение. Работ DA е нормален на работ BC, па секоја рамнина што е паралелна со овие два раба ја сече пирамидата во правоаголник. Се прашуваме, дали при некоја положба на рамнината овој правоаголник може да биде квадрат. Ако тоа е можно, треба да ја најдеме неговата страна.

Да претпоставиме дека тоа е можно и нека тоа биде квадратот $EFGH$ (види цртеж) со страна x. Ако O е средината на работ BC, тогаш имаме

$$\overline{DO}^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}, \ \overline{DA}^2 = b^2 + \frac{a^2}{2}.$$



Ако M и N се прободните точки на рамнината со правите AO и DO соодветно, тогаш од тоа што триаголникот AEF е рамностран добиваме $\overline{AM} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$$\overline{OM} = \overline{OA} - \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x).$$

Од сличноста, пак, на триаголниците OAD и OMN следува дека

$$\overline{DA} : x = \overline{OA} : \overline{OM},$$

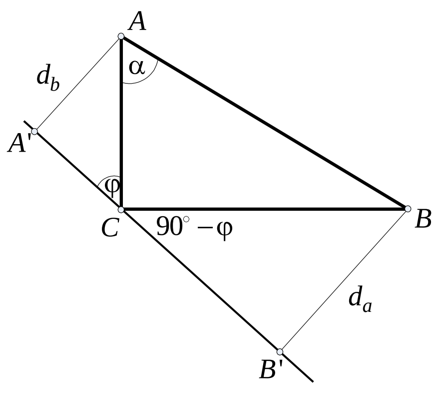
од каде што добиваме

$$x = a\sqrt{2b^2 + a^2} : (a\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + a^2}). \qquad (1)$$

Значи, правоаголникот може да е квадрат со страна x која е дадена со (1), и плоштина $P = x^2$

4. Даден е правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = b$. Низ темето C да се повлече права, таква што збирот од растојанијата од темињата A и B до оваа права да е најголем.

Решение. Правата што треба да се повлече низ темето C, наполно е определена со аголот φ што таа права го зафаќа со катетата AC (види цртеж).



Од правоаголните триаголници ACB, $AA'C$ и $BB'C$ добиваме

$a = b\,\mathrm{tg}\alpha$, $d_b = b\sin\varphi$ и $d_a = a\cos\varphi$.

Затоа имаме:

$$\begin{aligned} d_a + d_b &= a\sin\varphi + b\cos\varphi \\ &= b\,\mathrm{tg}\alpha\sin\varphi + b\cos\varphi \\ &= b\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\varphi + \cos\varphi\right) \\ &= b\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

Според тоа, $d_a + d_b$ ќе биде најголем ако $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, т.е. за $\phi = \alpha$.

IV година

1. Да се најдат сите природни броеви n за кои бројот $7^n - 1$ е делив со 6 и 8.

Решение. Бидејќи

$$7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + ... + 7^2 + 7 + 1)$$

Следува дека бројот $7^n - 1$ е делив со 6 за секој природен број n.

Ставајќи $8-1$ наместо 7, добиваме

$$7^n - 1 = (8-1)^n - 1 = 8^n - \binom{n}{1}8^{n-1} + \binom{n}{2}8^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}8 + (-1)^n - 1$$

$$= 8[8^{n-1} - \binom{n}{1}8^{n-2} + \binom{n}{2}8^{n-3} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}] + [(-1)^n - 1] .$$

Според тоа, бројот $7^n - 1$ е делив со 8 ако и само ако $(-1)^n - 1 = 0$, т.е. ако и само ако n е парен број. Од сето тоа следува дека бројот $7^n - 1$ е делив со 6 и 8 за секој парен природен број n и само за нив.

2. Да се најде најголемиот член во развојот на $(1+\sqrt{2})^{50}$.

Решение. Според биномната формула, n-тиот член на развојот на $(1+\sqrt{2})^{50}$ е

$$T_{n+1} = \binom{50}{n}\sqrt{2^n} .$$

Така, имаме $T_1 = 1$, $T_2 = 50\sqrt{2}$, $T_3 = 255$, што значи дека $T_1 < T_2 < T_3$. Исто така, $T_{50} = 2^{25}$, $T_{49} = 50 \cdot 2^{24} \cdot \sqrt{2}$, $T_{48} = 1225 \cdot 2^{24}$, што значи $T_{50} < T_{49} < T_{48}$. Според тоа, низата $T_1, T_2, T_3, ..., T_{50}$ донекаде расте, а потоа опаѓа. За да го најдеме најголемиот член на таа низа, ќе го испитаме односот $T_{n+1} : T_n$. Имаме:

$$T_{n+1} : T_n = \binom{50}{n}\sqrt{2^n} : \binom{50}{n-1}\sqrt{2^{n-1}} = \frac{51-n}{n}\sqrt{2} .$$

За да биде $T_{n+1} < T_n$, треба да е

$$\frac{51-n}{n}\sqrt{2} < 1, \text{ т.е. } n > 51(2-\sqrt{2}) .$$

Најмалиот природен број што е поголем од $51(2-\sqrt{2})$ е 30, што значи дека

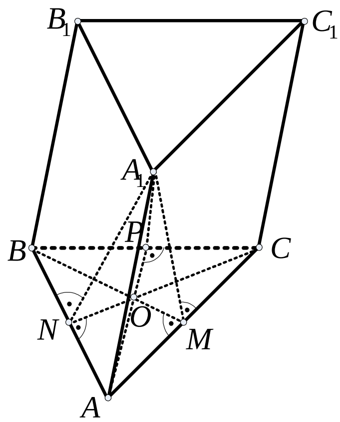
$$T_{30} > T_{31} > T_{32} > ... > T_{50} \text{ и } T_1 < T_2 < T_3 < ... < T_{30} .$$

Според тоа, најголемиот член во развивањето на $(1+\sqrt{2})^{50}$ е членот

$$T_{30} = \binom{50}{29}\sqrt{2^{29}} .$$

3. Дадена е коса призма, чија основа е рамностран триаголник со страна $10\ dm$, а бочен раб $13\ dm$. Едно од темињата на горната основа нормално се проектира во центарот на долната основа на призмата. Да се пресмета плоштината на призмата.

Решение. Нека точката O е ортогонална проекција од темето A_1 на призмата $ABCA_1B_1C_1$ врз нејзината основа ABC (види цртеж). Ќе докажеме дека ѕидот BCC_1B_1 е правоаголник.



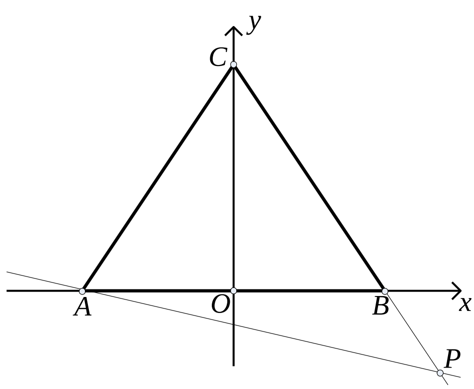
Бидејќи O е ортогонална проекција на A_1 врз рамнината ABC, добиваме дека рамнината APA_1 е нормална на работ BC (P е средина на работ BC). Затоа, од $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ следува дека $BB_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp BC$, што требаше и да се докаже.

Од правоаголните триаголници A_1NA и A_1MA (N е средина на AB и M е средина на AC) добиваме $\overline{NA_1} = 12$ и $\overline{MA_1} = 12$. За плоштината P на призмата ќе имаме:

$$P = 2B + M = 2 \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4}\sqrt{3} + \overline{AB} \cdot \overline{NA_1} + \overline{AC} \cdot \overline{MA_1} + \overline{BB_1} \cdot \overline{BC}$$
$$= 50\sqrt{3} + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 13 = 50\sqrt{3} + 370 .$$

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB} = 2a$ и нека P е пресечна точка на правата BC со правата p што минува низ темето A и е нормална на страната AC. Да се најде геометриското место на точките P кога точките A и B се фиксни, а точката C се движи, така што триаголникот ABC секогаш да е рамнокрак.

Решение. Од условите на задачата следува дека точката C се движи по симетралата на отсечката AB. Затоа, да избереме координатен систем, така што правата AB да е x-оската, а симетралата на отсечката AB да е y-оската (види цртеж). Тогаш имаме $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ и $C(0, c)$, при што $c \neq 0$ се менува. Равенките на правите BC и p се:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \quad \text{и} \quad y = -\frac{a}{c}(x + a)$$

соодветно. Со елиминација на параметарот c се добива равенката $x^2 - y^2 = a^2$ што претставува врска меѓу координатите x и y на точката P. Значи, геометриското место на точките P е хипербола.